Aproximación polinómica de una función

Jesús García de Jalón de la Fuente

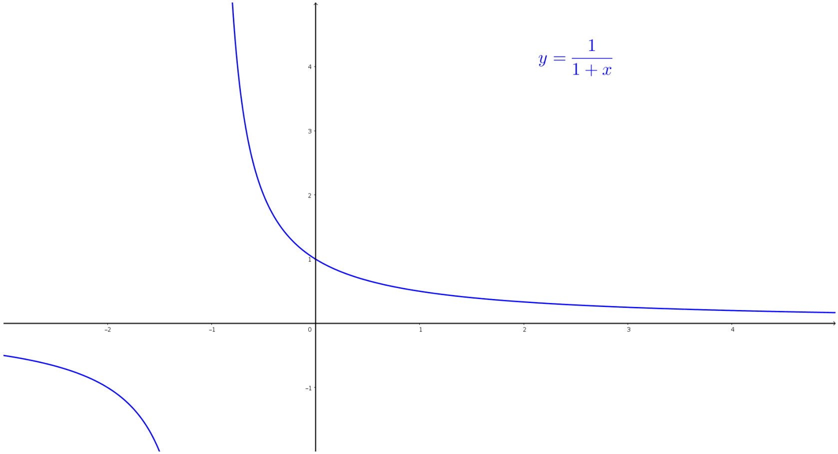
IES Ramiro de Maeztu
Madrid

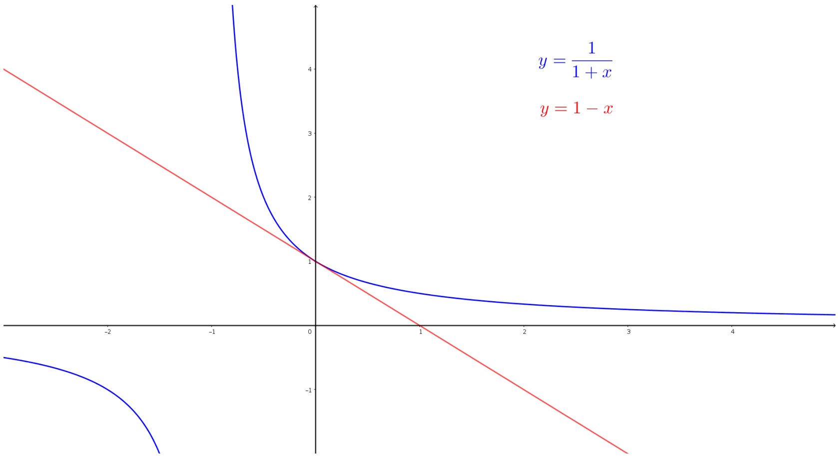
2020

Aproximación por un polinomio: ejemplo

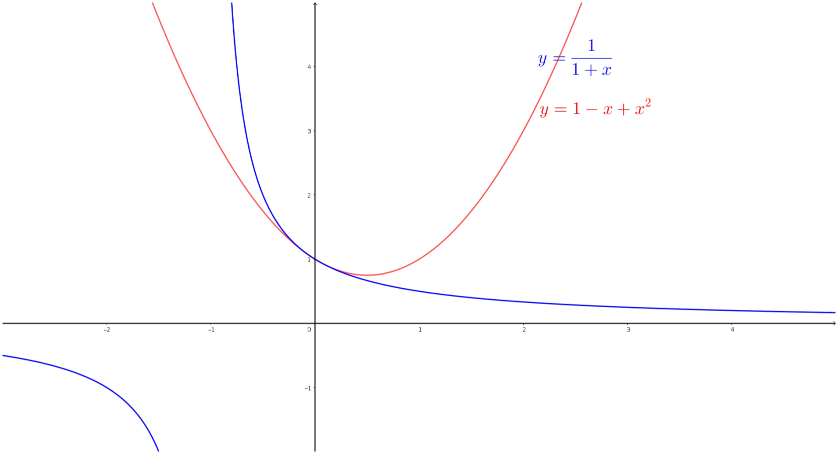
$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & 1 & & & & & & & \\
- & 1 & - & x & & & & & \\
\hline
 & & - & x & & & & & \\
 & & & x & + & x^2 & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & x^2 & & & \\
 & & & & - & x^2 & - & x^3 & \\
\cline{5-8}
 & & & & & & - & x^3 & \quad \dots
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{|l}
1+x \\
\hline
1-x+x^2-x^3+\dots
\end{array}
$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots \qquad \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\dots$$

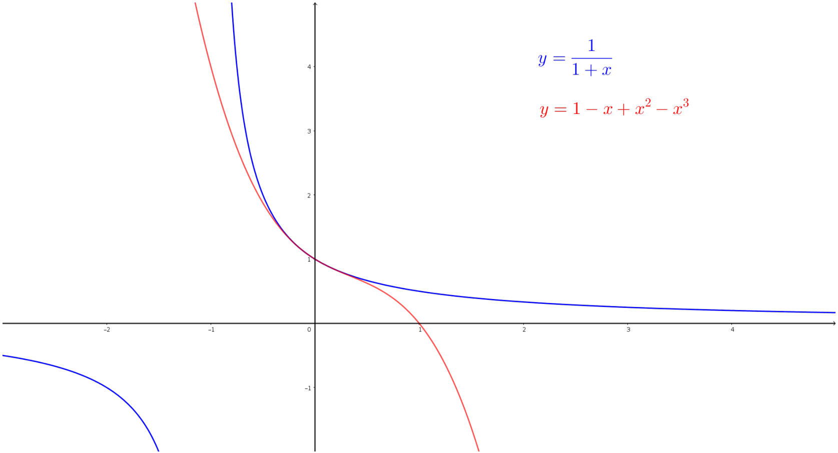

$y = \dfrac{1}{1+x}$
–2
–1
0
1
2
3
4
–1
1
2
3
4

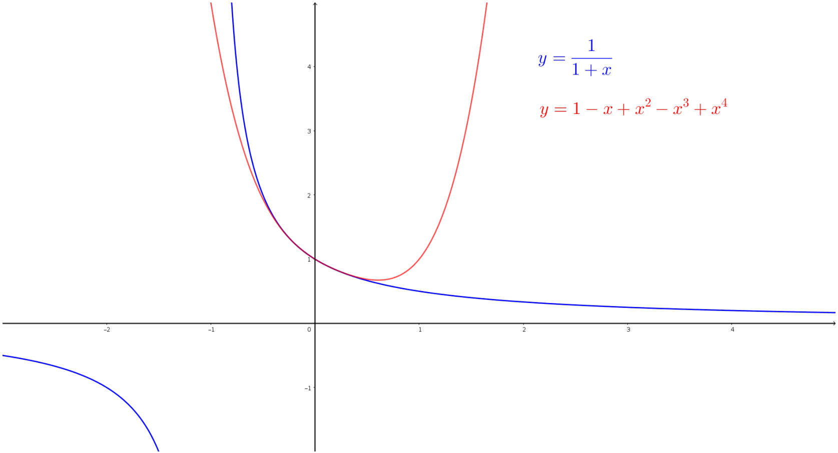


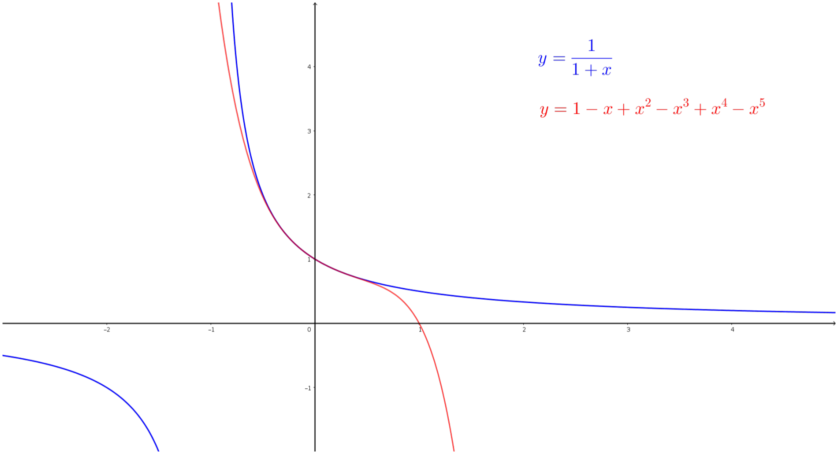
$y = \dfrac{1}{1+x}$
$y = 1 - x$
-2
-1
0
1
2
3
4



$y = \frac{1}{1+x}$
$y = 1 - x + x^2$
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
1
2
3
4

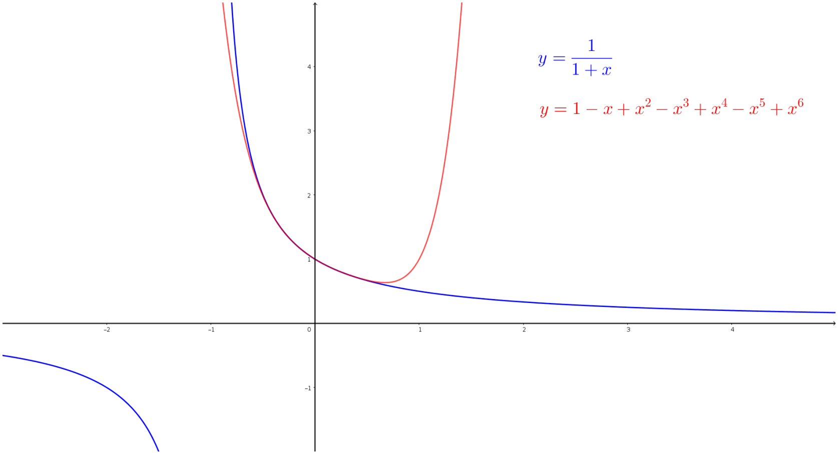

$y = \dfrac{1}{1+x}$
$y = 1 - x + x^2 - x^3$
4
3
2
1
-1
-2
-1
0
1
2
3
4


$y = \frac{1}{1+x}$
$y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$
−2
−1
0
1
2
3
4
−1
1
2
3
4

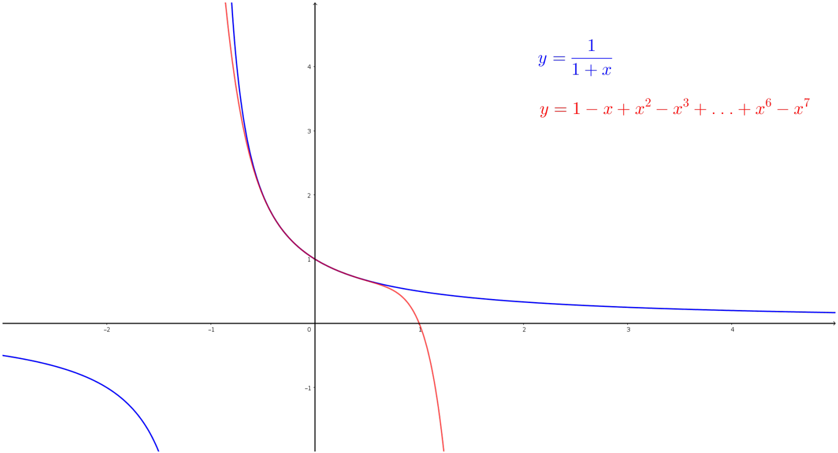


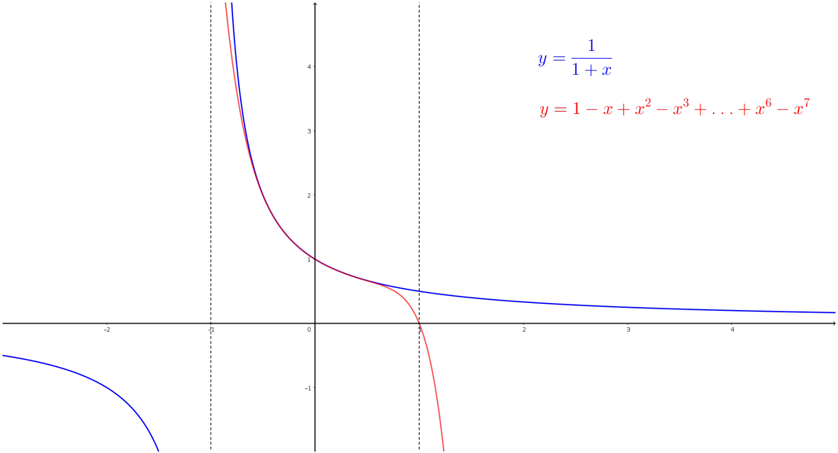
$$y = \frac{1}{1+x}$$

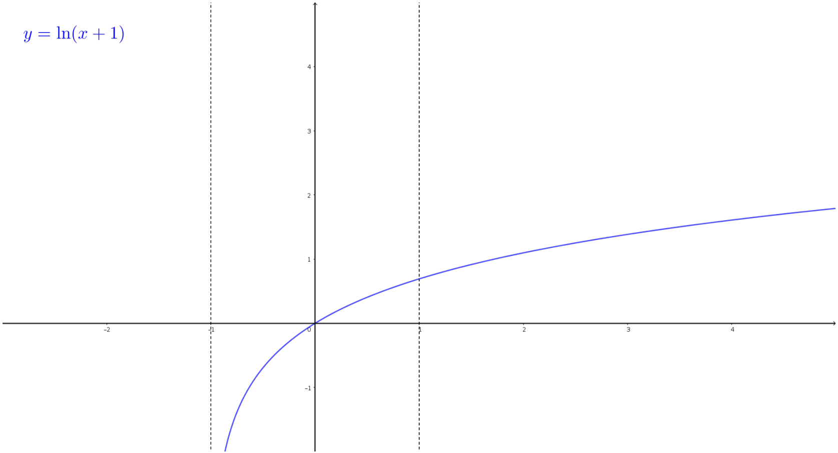
$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$$

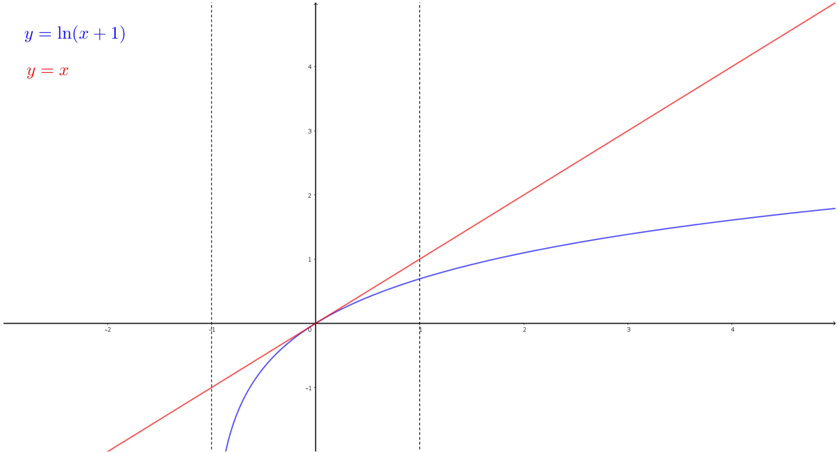


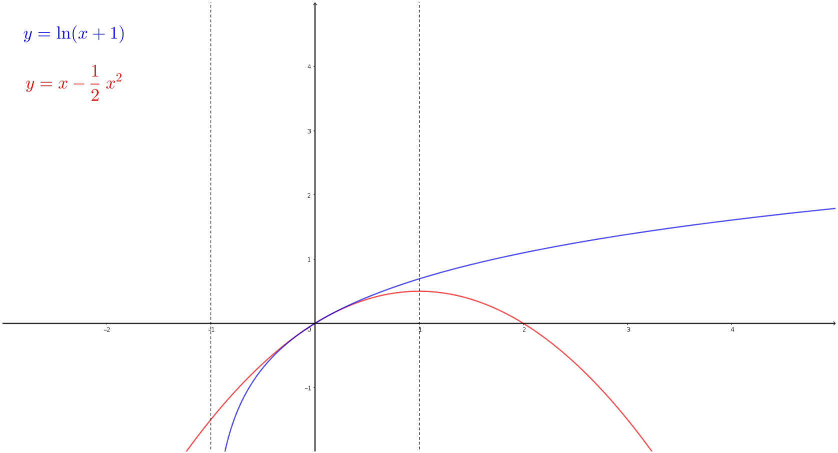
$y = \dfrac{1}{1+x}$
$y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$
-2
-1
0
1
2
3
4
-1

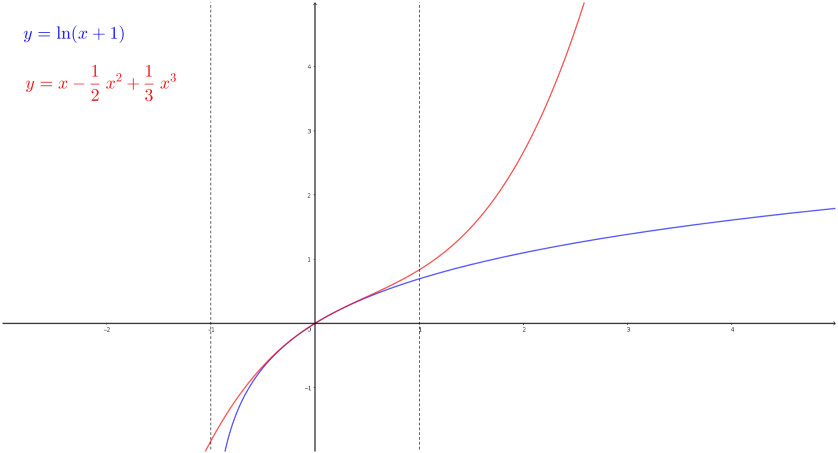

$y = \frac{1}{1+x}$
$y = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^6 - x^7$
−2
−1
0
1
2
3
4
−1

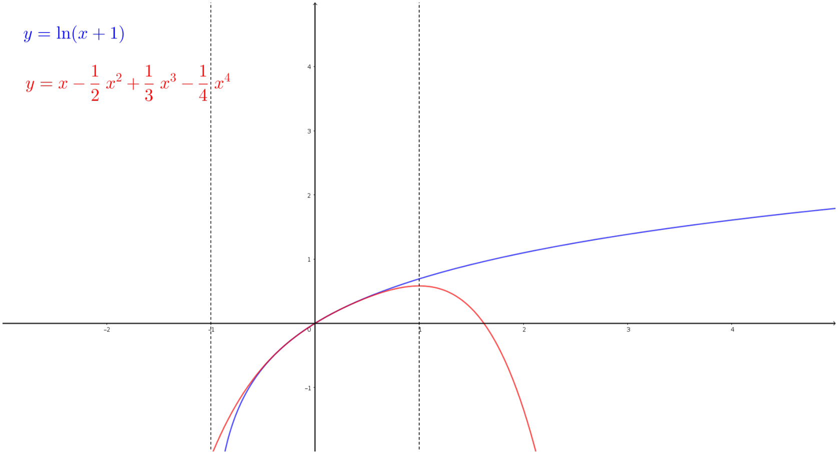

$y = \dfrac{1}{1+x}$
$y = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^6 - x^7$

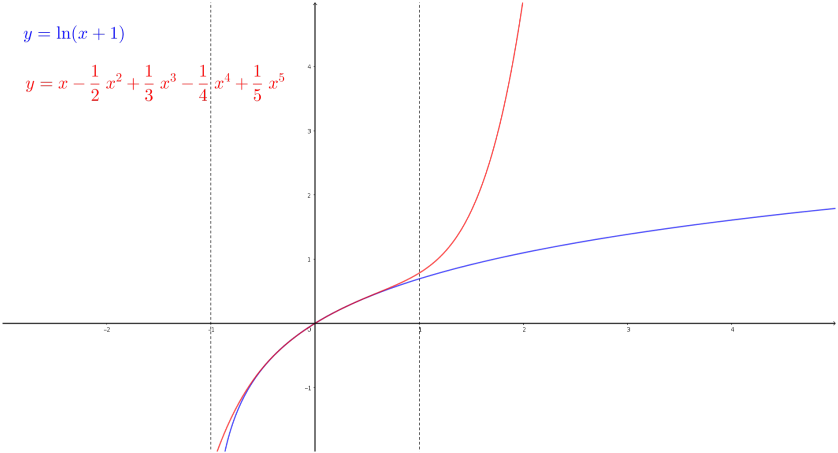

$y = \ln(x+1)$
4
3
2
1
-1
-2
-1
0
1
2
3
4


$y = \ln(x+1)$
$y = x$


$y = \ln(x+1)$
$y = x - \frac{1}{2}\,x^2$
-2
-1
0
1
2
3
4
-1
1
2
3
4


$y = \ln(x+1)$
$y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$
4
3
2
1
-1
-2
-1
0
1
2
3
4


$y = \ln(x+1)$
$y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$


$y = \ln(x+1)$
$y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$

Desarrollo de $\operatorname{artg} x$

Hemos visto que:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

Sustituyendo x por x^2 resulta:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

e integrando:

$$\operatorname{artg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \dots$$

Desarrollo a partir de la fórmula de Newton

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}\,x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\,x^4 + \dots$$

Para $n = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{1}{16}\,x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

Cambiando x por $-x$:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 - \frac{1}{16}\,x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

Y para $n = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{8}\,x^2 - \frac{5}{16}\,x^3 + \frac{35}{128}\,x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{8}\,x^2 + \frac{5}{16}\,x^3 + \frac{35}{128}\,x^4 + \dots$$

Desarrollo de $\operatorname{arsen} x$

Si en:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{8}\,x^2 + \frac{5}{16}\,x^3 + \frac{35}{128}\,x^4 + \dots$$

sustituimos x por x^2:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{3}{8}\,x^4 + \frac{5}{16}\,x^6 + \frac{35}{128}\,x^8 + \dots$$

e integramos:

$$\operatorname{arsen} x = x + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{3}{40}\,x^5 + \frac{5}{112}\,x^7 + \frac{35}{1152}\,x^9 + \dots$$

Polinomio de Taylor

Sea f una función n veces derivable en el punto $x = a$. El **polinomio de Taylor** de grado n de esta función en ese punto (también llamado desarrollo de Taylor en el punto) es un polinomio:

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots + a_n(x-a)^n$$

tal que:

$$\begin{aligned} P(a) &= f(a) \\ P'(a) &= f'(a) \\ P''(a) &= f''(a) \\ \ldots & \quad \ldots \\ P^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

Es fácil ver que, para que se cumpla esto, el polinomio debe ser:

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

El desarrollo de Taylor de una función en torno al punto $a = 0$ se llama **desarrollo de McLaurin**. Así, el polinomio de McLaurin de la función f sería:

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Ejemplos: desarrollo de la función exponencial

Sea la función $f(x) = e^x$.

Todas las derivadas de la función exponencial son iguales a e^x. Por consiguiente, las derivadas en el punto $x = 0$ valen 1. El desarrollo es:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

Desarrollo de $\operatorname{sen} x$

Las derivadas de la función seno son:

$$
\begin{array}{ll|ll}
y' = \cos x & y'(0) = 1 & y'' = -\operatorname{sen} x & y''(0) = 0 \\
y''' = -\cos x & y'''(0) = -1 & y^{(4)} = \operatorname{sen} x & y^{(4)}(0) = 0 \\
y^{(5)} = \cos x & y^{(5)}(0) = 1 & y^{(6)} = -\operatorname{sen} x & y^{(6)}(0) = 0
\end{array}
$$

El desarrollo queda:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

Desarrollo de $\cos x$

Procediendo de la misma manera con la función coseno:

$$
\begin{array}{ll|ll}
y' = -\operatorname{sen} x & y'(0) = 0 & y'' = -\cos x & y''(0) = -1 \\
y''' = \operatorname{sen} x & y'''(0) = 0 & y^{(4)} = \cos x & y^{(4)}(0) = 1 \\
y^{(5)} = -\operatorname{sen} x & y^{(5)}(0) = 0 & y^{(6)} = -\cos x & y^{(6)}(0) = -1
\end{array}
$$

Puesto que, además, $\cos 0 = 1$, el desarrollo del coseno es:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

Obsérvese que en el desarrollo de la función seno que es impar solamente hay potencias impares y en la función coseno (par) solamente hay exponentes pares.

Aplicación al cálculo de límites

Calculemos el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^{3x} - 1 - 3x}$$

Puesto que:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^{3x} - 1 - 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\, 4x^2 + \dots\right)}{\left(1 + 3x + \frac{1}{2}\, 9x^2 + \dots\right) - 1 - 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\, 4x^2}{\frac{1}{2}\, 9x^2} = \frac{4}{9}$$

Sea ahora el límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x\right)$$

Teniendo en cuenta que:

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}+\dots \quad\Longrightarrow\quad \sqrt[3]{1+x} = 1+\frac{1}{3}\,x-\frac{1}{9}\,x^2+\dots$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\,x\left(\sqrt[3]{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}}-1\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\,x\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}\right)-1\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\left(-5+\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= -\frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Teorema de Taylor

Teorema

Sea $f(x)$ una función $n+1$ veces derivable en un entorno del punto $x = a$. En estas condiciones, existe un punto ξ comprendido entre a y x tal que:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Es decir, la diferencia entre una función y su polinomio de Taylor de grado n puede expresarse como:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \; ; \qquad \xi \in (a,x)$$

El teorema de Taylor permite estimar el error que se comete al sustituir una función por su polinomio de Taylor.

Teorema de Taylor: demostración

Recordemos el teorema de Cauchy:

$$\left.\begin{cases} -\ f(x), g(x) \text{ continuas en } [a,b] \\ -\ f(x), g(x) \text{ derivables en } (a,b) \\ -\ g'(x) \text{ no se anula en } (a,b) \end{cases}\right. \implies \exists \xi \in (a,b) \mid \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Vamos a aplicar reiteradamente el teorema de Cauchy a las funciones:

$$F(x) = f(x) - P(x)$$
$$G(x) = (x-a)^{n+1}$$

en el intervalo $[a, x]$.

La primera función es la diferencia entre $f(x)$ y su polinomio de Taylor en $x = a$.
Ambas funciones y sus n primeras derivadas son nulas en el punto a.

Entonces, por el teorema de Cauchy:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} \qquad \xi_1 \in (a, x)$$

Volvemos a aplicar el teorema de Cauchy. Puesto que las derivadas son cero en el punto a:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} \qquad \xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, x)$$

Prosiguiendo el proceso llegaremos a:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)} \qquad \xi \in (a, x)$$

Teniendo en cuenta que $F(x)$ es la diferencia entre la función y su polinomio de Taylor, que $G(x) = (x - a)^{n+1}$ y que $G^{(n+1)}(x) = (n + 1)!$ resulta:

$$\frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}\ ; \qquad \xi \in (a, x)$$

de donde

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}\ ; \qquad \xi \in (a, x)$$

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención