Probabilidad (2)

Jesús García de Jalón de la Fuente

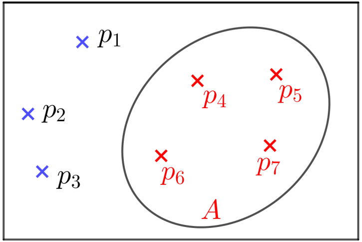
IES Ramiro de Maeztu
Madrid

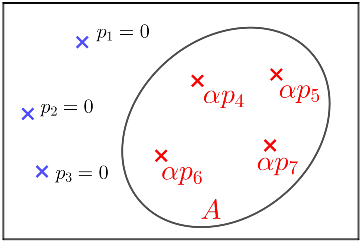
2020

Probabilidad condicionada

Supongamos que tenemos una información parcial del resultado de un experimento.

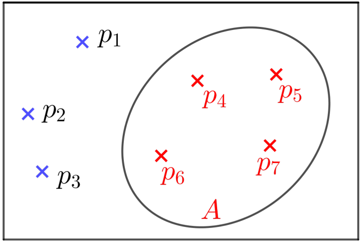
No sabemos qué resultado se ha obtenido pero sabemos que es un resultado del suceso A. ¿Cómo cambian las probabilidades con esta información?

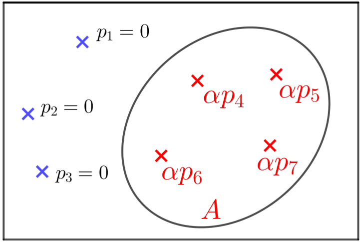




Las probabilidades de los resultados fuera de A pasan a ser cero. Las de los resultados de A se multiplican por un factor α.

Probabilidad condicionada

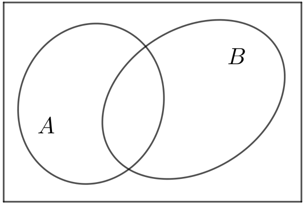




$$\alpha p_4 + \alpha p_5 + \alpha p_6 + \alpha p_7 = \alpha(p_4 + p_5 + p_6 + p_7) = \alpha \mathrm{p}(A) = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{\mathrm{p}(A)}$$

Probabilidad condicionada



La probabilidad del suceso B condicionada al suceso A es:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Esto se puede escribir como:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A) \qquad \text{(regla del producto)}$$

Ejemplo

En una fuente hay 5 naranjas y 3 limones. Se seleccionan dos frutas al azar. Calcular la probabilidad de que sean

(*a*) Dos limones

(*b*) Una naranja y un limón

Solución:

Sean los sucesos L_1 = «la primera fruta es un limón», L_2 = «la segunda fruta es un limón», N_1 = «la primera fruta es una naranja» y N_2 = «la segunda fruta es una naranja».

(*a*) $\mathrm{p}(L_1 \cap L_2) = \mathrm{p}(L_1) \cdot \mathrm{p}(L_2|L_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$

(*b*) $\mathrm{p}\left((L_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap L_2)\right) = \mathrm{p}(L_1) \cdot \mathrm{p}(N_2|L_1) + \mathrm{p}(N_1) \cdot \mathrm{p}(L_2|N_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{30}{56}$

♠♠♠♠

Sucesos independientes

Si $\mathrm{p}(B|A) = \mathrm{p}(B)$ los sucesos A y B son **independientes**.

Por ejemplo la probabilidad de sacar un as de una baraja es:

$$\mathrm{p}(\text{«sacar un as»}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

Si sabemos que se ha sacado una carta de oros:

$$\mathrm{p}(\text{«sacar un as»}|\text{«sacar oros»}) = \frac{\mathrm{p}(\text{«sacar el as de oros»})}{\mathrm{p}(\text{«sacar oros»})} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{10}$$

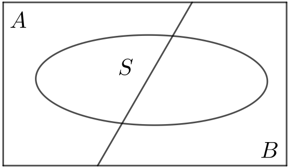
Los sucesos «sacar un as» y «sacar oros» son independientes.

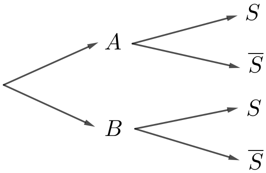
Si los sucesos son independientes:

$$\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(B|A) = \mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(B)$$

Probabilidad total

En ocasiones se conocen las probabilidades condicionadas de un suceso y se desea conocer la probabilidad total. El problema responde al siguiente esquema:



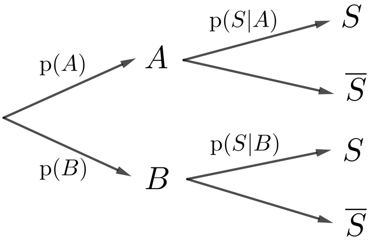


La probabilidad del suceso S es igual a:

$$\mathrm{p}(S) = \mathrm{p}(A \cap S) + \mathrm{p}(B \cap S) = \mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(S|A) + \mathrm{p}(B) \cdot \mathrm{p}(S|B)$$

Fórmula de Bayes

Si en el problema anterior:



se sabe que se ha realizado el suceso S y se quiere calcular la probabilidad de A o de B:

$$\mathrm{p}(A|S) = \frac{\mathrm{p}(A \cap S)}{\mathrm{p}(S)} = \frac{\mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(S|A)}{\mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(S|A) + \mathrm{p}(B) \cdot \mathrm{p}(S|B)}$$

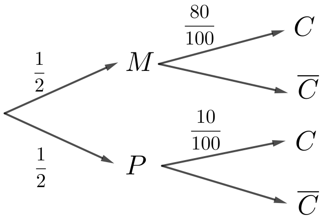
Ejemplo

Una compañía farmaceútica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

(a) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

(b) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Ejemplo



Aplicando la fórmula de la probabilidad total y la de Bayes:

$$\mathrm{p}(C) = \mathrm{p}(M)\cdot \mathrm{p}(C|M) + \mathrm{p}(P)\cdot \mathrm{p}(C|P) = \frac{1}{2}\cdot\frac{80}{100} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{100} = \frac{45}{100}$$

$$\mathrm{p}(M|C) = \frac{\mathrm{p}(M\cap C)}{\mathrm{p}(C)} = \frac{\mathrm{p}(M)\cdot \mathrm{p}(C|M)}{\mathrm{p}(C)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{80}{100}}{\frac{45}{100}} = \frac{80}{90}$$

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención