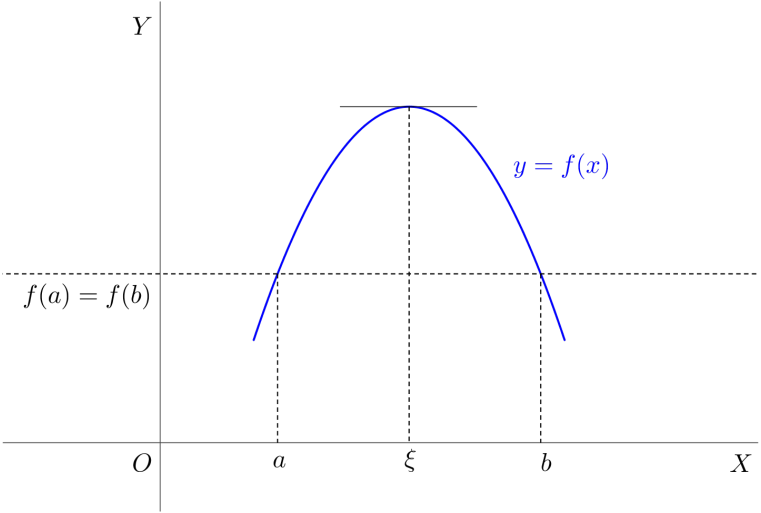
Derivadas (3)

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

2020

Teorema de Rolle



Teorema (Rolle)

Sea $f(x)$ una función

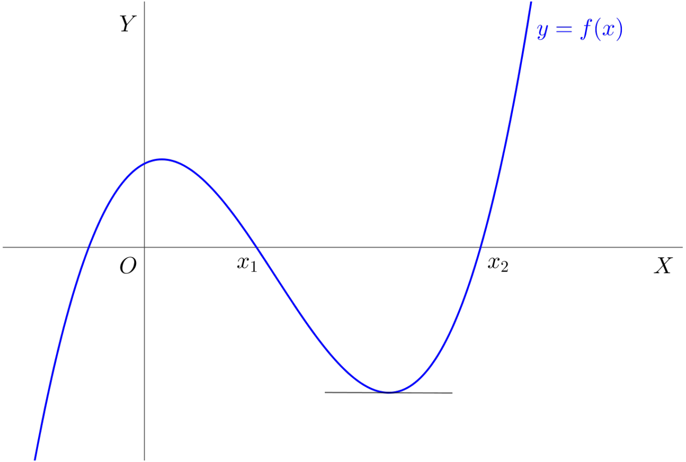
- Continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
- Derivable en el intervalo abierto (a, b).
- La función toma el mismo valor en los extremos del intervalo:

$$f(a) = f(b)$$

Si se cumplen estas condiciones, existe al menos un punto $\xi \in (a, b)$ en el que $f'(\xi) = 0$.

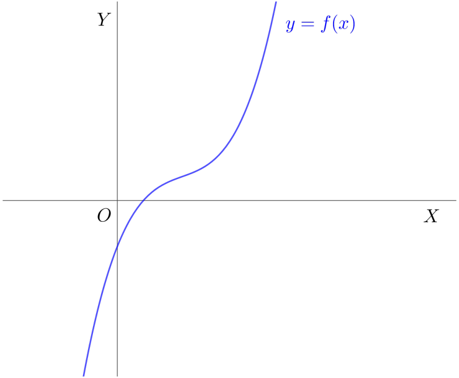
Consecuencias del teorema de Rolle (1)

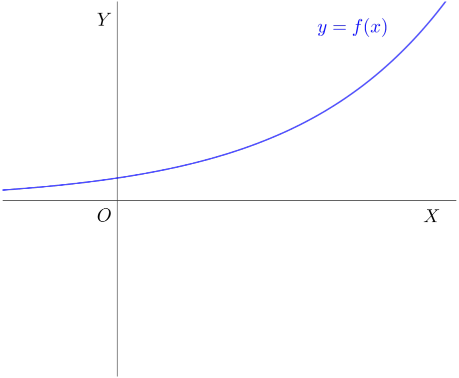
Entre dos ceros de una función derivable debe haber al menos un cero de la derivada.



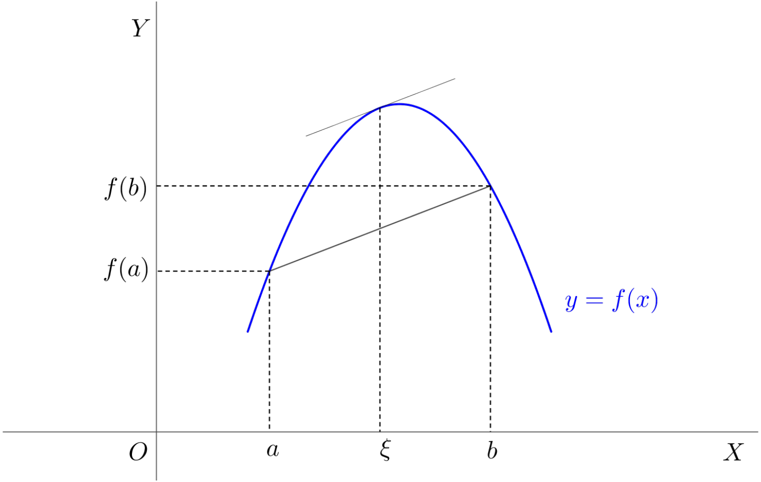
Consecuencias del teorema de Rolle (2)

Si la derivada no se anula, la función tiene a lo sumo un cero.





Teorema del valor medio



Teorema (del valor medio, de Lagrange o de los incrementos finitos)

Si f es:

- continua en $[a, b]$ y
- derivable en (a, b)

entonces, existe $\xi \in (a, b)$ tal que:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o bien:

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$$

Demostración del teorema del valor medio

Sea

$$F(x) = f(x) - \lambda x$$

y escojamos λ de forma que la función cumpla las hipótesis del teorema de Rolle.

Desde luego, se cumplen las condiciones de continuidad y derivabilidad. Para que se cumpla la tercera condición:

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - \lambda a \\ F(b) &= f(b) - \lambda b \end{aligned}$$

Entonces:

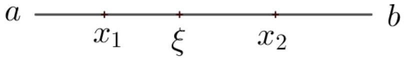
$$F(a) = F(b) \quad \Longrightarrow \quad f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Para este valor de λ, como consecuencia del teorema de Rolle, existe $\xi \in (a, b)$ tal que $F'(\xi) = 0$:

$$\exists \xi \mid F'(\xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(\xi) - \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(\xi) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Consecuencias del teorema del valor medio (1)

- Si $f'(x) > 0$ en (a, b), entonces $f(x)$ es creciente en (a, b).



Sean $x_1, x_2 \in (a, b)$ y $x_2 > x_1$. Por el teorema del valor medio:

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1) > f(x_1)$$

y la función es creciente.

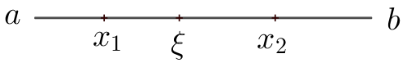
- Igualmente, si $f'(x) < 0$ en (a, b), entonces $f(x)$ es decreciente en (a, b).

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1) < f(x_1)$$

y la función es decreciente.

Consecuencias del teorema del valor medio (2)

- Si $f'(x) = 0$ en (a, b), entonces $f(x)$ es constante en (a, b).



  Sean $x_1, x_2 \in (a, b)$. Por el teorema del valor medio:

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1) = f(x_1)$$

  y la función es constante.

- Si dos funciones tienen la misma derivada su diferencia es constante.
  Sea $F(x) = f(x) - g(x)$. Si las dos funciones tienen la misma derivada:

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

  y, por la propiedad anterior, $F(x) = f(x) - g(x)$ es constante

Teorema de la media de Cauchy

Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), existe $\xi \in (a,b)$ que cumple:

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi)$$

Sea $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$. La función $F(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Escojamos λ de modo que cumpla también la tercera condición del teorema de Rolle:

$$\begin{cases} F(a) = f(a) - \lambda g(a) \\ F(b) = f(b) - \lambda g(b) \end{cases} \qquad f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Entonces, por el teorema de Rolle, existe ξ tal que $F'(\xi) = 0$:

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0; \qquad f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0; \qquad (f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi)$$

Teorema (de Cauchy)

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones:

- Continuas en $[a, b]$
- Derivables en (a, b)
- La derivada de $g(x)$ no se anula en (a, b)

Entonces, existe $\xi \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Es igual que el teorema anterior. La tercera condición se añade para poderlo escribir en forma de fracción.

Regla de l'Hôpital. Enunciado.

Teorema (Regla de l'Hôpital)

Sean f y g dos funciones:

- Derivables en un entorno reducido de a.
- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.
- La derivada g' no se anula en un entorno reducido de a.

Entonces, si existe el límite del cociente de las derivadas:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regla de l'Hôpital. Demostración.

Puesto que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ podemos suponer $f(a) = g(a) = 0$ y las funciones f y g continuas en a.

Entonces, podemos aplicar el teorema de Cauchy en el intervalo $[a, x]$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Siendo ξ un número comprendido entre a y x. Cuando x tiende a a, los números x y ξ se hacen muy próximos de modo que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención