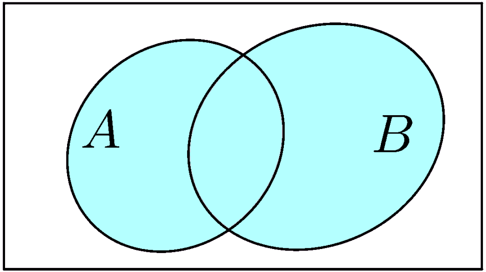
Combinatoria (1)

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

2020



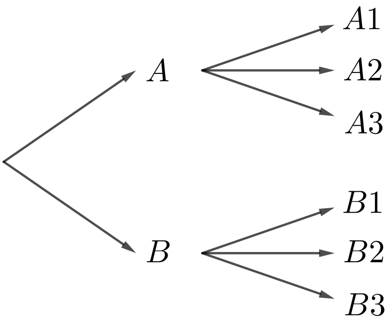
El número de elementos de $A \cup B$ es igual al número de elementos de A más el número de elementos de B menos el número de elementos de $A \cap B$:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Regla del producto

Sea un objeto que está formado por dos partes diferentes. Si la primera parte puede configurarse de p maneras diferentes y la segunda parte se puede configurar de q maneras diferentes, el número de configuraciones posibles del objeto es $p \cdot q$.

Por ejemplo si la primera parte puede formarse de dos maneras diferentes A y B y si la segunda parte puede formarse de tres maneras diferentes 1, 2 y 3, el objeto puede configurarse de 6 maneras.



Dado un conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ de n elementos, se llaman combinaciones de estos n elementos tomados de k en k a los subconjuntos de k elementos que pueden formarse con ellos.

Por ejemplo, sea el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Las combinaciones de dos elementos son:

$$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}$$

Vemos que hay 15 combinaciones.

Los subconjuntos de orden 3 son:

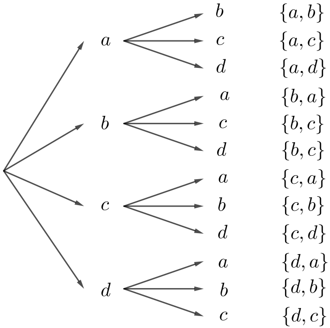
$$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,5,6\},$$
$$\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,3,6\},\{2,4,5\},\{2,4,6\},\{2,5,6\},\{3,4,5\},\{3,4,6\},\{3,5,6\},\{4,5,6\}$$

En este caso hay 20 combinaciones.

El número de combinaciones de n elementos tomados de k en k se representa por $C_{n,k}$ o ${}_nC_k$.

Por ejemplo, hemos visto que $C_{6,2} = 15$ y $C_{6,3} = 20$.

El número de combinaciones no se puede obtener aplicando directamente la regla del producto. Tratemos de representar por un diagrama en arbol las combinaciones de $\{a, b, c, d\}$ tomadas de 2 en 2:



Número de combinaciones: propiedades

Los números $C_{n,k}$ aparecen como coeficientes cuando se desarrolla $(a+b)^n$. Por eso se llaman también números combinatorios o coeficientes binomiales.

Se utiliza también la notación $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ que se lee «n sobre k» o, en inglés, «n *choose* k».

Algunas propiedades de los números combinatorios son las siguientes:

- Solamente hay un subconjunto con cero elementos, de modo que:

$$\binom{n}{0} = 1$$

- Solamente hay un subconjunto con todos los elementos:

$$\binom{n}{n} = 1$$

- Sea el conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$. Hemos visto que hay 15 combinaciones de 2 elementos:

$$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},$$
$$\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}$$

También hay 15 combinaciones de 4 elementos:

$$\{3,4,5,6\},\{2,4,5,6\},\{2,3,5,6\},\{2,3,4,6\},\{2,3,4,5\},\{1,4,5,6\},\{1,3,5,6\},\{1,3,4,6\},$$
$$\{1,3,4,5\},\{1,2,5,6\},\{1,2,4,6\},\{1,2,4,5\},\{1,2,3,6\},\{1,2,3,5\},\{1,2,3,4\}$$

Tiene que haber el mismo número porque por cada combinación de 2 elementos que elegimos hay una combinación de 4 elementos que no hemos elegido:

$$\{1,2\} \longrightarrow \{3,4,5,6\}\ ; \qquad \{1,3\} \longrightarrow \{2,4,5,6\}\ ; \qquad \ldots\ ; \qquad \{5,6\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$$

En general, debe cumplirse:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Sea de nuevo el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hemos visto que hay $\binom{6}{4} = 15$ combinaciones de 4 elementos. Las podemos clasificar en dos clases, las que contienen a 1 y las que no contienen a 1:
  - Hay $\binom{5}{3}$ combinaciones que contienen a 1.
  - Hay $\binom{5}{4}$ combinaciones que no contienen a 1.

  Se cumple entonces que:

  $$\binom{6}{4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4}$$

  o, en general:

  $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

  Esta es una fórmula de recurrencia que permite calcular las combinaciones de orden n a partir de las de orden $n - 1$.

Aunque la fórmula de recurrencia permite calcular el número de combinaciones para cualesquiera n y k veremos ahora cómo se puede obtener una fórmula para las combinaciones a partir de la regla del producto.

Dado un conjunto de n elementos, se llaman permutaciones a las distintas maneras de ordenar los elementos.

Por ejemplo, las permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ son:

$$1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,$$
$$3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321$$

El número de permutaciones puede calcularse por la regla del producto.

En el ejemplo anterior, el primer número puede elegirse de 4 maneras. Una vez elegido este número, el segundo puede elegirse de 3 maneras, una vez elegidos los dos primeros, el tercero se puede elegir de 2 maneras y, finalmente, el cuarto de 1. Es decir, el número de permutaciones es:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

En general, el número de permutaciones de n elementos se designa mediante P_n o $n!$ y es igual a:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot 2 \cdot 1$$

Sea un conjunto de n elementos. Las variaciones de estos n elementos tomados de k en k son las distintas maneras de ordenar los subconjuntos de orden k.

Por ejemplo, sea el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, las variaciones de tres elementos son:

$$\begin{gathered}123, 124, 125, 132, 134, 135, 142, 143, 145, 152, 153, 154, 213, 214, 215, 231, 234, 235, 241, 243,\\ 245, 251, 253, 254, 312, 314, 315, 321, 324, 325, 341, 342, 345, 351, 352, 354, 412, 413, 415, 421,\\ 423, 425, 431, 432, 435, 451, 452, 453, 512, 513, 514, 521, 523, 524, 531, 532, 534, 541, 542, 543\end{gathered}$$

Como puede verse hay 60 variaciones de los 5 elementos tomados de 3 en 3.

El concepto de variación es una mezcla de combinación y permutación. Si formar combinaciones consiste en elegir y formar permutaciones consiste en ordenar, formar variaciones es elegir y ordenar.

El número de variaciones de n elementos tomados de k en k se representa por $V_{n,k}$ (en algunas calculadoras lo escriben ${}_nP_r$).

El número de variacionespuede calcularse por la regla del producto:

$$V_{n,k} = n(n-1)(n-2)\ \ldots \qquad (k \text{ factores})$$

y por fin, la fórmula de las combinaciones

Para formar las variaciones de n elementos tomados de k en k, primero hay que elegir k elementos entre los n disponibles y después ordenarlos:

- El número de maneras de elegirlos es $C_{n,k}$.
- Una vez elegidos los k elementos hay $k!$ maneras de ordenarlos.

Por consiguiente:

$$V_{n,k} = C_{n,k} \cdot k! \quad \Longrightarrow \quad C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{k!}$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $(n-k)!$ la fórmula se puede escribir:

Número de combinaciones

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{V_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- En una fiesta en la que hay 85 mujeres y 90 hombres se eligen 4 personas al azar. Calcular la probabilidad de que:
  (a) Ninguna sea hombre.
  (b) Haya exactamente un hombre.
  (c) Haya más de un hombre.
  (d) Haya el mismo número de mujeres que de hombres.

- Se reparten 5 cartas de una baraja española. Calcular la probabilidad de que:
  (a) Las 5 cartas sean de oros.
  (b) Haya exactamente 3 cartas de oros.
  (c) Haya alguna carta de oros.
  (d) Obtener un trío y una pareja.
  (e) Obtener dos parejas.

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención