

Bachillerato Internacional
Matemáticas II
Problemas

Jesús García de Jalón de la Fuente

Curso 2020-2021

www.five-fingers.es

Índice

1. Cálculo de límites	4
2. Continuidad	6
3. Teorema de Bolzano	7
4. Reglas de derivación	8
5. Continuidad y derivabilidad	12
6. Recta tangente	13
7. Crecimiento y decrecimiento. Concavidad y convexidad	14
8. Teoremas de Rolle y del valor medio	16
9. Regla de l'Hôpital	18
10. Problemas de optimización	20
11. Representación de funciones	21
12. Problemas BI	25
13. Integral indefinida	28
14. Más integrales indefinidas	31
15. Integral definida	34
16. Problemas de cinemática	36
17. Distribuciones de probabilidad	38
18. Problemas de selectividad. Cálculo.	39
19. Matrices y determinantes	52
20. Problemas de selectividad: Matrices y Sistemas.	58
21. Geometría	74
22. Paralelismo y perpendicularidad	82
23. Problemas de selectividad: Geometría.	84

<i>ÍNDICE</i>	3
24. Probabilidad	96
25. Variable aleatoria	103
26. Distribuciones de probabilidad	109
27. Examen Julio 2018	112
28. Examen Julio 2018	114
29. Examen. Junio 2019	115
30. Examen Julio 2019	117
31. Examen Julio 2020	118
32. Examen Julio 2020. Coincidencias	120
33. Examen Septiembre 2020	122

1. Cálculo de límites

1. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - x + 5)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - x + 5)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2 + x - 1}{3x^2 + 4x + 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1}$$

2. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3x^3 - 2x^2 + 6x + 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + x + 14}{x^3 + x^2 + 2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 6}{x^4 - x^3 + x - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4}{x^3 + x^2}$$

3. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 10x + 12}{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 + x - 2}{x^3 + 4x^2 - 11x - 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4}{x^4 + 4x^3 + 4x^2}$$

4. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 6x^2 + 8x - 3}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} - \frac{x^2-4}{x-2} \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x - \sqrt{5}}{x^2 - 5}$$

5. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2} - x)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 2})$$

6. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^3 - x^2 + 1} - \sqrt{x^3 - x + 1})$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{2x} \right)^x$$

7. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{2x^2} \right)^{x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^x$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2}{2x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$$

8. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 x$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_{1/2} x$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_5 x$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{1/3} x$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)$

h) $\lim_{x \rightarrow 5} \log_5 x$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \log_3 x$

j) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \log_3 \frac{1}{x}$

9. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{x^2 + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{x^4 - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^3 + 2}{4x^4 + 2}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 3x^3 + 2x}{x^3 - 5x + 6}$

10. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 3}{1 + e^x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{3^x}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2^x + x}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x}{3^x}$

11. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{5 \ln x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\ln x}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\operatorname{sen} x}$

12. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arsen} x}{1 - \cos x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{artg} x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{tg} x}{3x}$

13. Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:

a) $y = \frac{2x + 1}{x - 3}$

b) $y = \frac{x - 3}{2x + 4}$

c) $y = \frac{1}{3x - 2}$

14. Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:

a) $y = \frac{2x + 1}{x^2 - 4}$

b) $y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

15. Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:

a) $y = \frac{2x^2 + 1}{x - 3}$

b) $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2}$

c) $y = \frac{x^4 + 1}{x^2 - 3}$

Soluciones:

(1) (a) 15 (b) ∞ (c) ∞ (d) $\frac{1}{5}$

(2) (a) ∞ (b) 0 (c) ∞ (d) 0

(3) (a) 2 (b) $\frac{7}{13}$ (c) $\frac{9}{17}$ (d) $\frac{5}{4}$

- (4) (a) 2 (b) 2 (c) $-\frac{15}{4}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$
 (5) (a) $20\sqrt{5}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) 0 (d) $\frac{3}{2}$
 (6) (a) $-\infty$ (b) ∞ (c) $\frac{1}{2}$ (d) ∞
 (7) (a) 0 (b) e^{-6} (c) 1 (d) e^{-4}
 (8) (a) ∞ (b) ∞ (c) $-\infty$ (d) $-\infty$ (e) $-\infty$ (f) ∞ (g) 0 (h) 1 (i) 0 (j) $-\frac{1}{2}$
 (9) (a) ∞ (b) 0 (c) 1 (d) 0 (e) $\frac{1}{4}$ (f) ∞
 (10) (a) 0 (b) ∞ (c) 0 (d) 0 (e) ∞ (f) ∞
 (11) (a) 0 (b) ∞ (c) 0 (d) 0 (e) 0 (f) $\frac{3}{2}$
 (12) (a) ∞ (b) 0 (c) ∞ (d) 0 (e) -2 (f) $\frac{2}{3}$
 (13) (a) $x = 3, y = 2$ (b) $x = -2, y = \frac{1}{2}$ (c) $x = \frac{2}{3}, y = 0$
 (14) (a) $x = -2, x = 2, y = 0$ (b) $x = -1, x = 1, y = 2$ (c) $y = 0$
 (15) (a) $x = 3, y = 2x + 6$ (b) $x = 1, x = 2, y = x + 3$ (c) $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$

2. Continuidad

1. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - ax + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

según los valores de a .

2. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$$

3. Calcular a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ b & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

4. Estudiar los puntos de discontinuidad de la función:

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}$$

5. Hallar el valor de k para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

sea continua en $x = 1$.

6. ¿Cómo hay que definir en $x = 1$ la función:

$$y = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \quad x \neq 1$$

para que sea continua en ese punto?

7. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

según los valores de a .

8. De la función $g(x)$ se sabe que es continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$ y que para $0 < x \leq 1$ es:

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$$

¿Cuánto vale $g(0)$?

9. Sea la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

El segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando $x = 2$. ¿Cómo se debería elegir el valor de $f(2)$ para que la función f sea continua en ese punto?

Soluciones:

- (1) Para $a = \frac{1}{2}$ es continua en $x = 1$. Para los demás valores hay un salto finito.
- (2) En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable. En $x = -1$ hay un infinito de la función.
- (3) $a = -9$, $b = 10$.
- (4) En $x = 3$ hay una discontinuidad evitable. En $x = -3$ hay un infinito.
- (5) $k = 4$.
- (6) La función tiene que valer $\frac{1}{2}$.
- (7) La función es continua en $x = 0$ para $a = \frac{1}{2}$.
- (8) Tiene que valer $g(0) = 1$.
- (9) Debe elegirse $f(2) = 4$.

3. Teorema de Bolzano

1. Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + 40 = 0$ tiene alguna solución en el intervalo $(-4, -3)$.
2. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto.
3. Dada la función $f(x) = x^3 + x - 5$, demostrar que existe un $c \in (1, 3)$ tal que $f(c) = 20$.
4. Comprobar que la ecuación $\sin x - 2x + 3 = 0$ tiene una solución en el intervalo $(1, 2)$.
5. Comprobar que la función $f(x) = x^5 - x^3 - x + 5$ toma el valor -1 en el intervalo $(-2, -1)$.
6. Demostrar que la función $f(x) = xe^{-x} + 3$ toma el valor $\frac{3}{2}$ en el intervalo $(-1, 0)$.
7. Demostrar que la ecuación $\sin x - \cos x + 2x = 3$ tiene una solución en el intervalo $(1, 2)$.
8. Comprobar que la función $f(x) = \cos x - x + 1$ corta al eje OX en al menos un punto, e indica un intervalo de extremos de números enteros consecutivos al cual pertenezca dicho punto.
9. Lo mismo para la función $f(x) = xe^x - x - 16$.
10. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = \cos \pi x - 2$ se cortan en un punto x_0 . Calcular la parte entera de x_0 .
11. Demostrar que la ecuación $x^3 + 3x^2 + 4x - 7 = 0$ tiene al menos una solución.
12. Comprobar que la ecuación $2x = \cos x$ tiene al menos una solución.
13. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$ se cortan en algún punto.
14. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Observamos que f está definida en $[0, 1]$ y que toma valores de signos opuestos en los extremos de este intervalo. Sin embargo, no existe ningún $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

4. Reglas de derivación

Obtener la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = (x^2 - 7x + 1)^2$

2. $y = (4x^2 + 5)^3$

3. $y = (3x^3 - 4x^2 - 5x + 1)^4$

4. $y = x^3(2x + 1)^3$

5. $y = (x - 3)^2(2x + 5)^3$

6. $y = \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 3}$

7. $y = \frac{3x + 1}{(x - 3)^2}$

8. $y = \frac{x^2 - x + 2}{(2x + 1)^3}$

9. $y = \sqrt{x^3 - x + 1}$

10. $y = \sqrt{5x^2 - 1}$

11. $y = \sqrt[3]{x}$

12. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

13. $y = \sqrt[4]{x}$

14. $y = \sqrt[4]{x^3 - 3x}$

15. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

16. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

17. $y = \frac{2x - 1}{\sqrt{x}}$

18. $y = \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

19. $y = (x^2 - 3x + 1)\sqrt{3x^2 + 2}$

20. $y = 3 \ln(x^2 - 3)$

21. $y = \ln \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

22. $y = \ln \sqrt{4x^2 + 1}$

23. $y = \frac{1}{\ln x}$

24. $y = \frac{2}{\ln(x^2 + 1)}$

25. $y = x \ln x - x$

26. $y = (x^2 - 3x) \ln(x + 1)$

27. $y = e^{2x}$

28. $y = e^{-x}$

29. $y = e^{3x^2 - 3}$

30. $y = xe^{2x}$

31. $y = (x^2 - 1)e^{x^2}$

32. $y = \frac{e^x}{x}$

33. $y = x^2 e^{-x}$

34. $y = e^{\sqrt{x}}$

35. $y = \sqrt{5e^x - 2}$

36. $y = \ln(e^x + 1)$

37. $y = \log_3 x$

38. $y = \log_2(1 - \sqrt{x})$

39. $y = 2^x$

40. $y = 2^{5x-1}$

41. $y = \sqrt{1 + \ln x}$

42. $y = (\ln x)^2$

43. $y = (1 - \ln x)^3$

44. $y = e^x \ln x$

45. $y = \operatorname{sen} 3x$

46. $y = \operatorname{tg}(\pi - x)$

47. $y = \cos^2 x$

49. $y = 3 \operatorname{sen}^2 x$

51. $y = \operatorname{sen}^2 x \cos 2x$

53. $y = e^{2 \operatorname{sen} x}$

55. $y = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

57. $y = x^x$

59. $y = \ln \operatorname{cotg} x$

61. $y = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

63. $y = \frac{1}{8} \ln \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$

65. $y = \ln \cos e^{x^2}$

67. $y = 3^{\cos x^2}$

69. $y = e^{\sqrt{x}}$

71. $y = \frac{e^{5x}}{1 + e^x}$

73. $y = 3^x$

75. $y = \ln \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

77. $y = \log \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

79. $y = \operatorname{arsen} \sqrt{x}$

81. $y = x \operatorname{artg} \frac{1}{x}$

83. $y = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x} + \operatorname{artg} x$

48. $y = 5 \cos(2\pi - x)$

50. $y = \operatorname{sen} x \cos x$

52. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

54. $y = \frac{1}{\cos x}$

56. $y = \ln \operatorname{tg} x$

58. $y = x^{\cos x}$

60. $y = \ln \frac{3 - 5x}{2x + 7}$

62. $y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

64. $y = \ln \cos e^x$

66. $y = 2^{\operatorname{tg} x}$

68. $y = 5^{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

70. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

72. $y = \frac{e^x}{x^2}$

74. $y = \ln \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$

76. $y = \log (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$

78. $y = \log \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$

80. $y = \operatorname{arcos} \frac{1}{x}$

82. $y = \sqrt{25 - x^2} + \operatorname{arsen} \frac{x}{5}$

84. $y = (1 + x)^x$

85. De la ecuación de la trayectoria $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ obtener la fórmula de la velocidad y la aceleración.

86. De la fórmula

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

obtener, derivando y haciendo $x = 1$, que

$$n2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

87. Obtener la diferencial de:

a) $y = 4x^2 - 5x + 2$

b) $y = \frac{1}{1+x^2}$

c) $y = \sqrt{2x-3}$

d) $y = x^2 e^{\sin x}$

Soluciones:

(1) $y' = 2(x^2 - 7x + 1)(2x - 7)$

(2) $y' 3(4x^2 + 5)^2(8x) =$

(3) $y' = 4(3x^3 - 4x^2 - 5x + 1)^3(9x^2 - 8x - 5)$

(4) $y' = 3x^2(2x + 1)^3 + 3(2x + 1)^2 \cdot 2x^3$

(5) $y' = 2(x - 3)(2x + 5)^3 + 3(2x + 5)^2 \cdot 2(x - 3)^2$

(6) $y' = \frac{2x(3x^2 - 2x + 3) - (6x - 2)(x^2 + 1)}{(3x^2 - 2x + 3)^2}$

(7) $y' = \frac{3(x-3)^2 - 2(x-3)(3x+1)}{(x-3)^4} = \frac{3(x-3) - 2(3x+1)}{(x-3)^3}$

(8) $y' = \frac{(2x-1)(2x+1)^3 - 3(2x+1)^2 \cdot 3(x^2-x+2)}{(2x+1)^6} = \frac{(2x-1)(2x+1) - 3 \cdot 3(x^2-x+2)}{(2x+1)^4}$

(9) $y' = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x + 1}}$

(10) $y' = \frac{10x}{2\sqrt{5x^2 - 1}}$

(11) $y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

(12) $y' = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x$

(13) $y' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

(14) $y' = \frac{1}{4}(x^3 - x)^{-\frac{3}{4}} \cdot (3x^2 - 3)$

(15) $y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

(16) $y' = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$

(17) $y' = \frac{2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-1)}{x}$

(18) $y' = \frac{(3x^2+1)\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}(x^3+x)}{x^2+1}$

(19) $y' = (2x - 3)\sqrt{3x^2 + 2} + \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 2}}(x^2 - 3x + 1)$

(20) $y' = 3 \cdot \frac{2x}{x^2+3}$

(21) $y' = \frac{2x}{x^2-4} - \frac{2x}{x^2+4}$

(22) $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{8x}{4x^2+1}$

(23) $y' = \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

(24) $y' = \frac{-\frac{2x}{x^2+1} \cdot 2}{(\ln(x^2+1))^2}$

(25) $y' = \ln x + \frac{1}{x}x - 1 = \ln x$

(26) $y' = (2x - 3)\ln(x + 1) + \frac{1}{x+1}(x^2 - 3x)$

(27) $y' = e^{2x} \cdot 2$

(28) $y' = -e^{-x}$

(29) $y' = e^{3x^2-3(6x)}$

(30) $y' = e^{2x} + e^{2x \cdot 2x}$

(31) $y' = 2xe^{x^2} + e^{x^2} \cdot 2x(x^2 - 1)$

(32) $y' = \frac{e^x x - e^x}{x^2}$

(33) $y' = 2xe^{-x} - e^{-x}x^2$

(34) $y' = e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(35) $y' = \frac{5e^x}{2\sqrt{5e^x-2}}$

(36) $y' = \frac{e^x}{e^x+1}$

(37) $y' = \frac{1}{x \ln 3}$

$$(38) y' = \frac{1}{(1+\sqrt{x}) \ln 2} \frac{-1}{2\sqrt{x}}$$

$$(39) y' = 2^x \ln 2$$

$$(40) y' = 2^{5x-1} \cdot 5 \ln 2$$

$$(41) y' = \frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$(42) y' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$(43) y' = 3(1 - \ln x)^2 \frac{-1}{x}$$

$$(44) y' = e^x \ln x + \frac{1}{x} e^x$$

$$(45) y' = 3 \cos 3x$$

$$(46) y' = \frac{1}{\cos^2(\pi-x)} (-1)$$

$$(47) y' = 2 \cos x (-\operatorname{sen} x)$$

$$(48) y' = 5(-\operatorname{sen}(2\pi - x))(-1)$$

$$(49) y' = 3 \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$(50) y' = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$(51) y' = 2 \operatorname{sen} x \cos x \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen}^2 x$$

$$(52) y' = \frac{\cos x \cos^2 x - 2 \cos x (-\operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x}{\cos^4 x}$$

$$(53) y' = e^{2 \operatorname{sen} x} 2 \cos x$$

$$(54) y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$(55) y' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$(56) y' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(57) y' = e^{x \ln x} (\ln x + 1)$$

$$(58) y' = e^{\cos x \ln x} (-\operatorname{sen} x \ln x + \frac{1}{x} \cos x)$$

$$(59) y' = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$(60) y' = \frac{-5}{3-5x} - \frac{2}{2x+7}$$

$$(61) y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1}$$

$$(62) y' = \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1}$$

$$(63) y' = \frac{1}{8} \left(\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} - \frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen} x} \right)$$

$$(64) y' = \frac{1}{\cos e^x} (-\operatorname{sen} e^x) e^x$$

$$(65) y' = \frac{1}{\cos e^{x^2}} (-\operatorname{sen} e^{x^2}) e^{x^2} 2x$$

$$(66) y' = 2^{\operatorname{tg} x} \ln 2 \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(67) y' = 3^{\cos x^2} \ln 3 (-\operatorname{sen} x^2) 2x$$

$$(68) y' = 5^{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \ln 5 \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cos x$$

$$(69) y' = e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(70) y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(71) y' = \frac{e^{5x} 5(1+e^x) + e^x e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$(72) y' = \frac{e^x x^2 - 2x e^x}{x^4}$$

$$(73) y' = 3^x \ln 3$$

$$(74) y' = \frac{-e^x}{1-e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$(75) y' = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \frac{-1}{2\sqrt{x}}$$

$$(76) y' = \frac{1}{\cos 2x \ln 10} (-\operatorname{sen} 2x) \cdot 2$$

$$(77) y' = \frac{\operatorname{sen} x}{(1-\cos x) \ln 10} - \frac{-\operatorname{sen} x}{(1+\cos x) \ln 10}$$

$$(78) y' = \frac{1}{2 \ln 10} \left(\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} - \frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen} x} \right)$$

$$(79) y' = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(80) y' = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \frac{-1}{x^2}$$

$$(81) y' = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot x$$

$$(82) y' = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}} \cdot \frac{1}{5}$$

$$(83) y' = \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$(84) y' = e^{x \ln(1+x)} \left(\ln(1+x) + \frac{1}{1+x} x \right)$$

$$(85) v_0 + at, a$$

$$(86) *$$

$$(87) (a) dy = (8x-5) dx \quad (b) dy = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx \quad (c) dy = \frac{2}{2\sqrt{2x-3}} dx \quad (d) dy = (2xe^x + e^x x^2) dx$$

5. Continuidad y derivabilidad

1. Considérese la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & x \leq 0 \\ 2x+1 & x > 0 \end{cases}$$

donde a es un número real.

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y comprobar que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

b) ¿Para qué valor del parámetro a la función es derivable en $x = 0$?

2. Determinar el valor de a para el cual la siguiente función es derivable en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq 0 \\ x^2 + a & x > 0 \end{cases}$$

3. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x < 2 \\ e^{2-x} & x \geq 2 \end{cases}$$

calcular a para que f sea continua en $x = 2$. Para el valor obtenido, ¿es derivable la función en $x = 2$?

4. Discutir según los valores de m la continuidad y la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - mx^2 & x \leq 1 \\ \frac{2}{mx} & x > 1 \end{cases}$$

5. Determinar los valores de a y b para que la siguiente función sea derivable en todos sus puntos:

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & x \leq -1 \\ \frac{a}{x} & -1 < x \leq 1 \\ \frac{x^2 + ax + 1}{x+1} & x > 1 \end{cases}$$

6. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x < 1 \\ cx & x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular a , b y c para que la función sea derivable en $x = 1$, sabiendo que $f(0) = f(4)$.

7. Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 7x + 12|$ en $x = 4$.
8. La función $f(x) = \sqrt{x}$ no es derivable en $x = 0$ y la función $g(x) = \operatorname{sen} x$, sí. ¿Es derivable en $x = 0$ la función $p(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$?
9. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \frac{3\pi}{2} < x < 3\pi \\ x - 3\pi & x \geq 3\pi \end{cases}$$

Estudiar su continuidad y su derivabilidad en $x = 3\pi$.

Soluciones: (1) $a = 2$ (2) $a = 1$ (3) $a = 0$, no (4) Continua para $m = 1$ y $m = 2$. Derivable para $m = 1$ (5) Es continua para $a = 2$ y $b = 0$. No es derivable (6) $a = -\frac{7}{4}$, $b = 1$, $c = \frac{1}{4}$ (7) no es derivable (8) sí (9) continua, no derivable

6. Recta tangente

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 2$
2. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $-x^2 + 2x + 5$ en el punto de abscisa $x = -1$
3. Calcular la ecuación de la recta tangente a $y = 3x^2 - 4x + 2$ que tenga pendiente igual a 2.
4. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x+4}$ en el punto de abscisa 0.
5. Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ que sean paralelas a la recta $y = 6x + 10$.
6. Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.
7. Hallar los puntos de tangente horizontal de la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.
8. Hallar los puntos de tangente horizontal de las siguientes curvas:
 - a) $y = 3x^2 - 2x + 1$
 - b) $y = x^3 - 3x$
9. ¿En qué puntos de $y = 1/x$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante? ¿Tiene algún punto de tangente horizontal?
10. ¿En qué punto la recta tangente a la curva $y = x^2 - 6x + 5$ es paralela a la recta $y = 2x - 3$?
11. ¿En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene la pendiente igual a 8?
12. Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{2x}{x-1}$ que son paralelas a $2x + y - 1 = 0$.
13. Calcular la ecuación de la tangente a la curva $y = \ln x$ trazada desde el origen.
14. ¿Hay algún punto de la gráfica de $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ con tangente horizontal?
15. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el origen.
16. ¿Hay algún punto de la gráfica de $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ en el que la tangente tenga menor pendiente que la bisectriz del primer cuadrante?
17. Encontrar los puntos con abscisa en $[0, 2\pi]$ para los que la tangente a la curva $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ sea horizontal.

18. Obtener la ecuación de la tangente a la curva $x^2 + y^2 = 13$ en $P(2, 3)$ de dos formas: utilizando la derivación implícita y despejando y .
19. Usar la derivación implícita para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2y^3 = 2$ en el punto de abscisa $x = 1$
20. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

se pide:

- a) Determinar el valor de k para que la función sea continua en \mathbb{R} .
- b) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- c) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto del abscisa $x = 1$.
21. Determinar las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función

$$f(x) = xe^x + \frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$$

en el punto de abscisa $x = 0$.

22. Hallar el área del triángulo formado por el eje X y las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $y = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

Soluciones:

- (1) $y = -x + 2$ (2) $y = 4$ (3) $y = 2x - 1$ (4) $y = \frac{1}{4}x + 2$ (5) $y = 6(x - \sqrt{3}), y = 6(x + \sqrt{3})$ (6) $y = -4x + 8, y = 4x + 8$
 (7) $(-1, 4), (3, -28)$ (8) (a) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (b) $(-1, 2), (1, -2)$ (9) $(-1, -1), (1, 1)$ (10) $(4, -3)$ (11) $(-2, 0), (2, 0)$ (12) $(0, 0), (2, 4)$
 (13) $y = \frac{1}{e}x$ (14) no (15) $y = x$ (16) no (17) $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}), (\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2})$ (18) $y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2)$ (19) $y - \sqrt[3]{2} = -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}(x - 1)$
 (20) (a) 0 (b) $(0, 0), (1, 0)$ (c) $y = \frac{1}{4}(x - 1)$ (21) $y = x - \frac{1}{2}, y = -x - \frac{1}{2}$ (22) $\frac{e^3 + e}{2}$

7. Crecimiento y decrecimiento. Concauidad y convexidad

1. Estudiar la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2(x + 1)$

b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 2x$

2. Estudiar la monotonía de:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$

3. Estudiar la monotonía de:

a) $f(x) = 3x^2e^x$

b) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

d) $f(x) = x \ln \sqrt{x}$

4. Determinar los máximos y mínimos de las siguientes funciones utilizando la derivada segunda:

a) $y = x^3 - 24x - 6$

b) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

c) $y = \ln(x^2+1)$

d) $y = (x^2+4)e^x$

5. Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

b) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

c) $y = \sqrt{9+x^2}$

d) $y = \frac{\ln x}{2x}$

e) $y = 4 \cos x - \cos 2x$

f) $y = \frac{x^2}{e^x}$

6. Sea $f(x) = x^2 + mx$ donde m es un parámetro real. Hallar el valor de m para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = -\frac{3}{4}$.

7. Se considera la función:

$$f(x) = ae^{x^2+bx+c}; \quad a > 0$$

Calcular los parámetros a , b y c sabiendo que la función tiene un mínimo relativo en el punto $(1, a)$ y $f(0) = 1$.

8. Determinar los valores de a , b y c para que la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en $x = -1$ y su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3.

9. Calcula para $f(x) = (x+1)e^{-x}$ los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad.

10. Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

11. Demostrar que la curva de ecuación

$$y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

no tiene ningún punto de inflexión.

12. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$$

Determinar a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

13. Calcular los valores del parámetro a , $a \neq 0$, que hacen que las tangentes a la curva de ecuación

$$y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1$$

en los puntos de inflexión sean perpendiculares.

14. Se considera la función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

donde a , b y c son parámetros reales.

- a) Averiguar los valores de a y b para los que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = 4$ son paralelas al eje X .
- b) Con los valores de a y b hallados anteriormente, obtener el valor de c para el que se cumple que el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ está en el eje X .
15. Demuestra que la curva $f(x) = x - 2 \cos x$ tiene un punto de inflexión en el interior del intervalo $[0, \pi]$ y halla la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto. Haz un dibujo en un entorno del punto hallado.
16. Hallar una función polinómica de tercer grado que tenga un extremo relativo en $(1, 1)$ y un punto de inflexión en $(0, 3)$. ¿Es $(1, 1)$ el único extremo de la función?

Soluciones:

- (1) (a) creciente en $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (0, \infty)$ (b) creciente en $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 1)$
- (2) (a) creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ (b) creciente en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- (3) (a) creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, máximo en $x = -2$ (b) decreciente en $(-\infty, -4)$, mínimo en $x = -4$ (c) creciente en $(0, \sqrt{e})$, máximo en $x = \sqrt{e}$ (d) decreciente en $(0, \frac{1}{e})$, mínimo en $x = \frac{1}{e}$
- (4) (a) máximo en $x = -2\sqrt{2}$, mínimo en $x = 2\sqrt{2}$ (b) máximo en $x = -1$, mínimo en $x = 1$ (c) mínimo en $x = 0$ (d) no hay extremos relativos
- (5) (a) cóncava en $(1, \infty)$ (b) cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, puntos de inflexión en $x = -1$ y $x = 1$ (c) cóncava en $(-\infty, \infty)$ (d) convexa en $(0, e^{\frac{3}{2}})$ (e) convexa en $[0, \frac{2\pi}{3}] \cup (\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$ (f) cóncava en $(-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$
- (6) $m = \frac{3}{2}$
- (7) $a = \frac{1}{e}, b = -2, c = 1$
- (8) $a = 3, b = -6, c = 0$
- (9) creciente en $(-\infty, 0)$, cóncava en $(1, \infty)$
- (10) máximo en $x = -1$, mínimo en $x = 1$, puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}, x = 0$ y $x = \sqrt{3}$
- (11) La derivada segunda no tiene raíces
- (12) $a = 26, b = -19$
- (13) $a = -1, a = 1$
- (14) $a = -9, b = 24, c = -18$
- (15) $y - \frac{\pi}{2} = 3(x - \frac{\pi}{2})$
- (16) $a = 1, b = 0, c = -3, d = 3$.

8. Teoremas de Rolle y del valor medio

- Estudiar si se puede aplicar el teorema de Rolle a $f(x) = 2 \operatorname{tg} x$ en el intervalo $[0, \pi]$ y, si es posible, determinar el punto en el que la derivada se anula.
- Razonar si se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ en el intervalo $[0, 4]$.
- Aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en el intervalo $[-4, 2]$ e interpretarlo geoméricamente.
- Cada una de las funciones siguientes toma el mismo valor en los extremos del intervalo $[-2, 2]$, pero no hay ningún valor $\xi \in (-2, 2)$ en el que la derivada se anule. Justificar en cada caso por qué no contradicen el teorema de Rolle:
 - $f(x) = \frac{1}{x^4}$
 - $f(x) = 2 - |x|$
- Probar que la función $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$ y calcula un punto del intervalo abierto $(-1, 1)$ cuya existencia garantiza el teorema.
- Demostrar que la ecuación $2 - x = e^x$ solamente tiene una solución.

7. Demostrar que la ecuación $x^2 = x \cos x - \sin x$ se verifica para un solo valor de x .
8. Demostrar que la curva $y = x^3 - 3x + 1$ solo corta al eje X en un punto del intervalo $(0, 1)$.
9. Demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ solo tiene una solución real.
10. Dado el intervalo $I = [0, 5]$ y dadas las funciones $f(x) = x^2 - Ax$, encontrar el valor de A para que se pueda aplicar el teorema de Rolle al intervalo I y aplicar el teorema en ese caso.
11. Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demostrar que las curvas $y = \cos x$ e $y = \sqrt{x}$ se cortan en un único punto del intervalo $(0, \pi)$.
12. Demostrar que se puede aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ en el intervalo $[0, 4]$ y halla el punto que verifica el teorema.
13. Aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = -x^2 + 2x - 8$ en el intervalo $[-3, 3]$ e interpretarlo geoméricamente.
14. Razonar si es aplicable el teorema del valor medio a la función

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

en el intervalo $[0, e]$. En caso afirmativo, hallar el valor al que se refiere el teorema.

15. Dada la función:

$$f(x) = x^x - 2^x + x - 1$$

demostrar que existen $\alpha, \beta \in (1, 2)$ tales que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\beta) = 2$. Decir que teorema se utiliza.

16. Sea $f(x) = x^3 + 2x - 1$ y sea el intervalo $I = [0, 2]$. Aplicar el teorema del valor medio a la función f en el intervalo I , hallando el punto de dicho intervalo cuya existencia asegura el teorema.
17. Dada la función

$$f(x) = x \cos \frac{\pi x}{2}$$

demostrar que existe $\xi \in (1, 2)$ tal que $f'(\xi) = -2$. Citar los teoremas que se utilicen.

Soluciones:

- (1) No se puede aplicar. La función no es continua en $x = \frac{\pi}{2}$
- (2) No se puede aplicar. La función no es derivable en $x = 2$
- (3) La función es continua y derivable y toma valores iguales en los extremos del intervalo. Existe un punto de derivada cero $\xi = -1$
- (4) (a) La función no es continua en $x = 0$ (b) La función no es derivable en $x = 0$
- (5) $\xi = \frac{1}{3}$
- (6) $F(x) = e^x + x - 1$ es continua y derivable, toma valores positivos y negativos y su derivada no se anula
- (7) La función $F(x) = x^2 - x \cos x + \sin x$ es continua y derivable y se anula en $x = 0$. Para $x \neq 0$ la derivada no se anula
- (8) Toma valores de signo contrario en los extremos y la derivada no se anula en el interior del intervalo
- (9) La función $F(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ toma valores positivos y negativos y su derivada no se anula en ningún punto
- (10) $A = 5, \xi = \frac{5}{2}$
- (11) La función $F(x) = \cos x - \sqrt{x}$ es continua y derivable en el interior del intervalo (no en $x = 0$), toma valores de signos contrario en los extremos y la derivada no se anula en el intervalo
- (12) La función es continua en el intervalo y derivable en su interior, $\xi = \sqrt{3}$
- (13) $\xi = 0$, en ese punto la tangente es paralela a la cuerda
- (14) Se puede aplicar porque es continua en el intervalo y derivable en su interior, $\xi = 1$
- (15) $f(1) = -1$ y $f(2) = 1$. La función es continua y derivable para $x > 0$. Existe α por el teorema de Bolzano y β por el teorema del valor medio
- (16) $\xi = \frac{2}{\sqrt{3}}$
- (17) Basta aplicar el teorema del valor medio teniendo en cuenta que $f(2) = -2$ y $f(1) = 0$

9. Regla de l'Hôpital

1. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \operatorname{sen} x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x - 3}$$

2. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$$

3. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^3 + x}$$

4. Calcular:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{cotg} x$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

5. Calcular:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x - 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^x$$

6. Calcular:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x - x}{2x^2 + x^4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$$

7. Calcular:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{artg} e^x - \frac{\pi}{2} \right)$$

8. Calcular:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{e^{-x}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{x} \right)^x$$

9. Calcular:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sqrt{1 - \cos x}}{\ln(1 - \cos x)}$$

10. Calcular, si existen, los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{|x|}$$

11. Calcular:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n - 8}{2^{n+1}} \right)$$

12. Calcular los valores del número real a sabiendo que:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2} = 8$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + ax)}{\operatorname{sen} 2x} = 3$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\ln(e^{ax} - 1)} = 4$$

13. Calcular los valores de $\lambda \neq 0$ para los cuales:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{\cos^2 \lambda x - 1} = -1$$

14. Calcular:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \ln(x - 2)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 1)^{\frac{1}{x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x^2 + 2}$$

Soluciones:

(1) (a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{3}{2}$

(2) (a) ∞ (b) -2 (c) 2

(3) (a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) 0

(4) (a) 1 (b) 0 (c) 1 (d) $-\frac{1}{2}$

(5) (a) $\frac{3}{2}$ (b) 1

(6) (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$

(7) (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0

(8) (a) 1 (b) e

(9) (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$

(10) (a) 1 (b) -1 a la izquierda y 1 a la derecha

(11) (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{4}{\pi}$ (c) $\frac{1}{2}$

(12) (a) $a = \pm 4$ (b) $a = 6$ (c) $a = \frac{1}{2}$

(13) $\lambda = \pm 1$

(14) (a) 0 (b) 1 (c) e (d) 1 (e) 1

10. Problemas de optimización

1. De todos los cilindros que pueden inscribirse en una esfera de 9 cm de radio, hallar la altura y el radio del que tiene mayor volumen.
2. Descomponer el número 8 en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo sea mínima.
3. ¿En qué punto de la parábola $y = 4 - x^2$ la tangente forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima?
4. Determinar el punto de la parábola $y = x^2$ que está más próximo al punto $(3, 0)$.
5. Determinar un punto de la curva de ecuación $y = xe^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.
6. Considérense las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = -e^{-x}$. Para cada recta r perpendicular al eje X , sean A y B los puntos de corte de dicha recta con las gráficas de f y g respectivamente. Determínese la recta r para el cual el segmento AB es de longitud mínima.
7. El coste del marco de una ventana rectangular es de 12,50 euros por metro lineal de los lados verticales y 8 euros por metro lineal de los lados horizontales.
 - a) Calcular razonadamente las dimensiones que debe tener el marco de una ventana de 1 m^2 de superficie para que resulte lo más económico posible.
 - b) Calcular, además, el coste de este marco.
8. De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación
$$\frac{x}{2} + y = 1$$
determinar el de área máxima.
9. Considérese el recinto limitado por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 3$. De entre los rectángulos que tienen un lado sobre la porción de recta que queda sobre la curva y los otros dos vértices sobre la parábola, determinar el que tiene área máxima.
10. Un trozo de alambre de longitud 20 se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Encontrar las longitudes de ambos trozos para que sea mínima la suma del área del rectángulo y la del cuadrado.
11. Una cartulina tiene forma rectangular con 30 cm de base y 20 cm de altura. Se quiere construir un cajón sin tapa con la forma resultante tras recortar cuatro cuadrados de lado x en cada esquina de la cartulina. Calcular x para que el volumen del cajón resultante sea máximo. Calcular dicho volumen.
12. Hallar el rectángulo de área máxima inscriptible en un triángulo isósceles de base 6 cm y altura 10 cm.
13. Hallar el rectángulo de área máxima inscriptible en un semicírculo.
14. Demostrar que de todos los rectángulos de igual perímetro, el de área máxima es el cuadrado.
15. Hallar el cilindro de máximo volumen inscriptible en un cono recto circular de radio 10 cm. y altura 20 cm.
16. Demostrar que todos los cilindros de igual superficie, el de volumen máximo es el de altura igual al diámetro.
17. Inscribir en una esfera el cilindro, de volumen máximo.
18. Idem de área máxima.

19. Demostrar que la altura del cono de volumen máximo inscrito en una esfera vale los $4/3$ del radio. (Tomar como variable dicha altura.)
20. Calcular las dimensiones de un depósito cónico invertido abierto, de 2000 litros de capacidad, de modo que requiera la mínima cantidad de superficie.
21. Sabido es que el desarrollo de la superficie lateral de un cono es un sector circular. Dado un círculo, ¿cuál es el sector correspondiente a un cono de máximo volumen?

Soluciones:

- (1) $r = 3\sqrt{6}$, $h = 6\sqrt{3}$
- (2) 2 y 6
- (3) $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$
- (4) $x = 1$
- (5) $x = 0$
- (6) $x = 0$
- (7) 80 cm y 125 cm
- (8) El que tiene un vértice en $(1, \frac{1}{2})$
- (9) El que tiene un vértice en $(1, 1)$
- (10) $\frac{180}{17}$ y $\frac{160}{17}$
- (11) $\frac{25-5\sqrt{7}}{3}$
- (12) La base es 3 cm y la altura 5 cm.
- (13) La base es $R\sqrt{2}$ y la altura $\frac{R}{\sqrt{2}}$.
- (14) La base debe ser la cuarta parte del perímetro.
- (15) El radio es $\frac{20}{3}$ cm y la altura $\frac{20}{3}$ cm.
- (16) El radio es $\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ y la altura el doble. S es el área total.
- (17) El radio es $\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ y la altura $\frac{2R}{\sqrt{3}}$
- (18) El radio es $r = R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$
- (19)
- (20) El radio es $r = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}}{\pi}}$ m.
- (21) El ángulo debe ser $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$. Aproximadamente 294° .

11. Representación de funciones

1. Estudiar y representar las siguientes funciones:

$$a) y = \frac{8}{x^2 - 4}$$

$$b) y = x + \frac{1}{x}$$

2. Representar gráficamente la función $y = x^3 - 3x$.

3. Dada la función

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

determinense los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, los puntos de inflexión y las asíntotas. Esbócese su gráfica.

4. Se considera la función:

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

- Halle sus asíntotas, máximos y mínimos.
- Representétese gráficamente la función.

5. Estudiar (dominio, crecimiento, máximos, mínimos y asíntotas) y representar gráficamente la función:

$$y = \frac{2x - 1}{x - x^2}$$

6. Representar gráficamente la función:

$$y = \frac{x^3}{1 - x^2}$$

estudiando las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

7. Calcular las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = e^{\frac{1}{x}}$ y representarla gráficamente.

8. Se considera la función:

$$y = \frac{(x + 1)^2}{e^x}$$

Hallar los extremos locales y los puntos de inflexión. Representar gráficamente la función.

9. Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$.

- Comprobar que la recta $y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$.
- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Con los datos anteriores, hacer una representación aproximada de la función.

10. Representar gráficamente las funciones:

a) $y = x \ln x$

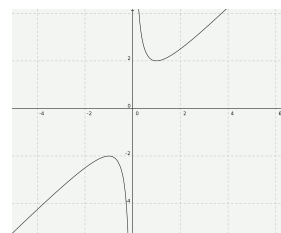
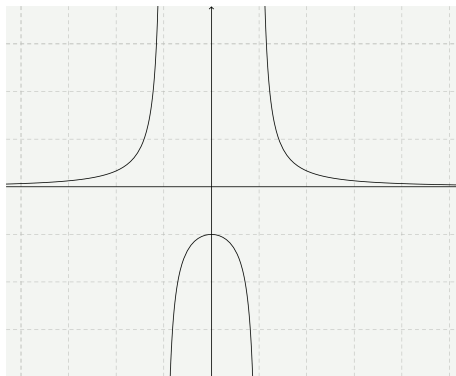
b) $y = \frac{x}{\ln x}$

11. Sea $f(x) = 2 - x + \ln x$ con $x \in (0, \infty)$. Se pide:

- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.
- Determinar los intervalos de concavidad y convexidad.
- Determinar las asíntotas y esbozar la gráfica.

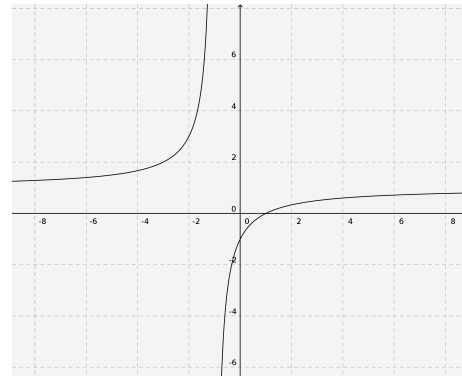
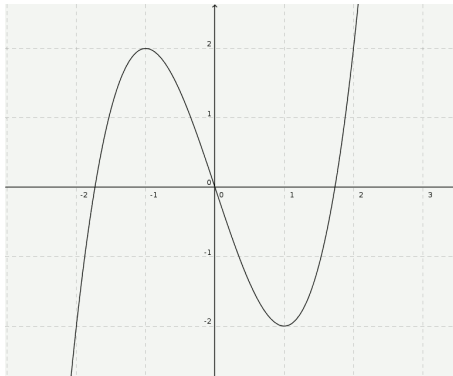
Soluciones:

(1)



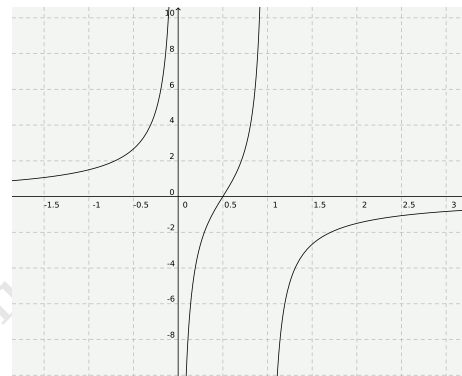
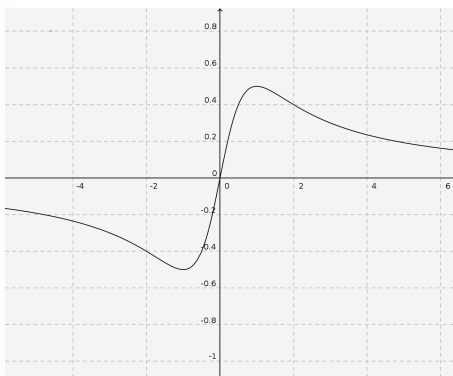
(2)

(3)



(4)

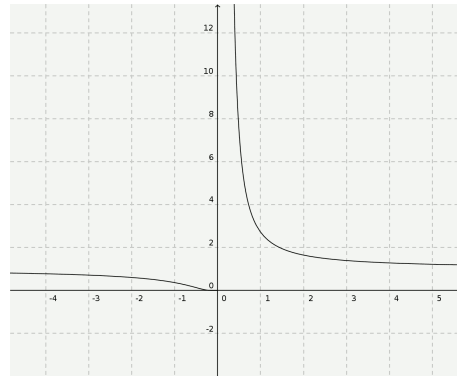
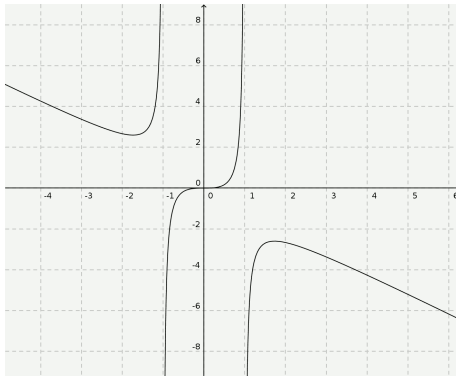
(5)



www.f...f

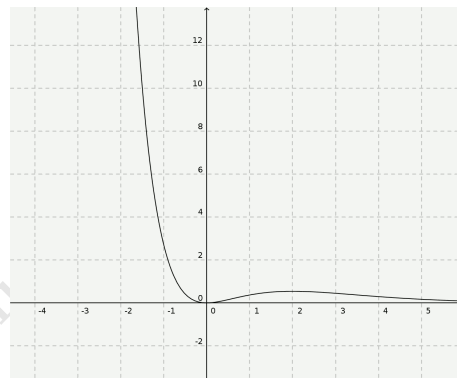
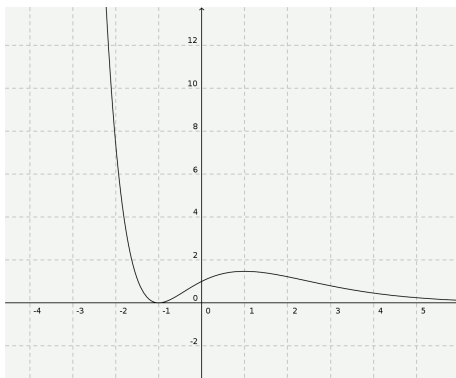
(6)

(7)

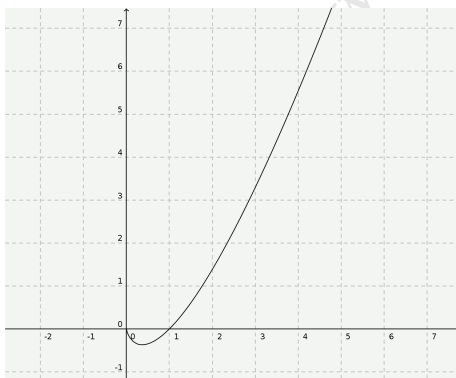


(8)

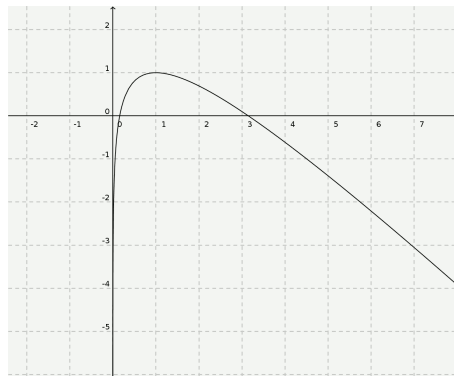
(9)



(10)



(11)



12. Problemas BI

1. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de tal forma que su posición en un tiempo t está dada por:

$$x(t) = t^3 - 7t^2 + 11t - 2,5$$

- Calcular la velocidad y aceleración en el tiempo t .
 - Calcular el tiempo en que la partícula está en reposo y cuando está acelerando y frenando. Justifica las respuestas.
 - Calcular los valores de t en que el movimiento cambia de sentido.
 - Calcular la distancia recorrida en los primeros 3 segundos.
2. La posición de una partícula t segundos después de que comience el movimiento está dada por la función:

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t$$

metros. Calcular:

- La velocidad y aceleración en función de t .
 - El momento en que la partícula está (I) en reposo (II) acelerando (III) frenando.
 - La aceleración cuando la velocidad de la partícula es cero. Interpretar la respuesta.
 - El momento en que la partícula cambia de dirección.
 - La distancia recorrida en los primeros cinco segundos.
3. Una caja sin tapa se construye cortando cuadrados en los vértices de una pieza de cartón cuadrada de 4 m de lado. Calcular el tamaño de los cuadrados de forma que el volumen de la caja sea máximo.
4. Calcular las dimensiones de una lata cilíndrica de un litro de capacidad de forma que su superficie sea mínima.
5. Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima cuya base está en el eje de abscisas y sus otros dos vértices sobre la parábola $y = 10 - x^2$.
6. Una lámina de latón de 36 cm de perímetro se enrolla para formar un cilindro.
- Calcular sus dimensiones de forma que el volumen del cilindro sea máximo.
 - La misma lámina gira alrededor de uno de sus lados para generar el cilindro. Calcular las dimensiones para que el volumen sea máximo.
7. Calcular la pendiente de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el punto $(0, 1)$.
8. Calcular la derivada del folium de Descartes $x^3 + y^3 - 9xy = 0$.
9. El punto $P(2, m)$ donde $m < 0$ se encuentra en la curva $2x^2y + 3y^2 = 16$:
- Calcular el valor de m .
 - Calcular la pendiente de la normal y la tangente en P .
10. Dada la curva $x + y = x^2 - 2xy + y^2$:
- Calcular su derivada.
 - Demostrar que $1 - \frac{dy}{dx} = \frac{2}{2x - 2y + 1}$.
 - Demostrar que $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(1 - \frac{dy}{dx}\right)^3$.

11. Una escalera de 10 m de longitud se encuentra apoyada sobre una pared. La parte superior desliza sobre la pared con una velocidad de $0,5 \text{ m s}^{-1}$. Calcular la velocidad con que desliza sobre el suelo el otro extremo de la escalera cuando se encuentra a 6 m de la pared.
12. Un depósito cónico se llena con agua a razón de $3 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$. El depósito está situado con el vértice hacia abajo. ¿A qué velocidad sube el nivel del agua cuando la profundidad es de 2 m y el radio de la superficie del agua es de 1,5 m?
13. El volumen de un cubo aumenta a $1,5 \text{ m s}^{-1}$. Calcular la velocidad con que aumenta la superficie del cubo cuando su volumen es de 81 m^3 .
14. Un avión que vuela a una altura de 8000 m pasa sobre una estación de radar. Cuando el avión se encuentra a 12000 m de la estación, el radar obtiene que la distancia está cambiando con una velocidad de 320 km h^{-1} . Calcular la velocidad del avión en ese momento.
15. Dos circunferencias concéntricas se están expandiendo. En el tiempo t el radio de la circunferencia exterior es de 9 m y está creciendo a un ritmo de $1,2 \text{ m s}^{-1}$. El radio de la circunferencia interior es de 1 m y crece a $1,5 \text{ m s}^{-1}$. Calcular la velocidad de crecimiento del área de la corona comprendida entre ambas circunferencias en el tiempo t .
16. Calcular los valores de a para los que la serie

$$a^2 + \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2} + \dots$$

es convergente y calcular su suma.

17. Dada la función:

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{x^2 - x^3}$$

calcular:

- a) Su asíntota horizontal.
 - b) Los puntos en que la curva se corta con su asíntota.
18. Sea f una función par definida en el intervalo $(-a, a)$, $a > 0$. Demostrar que si f es derivable en todo su dominio, la tangente a su gráfica en $x = 0$ es paralela al eje x .
 19. Si f es una función tal que $f(x) = [g(x)]^3$, $g(0) = -\frac{1}{2}$, $g'(0) = \frac{8}{3}$, calcular la ecuación de la tangente a $f(x)$ en $x = 0$.
 20. Calcular la menor distancia del punto $(1,5, 0)$ a la curva $y = \sqrt{x}$.
 21. Con una pieza de alambre de 80 cm se forman dos circunferencias iguales y un cuadrado. Calcular el radio de las circunferencias si queremos que la suma de las tres áreas sea mínima.
 22. Una escalera de 10 m de longitud se apoya contra una pared. En determinado momento, el extremo superior empieza a deslizar hacia abajo con una velocidad de $0,5 \text{ m s}^{-1}$. Calcular la velocidad de cambio del ángulo que forma la escalera con el suelo cuando la escalera se apoya a 8 m del suelo.
 23. Un cámara profesional se encuentra filmando un safari. Supongamos que está situado a 30 m de un árbol, siguiendo a unos pájaros que vuelan a una velocidad de 95 km h^{-1} . Los pájaros se mueven perpendicularmente a la línea que une el árbol con el cámara. ¿A qué velocidad debe girar la cámara para seguir a un pájaro:
 - a) Que está justo enfrente de la cámara.
 - b) Un segundo después.

Soluciones:

- (1) (a) $v = 3t^2 - 14t + 11$, $a = 6t - 14$ (b) Está en reposo en $t = 1$ y $t = \frac{11}{3}$, la partícula acelera cuando a y v tienen el mismo signo, o sea, para $1 < t < \frac{7}{3}$ y para $t > \frac{11}{3}$. (c) $t = 1$ y $t = \frac{11}{3}$ (d) 13 m
- (2) (a) $v = t^2 - 6t + 8$, $a = 2t - 6$ (b) (i) $t = 2$ y $t = 4$ (ii) $2 < t < 3$ y $t > 4$ (iii) $0 < t < 2$ y $3 < t < 4$ (c) $a = -2$ y $a = 2$ (d) $t = 2$ y $t = 4$ (e) 9,33 m
- (3) $\frac{2}{3}$ m
- (4) $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \simeq 5,42$, $h = \frac{100}{\sqrt[3]{250\pi}} \simeq 10,8$
- (5) $2\sqrt{\frac{10}{3}} \simeq 3,65$, $\frac{20}{3} \simeq 6,67$
- (6) (a) $\sqrt{12} \simeq 3,46$, $18 - \sqrt{12} \simeq 14,5$ (b) lo mismo
- (7) $m = 0$
- (8) $y' = \frac{3y-x^2}{y^2-3x}$
- (9) (a) $m = -4$ (b) $\frac{1}{2}$ y -2
- (10) (a) $y' = \frac{2x-2y-1}{2x-2y+1}$ (b) * (c) *
- (11) $\frac{2}{3}$ m s⁻¹
- (12) $\frac{4}{3\pi}$ m s⁻¹
- (13) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ m² s⁻¹ $\simeq 1,39$ m² s⁻¹
- (14) $\frac{320\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$ km h⁻¹ $\simeq 496$ km h⁻¹
- (15) 58,4 m² s⁻¹
- (16) Es convergente para todos los valores de a distintos de cero. La suma es $1 + a^2$
- (17) Asíntota $y = -1$, puntos de corte $(\sqrt{5}, -1)$ y $(-\sqrt{5}, -1)$
- (18) Si $f(x) = f(-x)$ entonces $f'(x) = -f'(-x)$. Por tanto $f'(0) = 0$
- (19) $y = 2x - \frac{1}{8}$
- (20) $\sqrt{1,25}$
- (21) $\frac{20}{2+\pi}$ cm
- (22) $-\frac{1}{12}$ s⁻¹
- (23) $\frac{95}{108} \simeq 0,880$ s⁻¹, $0,496$ s⁻¹

13. Integral indefinida

1. Calcular las siguientes integrales inmediatas:

$$(a) \int (4x^2 - 5x + 7) dx \quad (b) \int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx \quad (c) \int \frac{1}{2x + 7} dx$$

2. Calcular las siguientes integrales inmediatas:

$$(a) \int (x - \operatorname{sen} x) dx \quad (b) \int (x^2 + 4)x(x^2 - 1) dx \quad (c) \int (x - 1)^3 dx$$

3. Calcular las siguientes integrales inmediatas:

$$(a) \int \sqrt{3x} dx \quad (b) \int (\operatorname{sen} x + e^x) dx \quad (c) \int \sqrt[3]{x} dx$$

4. Calcular las siguientes integrales inmediatas:

$$(a) \int \operatorname{sen}(x - \pi) dx \quad (b) \int \frac{7}{\cos^2 x} dx \quad (c) \int (e^x + 3e^{-x}) dx$$

5. Calcular las siguientes integrales inmediatas:

$$(a) \int \frac{2}{x} dx \quad (b) \int \frac{dx}{x - 1} \quad (c) \int \frac{x + \sqrt{x}}{x^2} dx$$

6. Calcular las siguientes integrales inmediatas:

$$(a) \int \frac{3 dx}{1 + x^2} \quad (b) \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (c) \int \operatorname{tg}^2 x dx$$

7. Calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int \frac{dx}{x - 4} \quad (b) \int \frac{dx}{(x - 4)^2} \quad (c) \int (x - 4)^2 dx \quad (d) \int \frac{dx}{(x - 4)^3}$$

8. Calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int e^{x-4} dx \quad (b) \int e^{-2x+9} dx \quad (c) \int e^{5x} dx \quad (d) \int (3^x - x^3) dx$$

9. Resuelve las siguientes integrales de tipo arcotangente:

$$(a) \int \frac{dx}{4 + x^2} \quad (b) \int \frac{4 dx}{3 + x^2} \quad (c) \int \frac{5 dx}{4x^2 + 1} \quad (d) \int \frac{2}{1 + 9x^2} dx$$

10. Calcula las siguientes integrales del tipo arcoseno:

$$(a) \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}} \quad (b) \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} \quad (c) \int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$$

11. Calcular las siguientes integrales racionales:

$$(a) \int \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 1} dx \quad (b) \int \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 1} dx \quad (c) \int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x - 2} dx$$

12. Calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx \quad (b) \int \frac{x+2}{x^2+1} dx \quad (c) \int \frac{3x-2}{x^2-4} dx$$

13. Calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int \frac{dx}{x^2-x-2} \quad (b) \int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} dx \quad (c) \int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx$$

14. Calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1} dx \quad (b) \int \frac{1}{3x^2+6x+6} dx \quad (c) \int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

15. Calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int \frac{3x+1}{x^2+2x+2} dx \quad (b) \int \frac{x-2}{2x^2+x+2} dx \quad (c) \int \frac{x-1}{2x^2+4x+3} dx$$

16. Calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int \cos x \sin^3 x dx \quad (b) \int 2xe^{x^2} dx \quad (c) \int \frac{x dx}{(x^2+3)^5} \quad (d) \int \frac{1}{x} \ln^3 x dx$$

17. Calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int x^4 e^{x^5} dx \quad (b) \int x \sin x^2 dx \quad (c) \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

18. Calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+5}} \quad (b) \int \sin x \cos x dx \quad (c) \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$$

19. Calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int \sqrt{(x+3)^5} dx \quad (b) \int \frac{3x}{2-6x^2} dx \quad (c) \int \sqrt{x^2-2x}(x-1) dx$$

20. Calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int \operatorname{tg} x \sec^2 x dx \quad (b) \int \frac{(1+\ln x)^2}{x} dx \quad (c) \int \sqrt{(1+\cos x)^3} \sin x dx$$

21. Integrar por partes:

$$(a) \int x^2 e^{3x} dx \quad (b) \int \frac{x}{e^x} dx \quad (c) \int \operatorname{artg} x dx$$

22. Integrar por partes:

$$(a) \int x \cos x dx \quad (b) \int x^3 \sin x dx \quad (c) \int x \ln x dx$$

23. Integrar por partes:

$$(a) \int \arcsin x dx \quad (b) \int x \cos 3x dx \quad (c) \int x^5 e^{-x^3} dx$$

24. Calcular $\int \cos(\ln x) dx$ integrando por partes dos veces.

25. Calcular:

$$(a) \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (b) \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (c) \int \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x^2} dx \quad (d) \int \frac{\operatorname{artg} x}{1+x^2} dx$$

26. Calcular:

$$(a) \int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (b) \int \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (c) \int (\ln x)^2 dx$$

27. Calcular:

$$(a) \int x\sqrt{x+1} dx \quad (b) \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \quad (c) \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$$

28. Calcular:

$$(a) \int \operatorname{sen}^2 x dx \quad (b) \int \cos^2 x dx \quad (c) \int e^x \cos x dx$$

29. Encuentra la primitiva de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1+3x}$$

que se anula para $x = 0$.

30. Halla la función $F(x)$ para la que

$$F'(x) = \frac{1}{x^2}; \quad F(1) = 2$$

31. De todas las primitivas de la función $y = 4x - 6$, ¿cuál de ellas toma el valor 4 para $x = 1$?

Soluciones (no se ha puesto la constante de integración):

- (1) (a) $\frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x$ (b) $\frac{5\sqrt[5]{x^4}}{4}$ (c) $\frac{1}{2} \ln |2x + 7|$
 (2) (a) $\frac{x^2}{2} + \cos x$ (b) $\frac{x^6}{6} - \frac{3x^4}{4} - 2x^2$ (c) $\frac{(x-1)^4}{4}$
 (3) (a) $\frac{2x\sqrt{3x}}{3}$ (b) $-\cos x + e^x$ (c) $\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4}$
 (4) (a) $-\cos(x + \pi)$ (b) $7 \operatorname{tg} x$ (c) $e^x - 3e^{-x}$
 (5) (a) $2 \ln |x|$ (b) $\ln |x - 1|$ (c) $\ln x - \frac{2}{\sqrt{x}}$
 (6) (a) $3 \operatorname{artg} x$ (b) $\operatorname{arsen} x$ (c) $-x + \operatorname{tg} x$
 (7) (a) $\ln |x - 4|$ (b) $\frac{-1}{x-4}$ (c) $\frac{(x-4)^3}{3}$ (d) $\frac{-1}{2(x-4)^2}$
 (8) (a) e^{x-4} (b) $-\frac{1}{2}e^{-2x+9}$ (c) $\frac{1}{5}e^{5x}$ (d) $\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x^4}{4}$
 (9) (a) $\frac{1}{2} \operatorname{artg} \frac{x}{2}$ (b) $\frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{x}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{5}{2} \operatorname{artg} (2x)$ (d) $\frac{2}{3} \operatorname{artg} (3x)$
 (10) (a) $\frac{1}{2} \operatorname{arsen} x$ (b) $\operatorname{arsen} \frac{x}{2}$ (c) $\operatorname{arsen} e^x$
 (11) (a) $\frac{x^2}{2} - 6x + 10 \ln |x + 1|$ (b) $\frac{x^2}{2} + x + 3 \ln |x + 1|$ (c) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - 3 \ln |x - 2|$
 (12) (a) $\ln |x^2 + 3x - 10|$ (b) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + 2 \operatorname{artg} x$ (c) $2 \ln(x + 2) + \ln(x - 2)$
 (13) (a) $\frac{1}{3} \ln(x - 2) - \frac{1}{3} \ln(x + 1)$ (b) $-\frac{1}{2} \ln |x + 2| + 2 \ln |x - 1| + \frac{1}{2} \ln |x|$ (c) $\frac{1}{4} \ln |x + 1| - \frac{1}{4} \ln |x - 1| - \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}$
 (14) (a) $2 \ln x - \frac{3}{x+1}$ (b) $\frac{1}{3} \operatorname{artg} (x + 1)$ (c) $\operatorname{artg} (x + 2)$
 (15) (a) $\frac{3}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) - 2 \operatorname{artg} (x + 1)$ (b) $\frac{1}{4} \ln(2x^2 + x + 2) - \frac{3\sqrt{15}}{10} \operatorname{artg} \frac{4x+1}{\sqrt{15}}$ (c) $\frac{1}{4} \ln(2x^2 + 4x + 3) - \sqrt{2} \operatorname{artg} (x + 1)\sqrt{2}$
 (16) (a) $\frac{\operatorname{sen}^4 x}{4}$ (b) e^{x^2} (c) $\frac{-1}{8(x^2+3)^4}$ (d) $\frac{(\ln x)^4}{4}$
 (17) (a) $\frac{e^{x^5}}{5}$ (b) $-\frac{\cos x^2}{2}$ (c) $\operatorname{arsen} \frac{x}{3}$
 (18) (a) $\sqrt{x^2 + 5}$ (b) $-\frac{\cos^2 x}{2}$ (c) $\frac{1}{4 \cos^4 x}$

- (19) (a) $\frac{2\sqrt{(x+3)^7}}{7}$ (b) $-\frac{1}{4} \ln |2 - 6x^2|$ (c) $\frac{\sqrt{(x^2-2x)^3}}{3}$
- (20) (a) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}$ (b) $\frac{(1+\ln x)^3}{3}$ (c) $-2\sqrt{\frac{1+\cos x}{5}}$
- (21) (a) $\frac{1}{27}(9x^2 - 6x + 2)e^{3x}$ (b) $-\frac{1+x}{e^x}$ (c) $x \operatorname{artg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
- (22) (a) $\cos x + x \operatorname{sen} x$ (b) $-x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x - 6 \operatorname{sen} x + 6x \cos x$ (c) $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$
- (23) (a) $x \operatorname{arccos} x - \sqrt{1-x^2}$ (b) $\frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{3}x \operatorname{sen} 3x$ (c) $-\frac{1}{3}(1+x^3)e^{-x^3}$
- (24) $\frac{1}{2}x \cos \ln x + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} \ln x$
- (25) (a) $\frac{1}{2}(\ln x)^2$ (b) $\ln(\ln x)$ (c) $\cos \frac{1}{x}$ (d) $\frac{1}{2}(\operatorname{artg} x)^2$
- (26) (a) $-2 \cos \sqrt{x}$ (b) $\sqrt{x} \ln x - 2\sqrt{x}$ (c) $x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$
- (27) (a) $\frac{2}{15}\sqrt{(x+1)^3}(x-2)$ (b) $\frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-2)$ (c) $-\ln|x-1| + 2\sqrt{x} + \ln|-1+\sqrt{x}| - \ln|1+\sqrt{x}|$
- (28) (a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x$ (b) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x$ (c) $\frac{1}{2}e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$
- (29) $\frac{1}{3} \ln |1+3x|$
- (30) $\frac{-1}{x} + 3$
- (31) $2x^2 - 6x - 7$

14. Más integrales indefinidas

Calcular las siguientes integrales:

1. $\int \frac{1+x^2}{\sqrt{x}} dx$
2. $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} dx$
3. $\int \cos 3x dx$
4. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx$
5. $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$
(multiplicar y dividir por $1-\cos x$)
6. $\int (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{sec} 2x)^2 dx$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$
8. $\int \frac{1}{9+x^2} dx$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{25-16x^2}} dx$
10. $\int \frac{1}{4x^2+9} dx$
11. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-9}} dx$
12. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$
(hacer $t = x^3$)
13. $\int \frac{x}{x^4+3} dx$
(hacer $t = x^2$)
14. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx$
15. $\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1} dx$
16. $\int \frac{\operatorname{sec} x \operatorname{tg} x}{9+4\operatorname{sec}^2 x} dx$
17. $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}} dx$
18. $\int \frac{1}{x^2+10x+30} dx$
19. $\int \frac{1}{\sqrt{20+8x-x^2}} dx$
20. $\int \frac{1}{2x^2+2x+5} dx$
21. $\int \frac{1}{2\sqrt{28-12x-x^2}} dx$
22. $\int \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$
23. $\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}} dx$
24. $\int (x-2)^{\frac{3}{2}} dx$
25. $\int \frac{1}{(x-1)^3} dx$
26. $\int \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx$
27. $\int \sqrt{3x-1} dx$
28. $\int \sqrt{2-3x} dx$
29. $\int x\sqrt[3]{2x^2+3} dx$
30. $\int \sqrt{1+x^4} x^3 dx$

- | | | |
|---|---|---|
| 31. $\int \frac{x}{(x^2+4)^3} dx$ | 32. $\int (x-1)^2 x dx$ | 33. $\int (x^2-x)^4(2x-1) dx$ |
| 34. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}} dx$ | 35. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$ | 36. $\int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}} dx$ |
| 37. $\int \sec 3x \operatorname{tg} 3x dx$ | 38. $\int \operatorname{cosec}^2 2x dx$ | 39. $\int x \sec^2 x^2 dx$ |
| 40. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ | 41. $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x dx$ | 42. $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} dx$ |
| 43. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-4 \operatorname{tg}^2 x}} dx$ | 44. $\int 3^{2x} dx$ | 45. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ |
| 46. $\int (e^x+1)^3 e^x dx$ | 47. $\int \frac{dx}{e^x+1}$ | 48. $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$ |
| 49. $\int e^{-x^2+2x} dx$ | 50. $\int (e^x+1)^2 dx$ | 51. $\int (e^x-x^e) dx$ |
| 52. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx$ | 53. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$ | 54. $\int x^3 5^{x^4+1} dx$ |
| 55. $\int x^3 e^{x^2} dx$ | 56. $\int \ln(x^2+2) dx$ | 57. $\int \ln x dx$ |
| 58. $\int x \operatorname{sen} x dx$ | 59. $\int x^2 \ln x dx$ | 60. $\int \operatorname{arsen} x dx$ |
| 61. $\int \operatorname{artg} x dx$ | 62. $\int \sec^3 x dx$ | 63. $\int \arccos 2x dx$ |
| 64. $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$ | 65. $\int x^3 e^{2x} dx$ | 66. $\int x \cos x dx$ |
| 67. $\int x \sec^2 3x dx$ | 68. $\int x \operatorname{artg} x dx$ | 69. $\int x^2 e^{-3x} dx$ |
| 70. $\int x^3 \operatorname{sen} x dx$ | 71. $\int x \operatorname{arsen} x^2 dx$ | 72. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ |
| 73. $\int \frac{1}{x^2-9} dx$ | 74. $\int \frac{x}{x^2-3x-4} dx$ | 75. $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} dx$ |
| 76. $\int \frac{x}{(x-2)^2} dx$ | 77. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$ | 78. $\int \frac{3}{x^2+2x+6} dx$ |
| 79. $\int \frac{x-1}{x^2+4x+5} dx$ | 80. $\int \frac{4x-1}{2x^2+3x+2} dx$ | |

Soluciones: (no se ha puesto la constante de integración):

- (1) $2\sqrt{x}(1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}x^2)$ (2) $\frac{x^2}{x+1}$ (3) $\frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x$ (4) $\sec x$ (5) $-\cotg x + \operatorname{cosec} x$ (6) $\operatorname{tg} 2x + \sec 2x - x$ (7) $\operatorname{arsen} \frac{x}{2}$ (8) $\frac{1}{3} \operatorname{artg} \frac{x}{3}$
 (9) $\frac{1}{4} \operatorname{arsen} \frac{4x}{5}$ (10) $\frac{1}{6} \operatorname{artg} \frac{2x}{3}$ (11) $\frac{1}{3} \operatorname{artg} \sqrt{4x^2-9}$ (12) $\frac{1}{3} \operatorname{arsen} x^3$ (13) $\frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{artg} \frac{x^2\sqrt{3}}{3}$ (14) $\frac{1}{2}$ (15) $\frac{3x^2}{2} - 4x + 4 \operatorname{artg} x$
 (16) $\frac{1}{6} \operatorname{artg} \frac{2 \sec x}{3}$ (17) $-\sqrt{1-x^2} + 3 \operatorname{arsen} x$ (18) $\frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{artg} \frac{(x+5)\sqrt{5}}{5}$ (19) $\operatorname{arsen} \frac{x-4}{6}$ (20) $\frac{1}{3} \operatorname{artg} \frac{2x+1}{3}$ (21) $\operatorname{arsen} \frac{x+6}{8}$
 (22) $\operatorname{arsen} \frac{x+2}{3}$ (23) $-\sqrt{4x-x^2} + 4 \operatorname{arsen} \frac{x-2}{2}$ (24) $\frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}}$ (25) $-\frac{1}{2(x-1)^2}$ (26) $2\sqrt{x+3}$ (27) $\frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}$ (28) $-\frac{2}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}}$
 (29) $\frac{3}{16}(2x^2+3)^{\frac{4}{3}}$ (30) $\frac{1}{6}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}$ (31) $-\frac{1}{4(x^2+4)^2}$ (32) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ (33) $\frac{1}{5}(x^2-x)^5$ (34) $\sqrt{x^2+2x-4}$ (35) $\frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3$
 (36) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}}$ (37) $\frac{1}{3} \sec 3x$ (38) $-\frac{1}{2} \cotg 2x$ (39) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x^2$ (40) $\operatorname{tg} x - x$ (41) $-\frac{1}{5} \cos^5 x$ (42) $\operatorname{arsen} \frac{x\sqrt{5}}{5}$ (43) $\frac{1}{2} \operatorname{arsen}(2 \operatorname{tg} x)$
 (44) $\frac{1}{2 \ln 3} 3^{2x}$ (45) $-e^{\frac{1}{x}}$ (46) $\frac{(e^x+1)^4}{4}$ (47) $x - \ln(e^x+1)$ (48) $-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x^2}}$ (49) $-\frac{1}{2}e^{-x^2+2}$ (50) $\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x$ (51) $e^x - \frac{x^{e+1}}{e+1}$
 (52) $\frac{1}{2} \ln(e^{2x}+3)$ (53) $\operatorname{arsen} e^x$ (54) $\frac{1}{4 \ln 5} 5^{x^4+1}$ (55) $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)$ (56) $x(\ln(x^2+2)-2) + 2\sqrt{2} \operatorname{artg} \frac{x}{\sqrt{2}}$ (57) $x(\ln x - 1)$

- (58) $-x \cos x + \sin x$ (59) $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9}x^3$ (60) $x \operatorname{arsen} x + \sqrt{1-x^2}$ (61) $x \operatorname{artg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ (62) $\frac{1}{2} (\sec x \operatorname{tg} x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x|)$
 (63) $x \arccos 2x - \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2}$ (64) $-x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x)$ (65) $\frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}x e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x}$ (66) $x \sin x + \cos x$
 (67) $\frac{1}{3}x \operatorname{tg} 3x - \frac{1}{9} \ln |\sec x|$ (68) $\frac{1}{2}(x^2+1) \operatorname{artg} x - \frac{1}{2}x$ (69) $-\frac{1}{3}e^{-3x} (x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9})$ (70) $-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x$
 (71) $\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arsen} x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2}$ (72) $-\frac{\ln x+1}{x}$ (73) $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right|$ (74) $\frac{1}{5} \ln |(x+1)(x-4)^4|$ (75) $x + \ln |(x+2)(x-4)^4|$ (76) $\ln |x-2| - \frac{2}{x-2}$
 (77) $\ln(x^2+x+1)$ (78) $\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{artg} \frac{x+1}{\sqrt{5}}$ (79) $\frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) - 3 \operatorname{artg}(x+2)$ (80) $\ln(2x^2+3x+2) - \frac{8}{\sqrt{7}} \operatorname{artg} \frac{4x+3}{\sqrt{7}}$

81. Demostrar la siguiente fórmula de reducción:

$$\int \operatorname{sen}^m x \, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \operatorname{sen}^{m-2} x \, dx$$

82. Aplicar la fórmula anterior para calcular la integral de $\operatorname{sen}^2 x$.

83. Calcular la integral de $\operatorname{sen}^3 x$.

84. $\int \sec x \, dx$ Con el cambio $t = \operatorname{sen} x$ $dt = \cos x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \sec x \, dx &= \int \frac{1}{\cos x} \, dx \\ &= \int \frac{1}{\cos x} \frac{1}{\cos x} \, dt = \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dt \\ &= \int \frac{1}{1-t^2} \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} \, dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \ln |1+t| - \frac{1}{2} \ln |1-t| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \right| + C \\ &= \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C \end{aligned}$$

85. $\int \sec^3 x \, dx$ Por partes $u = \sec x$; $dv = \sec^2 x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x \, dx &= \int \sec x \sec^2 x \, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x} \, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \frac{1}{\cos^3 x} \, dx + \int \frac{1}{\cos x} \, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \, dx + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \\ 2 \int \sec^3 x \, dx &= \sec x \operatorname{tg} x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C \\ \int \sec^3 x \, dx &= \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C \end{aligned}$$

86. $\int \sqrt{1-x^2} dx$ Con el cambio $x = \operatorname{sen} t$; $dx = \operatorname{cos} t dt$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \operatorname{cos} t dt \\ &= \int \operatorname{cos} t \operatorname{cos} t dt = \int \operatorname{cos}^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} (t + \operatorname{sen} t \operatorname{cos} t) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{arsen} x + x\sqrt{1-x^2} \right) + C \end{aligned}$$

87. $\int \sqrt{x^2-1} dx$ Con el cambio $x = \operatorname{sec} t$; $dx = \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{cos}^2 t} dt$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2-1} dx &= \int \sqrt{\operatorname{sec}^2 t - 1} \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{cos}^2 t} dt \\ &= \int \operatorname{tg} t \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{cos}^2 t} dt = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{cos} t} \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{cos}^2 t} dt \\ &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{cos}^3 t} dt = \int \frac{1-\operatorname{cos}^2 t}{\operatorname{cos}^3 t} dt \\ &= \int \operatorname{sec}^3 t dt - \int \operatorname{sec} t dt \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sec} t \operatorname{tg} t + \frac{1}{2} \ln |\operatorname{sec} t + \operatorname{tg} t| - \ln |\operatorname{sec} t + \operatorname{tg} t| + C \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sec} t \operatorname{tg} t - \frac{1}{2} \ln |\operatorname{sec} t + \operatorname{tg} t| + C \\ &= \frac{1}{2} x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + C \end{aligned}$$

15. Integral definida

1. Se define el valor medio de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ como el cociente

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Calcular el valor medio de la función $f(x) = x \cdot \sqrt{4-x^2}$ en el intervalo $[0, 2]$.

2. Sea f una función definida por

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}; \quad 1 \leq x \leq 3$$

Hallar c tal que

$$f(c) = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx$$

3. Sea

$$F(x) = \int_0^{2x} e^{t^2} dt$$

Hallar el valor de $F'(0)$.

4. Determinar el valor máximo y mínimo de la función

$$F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$$

en el intervalo $[2, 10]$.

5. Determinar la siguiente integral definida:

$$\int_{-4}^2 |x^2 - 4| \, dx$$

6. Hallar el área encerrada por las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$.
7. Dadas las funciones $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = x^2 - x - 2$, encontrar el valor del área comprendida entre ellas.
8. Dadas la parábola $y = 6x - x^2$ y la recta $y = 2x$, determinar el área limitada por ambas.
9. Determinar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
10. Calcular el área de la región limitada por la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y el eje OX .
11. Averiguar el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
12. Calcular el área limitada por la gráfica de la función $y = \cos x$ entre $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$ y el eje OX .
13. Calcular el área encerrada por la curva $y = x \sin x$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.
14. Hallar el área limitada por la curva $y = \ln x$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.
15. Hallar el área del recinto limitado por los ejes de coordenadas, la recta $y = 2$ y la curva cuya ecuación es $y = \sqrt{x - 2}$.
16. Hallar el área del recinto plano delimitado por las rectas $y = x$ e $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.
17. Determinar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 2x$ y $g(x) = x^2$ cuando solo se consideran valores positivos de x .
18. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = |x|$ e $y = x^2 - 1$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
19. Representar la región del plano limitada por $y = \ln x$, su recta tangente en $x = e$ y el eje OX . Calcular su área.
20. Encontrar el área del recinto limitado por las curvas $y = |x - 2|$ e $y = x^2 - 4x - 2$.
21. Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = 2x - x^2$ e $y = -x + 2$.
22. La curva $y = \frac{4}{x+4}$, los ejes de coordenadas y la recta $x = 4$ limitan una superficie S . (a) Calcular el área de S (b) Determinar el volumen de la figura generada por S al dar una vuelta completa alrededor del eje OX .
23. Considérese la figura plana encerrada entre las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ cuando $0 \leq x \leq 1$. Hallar el volumen que genera esta figura cuando da una vuelta completa alrededor del eje OX .
24. Se considera la función

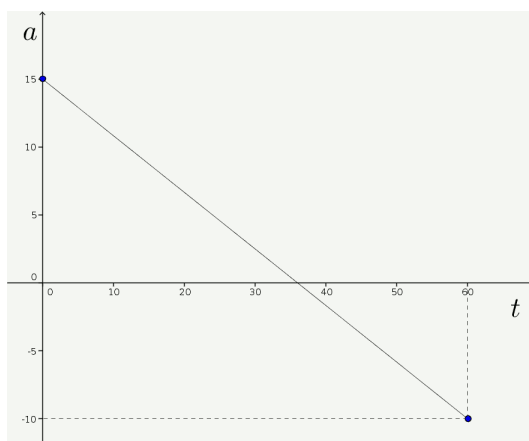
$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$$

Calcular a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(-2, -6)$ y admita en dicho punto una tangente horizontal. Calcular también el área limitada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$.

25. Si la integral definida de una función en el intervalo $[1, 2]$ verifica que $\int_1^2 f(x) dx \geq 1$, ¿es cierto que para todos los puntos $x \in [1, 2]$ se tiene que $f(x) \geq 0$?
26. Sabiendo que la función f es derivable en todos sus puntos y su derivada verifica $f'(x) \geq 1$ para cualquier valor de x y que $f(0) = 3$, demuestra que $f(2) \geq 5$.
27. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en $(0, 0)$ y que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{4}$, calcula a , b , c y d .
28. Hallar el valor de a sabiendo que el área limitada por la gráfica de la parábola $y = x^2 - ax$ y el eje OX es de $\frac{32}{3}$.
29. Dos constructores tienen una parcela que han de repartirse en partes iguales para la construcción de un centro comercial. La parcela es la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$. Si deciden dividir la parcela mediante una recta $y = a$ paralela a la recta $y = 1$, hallar el valor de a .
30. Determinar el valor del parámetro a para que el área limitada por las gráficas de $f(x) = \sqrt{ax}$ y $g(x) = \frac{x^2}{a}$, en el primer cuadrante, sea igual a 3 unidades cuadradas.
31. Sea $y = x^2 + a$. Calcular el valor de a para que las tangentes cuya abscisa tenga valor absoluto 1, pasen por el origen de coordenadas. Hallar el área del recinto limitado por la curva y las dos tangentes.
32. Se considera la función $y = xe^{ax}$, donde a es una constante no nula. Calcular el valor de a si sabemos que el área limitada por la curva $y = xe^{ax}$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$, y $x = 1$ es igual a $\frac{1}{a^2}$.
33. Determina el valor de a sabiendo que el área comprendida entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ es 36.
34. Con ayuda de la calculadora representar y calcular el área encerrada por las curvas $y = \cos 2x$ e $y = \ln(x - 1)$.
35. Lo mismo para las curvas $y = \cos \frac{x}{2}$ e $y = \cos 2x$ para $x \in [0, 2\pi]$.
36. Lo mismo para las curvas $y = 2 \operatorname{sen} x$ e $y = e^{\frac{x}{2}-4} + 1$.
37. Representar el área encerrada por la curva $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, su tangente en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$ y el eje OX .

Soluciones: (1) $\frac{4}{3}$ (2) $c = \sqrt{3}$ (3) 2 (4) $F(2) = 2 \ln 2 - 1$, $F(10) = 10 \ln 10 - 9$ (máximo y mínimo absoluto) (5) $\frac{64}{3}$ (6) $\frac{1}{6}$ (7) $\frac{125}{24}$ (8) $\frac{32}{3}$ (9) $\frac{3}{2}$ (10) $\frac{4}{3}$ (11) $\ln 2$ (12) $2 - \sqrt{2}$ (13) 1 (14) 1 (15) $\frac{20}{3}$ (16) $\frac{7}{6}$ (17) $\frac{8}{3}$ (18) $\frac{7}{3}$ (19) $\frac{e}{2} - 1$ (20) 27 (21) $\frac{1}{30}\pi$ (22) $4 \ln 2, 2\pi$ (23) $\frac{9}{70}\pi$ (24) 2, 2, 5 + 8 $\ln 2$ (25) no (26) Aplicar el teorema del valor medio del cálculo diferencial (27) -1, 0, 3, 0 (28) 4 y -4 (29) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ (30) 3 (31) 1, $\frac{2}{3}$ (32) 1 (33) 5 y -7 (34) 0,668 (35) 3,63 (36) 10,1 (37) 1,30

16. Problemas de cinemática



- Un avión vuela horizontalmente en línea recta durante un minuto, comenzando en el tiempo $t = 0$, donde t se mide en segundos. La aceleración a , medida en m s^{-2} está dada en la gráfica.
 - Calcular una expresión de la aceleración en función del tiempo.
 - Suponiendo que en $t = 0$ la velocidad es de 125 m s^{-1} , calcular la velocidad máxima durante el minuto que sigue.
 - Suponiendo que el avión supera la barrera del sonido a 295 m s^{-1} , calcular durante cuánto tiempo el avión vuela a una velocidad superior a esta velocidad.
- Un paracaidista se lanza desde un globo a 2000 m de altura. Su velocidad en m s^{-1} , t segundos después de saltar, está dada por $v = 50(1 - e^{-0,2t})$.
 - Calcular la aceleración 10 segundos después de saltar.
 - ¿A qué altura se encuentra en ese momento?
- Un cuerpo se mueve en un líquido de forma que su aceleración en m s^{-2} es:

$$a = -\frac{v^2}{200} - 32$$

donde v es la velocidad del cuerpo en m s^{-1} . La velocidad inicial del cuerpo es de 40 m s^{-1} .

- Demostrar que el tiempo que necesita el cuerpo para frenarse hasta la velocidad V está dado por:

$$T = 200 \int_V^{40} \frac{1}{v^2 + 80^2} dv$$

- Explicar por qué la aceleración puede expresarse como

$$a = v \frac{dv}{ds}$$

y, a partir de este resultado, hallar una integral similar a la del apartado a) para la distancia S recorrida por el cuerpo hasta que se frena a la velocidad V .

- Calcular la distancia recorrida y el tiempo empleado hasta que el cuerpo queda momentáneamente en reposo.
- La aceleración en m s^{-2} de una partícula que se mueve en línea recta en el tiempo $t \geq 0$ está dada por la función:

$$a = -\frac{1}{2}v$$

Cuando $t = 0$ la velocidad es de 40 m s^{-1} . Calcular una expresión de v en función de t .

- La aceleración de un cuerpo en función del desplazamiento s es:

$$a = \frac{2s}{s^2 + 1}$$

- Hallar una fórmula de la velocidad en función del desplazamiento sabiendo que cuando $s = 1 \text{ m}$, $v = 2 \text{ m s}^{-1}$.
- A partir de esa fórmula calcular la velocidad cuando el cuerpo ha recorrido 5 metros .

Soluciones:

- (a) $a = -\frac{5}{12}t + 15$ (b) 139 m s^{-1} (c) $43,8 \text{ s}$
- (a) $1,35 \text{ m s}^{-2}$ (b) 1810 m
- (a) * (b) $S = 100 \int_V^{40} \frac{2v dv}{v^2 + 80^2}$ (c) $1,16 \text{ s}$, $22,3 \text{ m}$
- $v = 40e^{-\frac{1}{2}t}$
- (a) $v^2 = 4 + 2 \ln \frac{s^2+1}{2}$ (b) $3,02 \text{ m s}^{-1}$

17. Distribuciones de probabilidad

1. Una variable aleatoria continua tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(6x^2 + 4x + 1) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

Hallar la media y la varianza de X .

2. Una variable aleatoria continua tiene como función de densidad de probabilidad la siguiente:

$$p(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ k & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

- (a) Demostrar que $k = \frac{2}{3}$.
 (b) Calcular $E(x)$ y $\text{Var}(x)$.
 (c) Demostrar que la mediana es $\frac{1}{36}$ mayor que la media.
 (d) Hallar el valor de la constante a para que $p(X > E(X) - a) = 0,95$.

3. Sea

$$p(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- (a) Comprobar que $k = \frac{3}{8}$.
 (b) Calcular $E(X)$ y la mediana de X .

4. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X se define como:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{27}{8x^2} & \text{si } 3 < x \leq r \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- (a) Calcular el valor de r .
 (b) Calcular la media y la desviación típica.

5. Una variable aleatoria continua tiene una función de densidad de probabilidad dada por:

$$p(x) = \begin{cases} k(2x - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- (a) Hallar el valor de k .
 (b) Calcular $p(0,25 < X < 0,5)$.

6. La función de probabilidad de una variable aleatoria continua es:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x(4 - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcular el valor de la mediana de X .

7. La función de probabilidad de una variable aleatoria continua X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{4 - x^2} & \text{para } \frac{-2}{3} \leq x \leq \sqrt{2} \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

- (a) Hallar el valor exacto de la constante c .
 (b) Dibujar aproximadamente la gráfica de $f(x)$ y, a partir de ella, obtener la moda de la distribución.
 (c) Hallar el valor exacto de $E(x)$.

8. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi(4+x^2)} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Hallar la moda de X y el valor exacto de $E(x)$.

9. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Hallar la probabilidad de que X se encuentre entre la media y la moda.

Soluciones:

- (1) $\frac{2}{3}, \frac{14}{225}$
 (2) (a) * (b) $E(X) = \frac{11}{9}$, $\text{Var}(X) = \frac{37}{162}$ (c) La mediana es $\frac{5}{4}$ (d) 0,835
 (3) (a) * (b) $E(X) = \frac{3}{2}$, mediana = $\sqrt[3]{4}$
 (4) (a) $r = \frac{54}{11}$ (b) $E(X) = \frac{9}{8} + \frac{27}{8} \ln \frac{18}{11}$, $\sigma \simeq 1,10$
 (5) (a) $k = \frac{3}{4}$ (b) $p \simeq 0,113$
 (6) mediana $\simeq 1,08$
 (7) (a) $c = \frac{4}{\ln(6+4\sqrt{2})}$ (b) La moda es $\sqrt{2}$ (c) $c \ln \frac{4}{3}$
 (8) moda = 0, media = $\frac{2}{\pi} \ln 2$
 (9) $p \simeq 0,117$

18. Problemas de selectividad. Cálculo.

1. Se considera la ecuación $x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1$. Utilizando el teorema de Bolzano de los valores intermedios:

- a) Probar que si $\lambda > 2$, la ecuación admite alguna solución menor que 1.
 b) Probar que si $\lambda < 2$, la ecuación admite alguna solución mayor que 1.

2. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Contestar razonadamente a las siguientes preguntas:

- a) ¿Es continua en el punto $x = 0$?
 b) ¿Es derivable en el punto $x = 0$?
 c) ¿Alcanza algún extremo?

3. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Estúdiense si $f(x)$ es continua en $x = 2$.
- b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 3$.
- c) Calcúlense sus asíntotas oblicuas.

4. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

- a) Estudiar su continuidad y derivabilidad.
- b) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, 1)$.

5. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

- a) Encontrar los puntos de discontinuidad de f . Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.
- b) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical.

6. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos(3x)}{\ln \cos(2x)}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}.$$

7. Sea la función:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide:

- a) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto.
- b) Dibujar la gráfica de f en el intervalo dado.
- c) Calcular $\int_0^{\pi/3} f(x) dx$

8. Calcular la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

9. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

- a) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.
- b) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$

10. Sabiendo que la función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x-4)^2(x^2 - 8x + 7)$$

- a) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
- b) Hallar los máximos y mínimos relativos de f .
- c) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f ? Justificar razonadamente la respuesta.

11. Sea $f(x)$ una función derivable en $(0, 1)$ y continua en $[0, 1]$ tal que $f(1) = 0$ y

$$\int_0^1 2xf'(x) dx = 1$$

Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x) dx$.

12. Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:

- Tiene un máximo relativo en $x = 1$.
- Tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0, 1)$.
- Se verifica:

$$\int_0^1 p(x) dx = \frac{5}{4}.$$

13. Dada la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

se pide:

- Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.
 - Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado anterior con los dos ejes coordenados.
 - Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.
14. a) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.
- Demostrar que la sucesión $a_n = \frac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.
 - Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(a_{n+1} - a_n)$.

15. Calcular:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 2x}$$

16. a) Calcular los valores de a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x .

- Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.
17. Dada la función $f(x) = xe^{2x}$ se pide:
- Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.
 - Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \leq x \leq 1$.

18. a) Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

- b) Determinar la función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0) = 4$.
19. Sea g una función continua y derivable de la que se conoce la siguiente información:
- $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, mientras $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$.
 - $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.
 - $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 3$.

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

- Analizar razonadamente la posible existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.
 - Dibujar de manera sistemática la gráfica de $g(x)$.
 - Si $G(x) = \int_0^x g(t) dt$, encontrar un valor x_0 tal que $G'(x_0) = 0$.
20. Estudiar los siguientes límites:
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x^2)$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

21. Obtener los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x(\ln x)^2$$

siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x .

22. a) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1,$$

el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

- b) Hallar el valor de c para el cual el área calculada en el apartado anterior es mínima.
23. Dada la función

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide:

- Dibujar la gráfica de f estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.
 - Calcular $\int_0^1 f(x) dx$.
24. a) Calcular $\int x^3 \ln x dx$
- b) Utilizar el cambio de variable $x = e^t - e^{-t}$ para calcular:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$$

Indicación: Para deshacer el cambio de variable, utilizar:

$$t = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

25. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)^{x+1}$$

según los valores del parámetro α .

26. Calcular la integral

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$$

27. Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5)$$

obtener:

- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.
- La función f sabiendo que $f(0) = 0$.

28. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si } 1+ax > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

se pide:

- Hallar los valores de los parámetros a y b para los que la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.
- Para $a = b = 1$ estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

29. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

- Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.
- Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.
- Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.
- Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$.

30. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

se pide:

- Determinar el valor de k para que la función sea continua en \mathbb{R} .
- Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto del abscisa $x = 1$.

31. Hallar :

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} \right]^{25} \qquad b) \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x^3)^{\frac{2}{x^3}}$$

32. Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$, se pide:

- a) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.
 b) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

33. Dadas las funciones:

$$y = 9 - x^2 ; \quad y = 2x + 1$$

se pide:

- a) Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.
 b) Calcular el área de dicho recinto acotado.
 c) Hallar el volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX .

34. Obtener el valor de a para que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = 4$$

35. Hallar:

a) $\int_{14}^{16} (x - 15)^8 dx$

b) $\int_9^{11} (x - 10)^{19}(x - 9) dx$

36. Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

se pide:

- a) Estudiar y obtener las asíntotas.
 b) Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.
 c) Representar gráficamente la función.

37. Calcular los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{artg} x)^{a/x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x}$

38. Calcular:

a) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

b) $\int_0^\pi x \cos x dx$

39. a) Calcular la integral $\int_1^3 x\sqrt{4 + 5x^2} dx$

b) Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12 - 3x^2}$.

40. a) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

b) Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ solo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m . Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

41. Dada la función:

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

- a) Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para ese valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.
- b) Obtener las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.
- c) Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.

42. Hallar el valor de λ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

sea continua. Razonar la respuesta.

43. Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a , b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- ◊ El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -\frac{1}{3}$, $x = -1$.
- ◊ La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0; P(0))$ sea $y = x + 3$.

44. Sabiendo que la función $F(x)$ tiene derivada $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[2; 5]$ y, además, que:

$$F(2) = 1; F(3) = 2; F(4) = 6; F(5) = 3; f(3) = 3 \text{ y } f(4) = -1;$$

hallar:

- ◊ $\int_2^5 f(x) dx$
- ◊ $\int_2^3 (5f(x) - 7) dx$
- ◊ $\int_2^4 f(x)F(x) dx$

45. Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

$$(a) \int_0^{\pi} e^{2x} \cos x dx$$

$$(b) \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^2 2x} dx$$

46. Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}}; \quad g(x) = (\ln x)^x; \quad h(x) = \operatorname{sen}(\pi - x)$$

se pide:

- (a) Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (b) Calcular $g'(e)$.
- (c) Calcular, en el intervalo $[0, 2\pi]$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y los extremos relativos de $h(x)$.
47. Hallar a , b y c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.
48. Dada la función $f(x) = \cos^2 x$, se pide:

- (a) Calcular los extremos relativos de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$.
- (b) Calcular los puntos de inflexión de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$.
- (c) Hallar la primitiva $g(x)$ de $f(x)$ tal que $g(\pi/4) = 0$.

49. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$$

se pide:

(a) Hallar $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, y $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

(b) Hallar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

50. (a) Sea $f(x)$ una función continua tal que

$$\int_1^8 f(u) du = 3$$

hallar:

$$\int_1^2 f(x^3)x^2 dx$$

(b) Hallar el dominio de definición y las abscisas de los puntos donde la función:

$$F(x) = -\sqrt{(x-3)(9-x^2)^2}$$

alcanza sus máximos y mínimos relativos.

51. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & x > 3 \end{cases}$$

se pide:

- Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A ?
- Hallar los puntos en que $f'(x) = 0$.
- Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.

52. Dada la función $f(x) = x^2 \sin x$, se pide:

- Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.
- Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.
- Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Recuerdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

53. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+3x}{x-1} & x < 0 \\ a & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

se pide:

- Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.
 - Para ese valor de a estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.
 - Hallar si las tiene las asíntotas de la gráfica de $f(x)$.
54. (a) Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ y el eje OX entre las abscisas $x = \frac{1}{e}$ y $x = e$.

- b) Calcular el área de dicho recinto.
 c) Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX .

55. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$$

se pide:

- a) Hallar las asíntotas de su gráfica.
 b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

56. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x-3}{x^2+9} dx$

b) $\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3} dx$

57. Dada la función $f(x) = 2 \cos^2 x$, se pide:

- a) Determinar los extremos absolutos en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
 b) Determinar los puntos de inflexión de $f(x)$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

c) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

58. Dada la función:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$$

se pide:

- a) Hallar las asíntotas de su gráfica.
 b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.
 c) Esbozar la gráfica de la función.

59. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

se pide:

- (a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$.

(b) Calcular $\int_0^1 xf(x) dx$.

60. Dada la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, se pide:

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

- b) Esbozar la gráfica de $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

61. a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar:

$$f(-2), \quad f'(-2), \quad f''(-2)$$

- b) determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $G(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX .

62. Calcular justificadamente:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \operatorname{sen}(3x)}{x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)}$$

63. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} a - \ln(1 - x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo \mathbb{R} .

c) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

64. Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4}$$

se pide:

a) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de f .

c) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$

65. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5 \operatorname{sen} x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ x e^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.

b) Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a .

c) Calcular la integral:

$$\int_1^{\ln 5} f(x) dx$$

66. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

se pide:

(a) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

(b) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

(c) Calcular $\int f(x) dx$

67. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x e^x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Estudiar la continuidad de f .
 (b) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.
 (c) Calcular $\int_1^3 f(x) dx$

68. (a) Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.
 (b) Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

69. (a) Calcular la integral definida

$$\int_1^4 (1-x)e^{-x} dx$$

- (b) Calcular los límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^{-x}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{-x}$$

70. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} a + x \ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo \mathbb{R} .
 (b) Calcular $f'(x)$ donde sea posible.
 (c) Calcular $\int_{-1}^0 f(x) dx$

71. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{1-x} & x < 0 \\ xe^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

donde \ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

- (a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ y calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 (b) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en $x = 2$.
 (c) Calcular $\int_{-1}^1 f(x) dx$

72. (a) Determine el polinomio $f(x)$ sabiendo que $f'''(x) = 12$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y además verifica: $f(1) = 3$, $f'(1) = 1$ y $f''(1) = 4$.
 (b) Determine el polinomio $g(x)$, sabiendo que $g''(x) = 6$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y que además verifica:

$$\int_0^1 g(x) dx = 5; \quad \int_0^2 g(x) dx = 14$$

73. Estudie la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ y en $x = 1$ de:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ |x \ln x| & x > 0 \end{cases}$$

donde \ln denota el logaritmo neperiano.

Soluciones:

- (1) Sea $F(x) = x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1$ continua, $F(1) = \lambda - 2$. Para $\lambda > 2$, $F(1) > 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$ significa que $F(x)$ tiene un cero menor que 1. Razonar igual para $\lambda < 2$.
- (2) (a) sí (b) sí (c) no
- (3) (a) no (b) $y - \frac{21}{5} = \frac{59}{25}(x - 3)$ (c) $y = 3x - 8$ en $+\infty$
- (4) (a) Continua y no derivable en $x = 2$ (b) $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 3)$
- (5) (a) evitable en $x = 1$, infinito en $x = -1$ (b) $x = -1$
- (6) (a) $\frac{9}{4}$ (b) $\frac{1}{8}$
- (7) (a) máximos en $-\frac{5\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{3}$, mínimos en $-\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$ (b) (c) $\ln \frac{3}{2}$
- (8) La base es $\frac{8}{3}$ y la altura $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (triángulo equilátero)
- (9) (a) (b) $y = 1$ máximo en $(-\frac{1}{2}, 0)$, mínimo en $(\frac{1}{2}, 0)$ (c) $\frac{2 - \ln 5}{2}$
- (10) (a) creciente en $(-\infty, 1) \cup (7, \infty)$ decreciente en $(1, 7)$ (b) máximo en $x = 1$, mínimo en $x = 7$ (c) sí
- (11) $-\frac{1}{2}$
- (12) $a = -\frac{1}{5}$, $b = 0$, $c = \frac{3}{5}$, $d = 1$
- (13) (a) $y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$ (b) $(2a, 0)$ y $(0, \frac{2}{a})$ (c) $a = 1$
- (14) (a) $\mathbb{R} - \{1\}$, siempre creciente, $y = 2$, $x = -1$ (b) si es creciente para todo x también lo es para todo n (c) 2
- (15) $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$
- (16) (a) $a = 1$, $b = -2$ (b) derivable en $x = \pi$, no derivable en $x = 0$
- (17) (a) dominio \mathbb{R} , asíntota $y = 0$ en $-\infty$, decreciente en $(-\infty, -\frac{1}{2})$, creciente en $(-\frac{1}{2}, \infty)$, convexa en $(-\infty, -1)$, cóncava en $(-1, \infty)$, mínimo en $x = -\frac{1}{2}$, punto de inflexión en $x = -1$ (b) $\frac{1}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4e^2}$
- (18) (a) mínimo en $x = -1$, máximo en $x = 1$, puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$ (b) $3x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + 4$
- (19) (a) no hay asíntota vertical, $y = 3$ es asíntota horizontal en $+\infty$, puede haber una asíntota oblicua en $-\infty$ (b) (c) $x = -1$
- (20) (a) ∞ (b) 0
- (21) máximo en $x = e^{-2}$, mínimo en $x = 1$, punto de inflexión en $x = e^{-1}$
- (22) (a) $S = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$ (b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$
- (23) (a) siempre decreciente, puntos de inflexión en $x = 1$ (tangente horizontal) y $x = 3$ (b) $3 - 6e^{-1}$
- (24) (a) $\frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$ (b) $\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} + C$
- (25) El límite es 1 si $\alpha \neq 0$ y $e^{\frac{1}{4}}$ si $\alpha = 0$
- (26) $F(x) = 2 - (2 + 2x + x^2)e^{-x}$
- (27) (a) creciente en $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$, decreciente en $(1, 5)$ (b) máximo en $x = 1$, mínimo en $x = 5$, punto de inflexión en $x = 4$ (c) $f(x) = \frac{1}{4}(x - 1)^4(x - 5) - \frac{(x - 3)^5}{20} + \frac{6}{5}$
- (28) (a) $a = b = -1$, $a = b = 1$ (b) $f'(0) = \frac{1}{3}$
- (29) (a) creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, \infty)$ (b) $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $y = 1$ (d) $3 - \frac{\pi}{4}$
- (30) (a) 0 (b) $(0, 0)$, $(1, 0)$ (c) $y = \frac{1}{4}(x - 1)$
- (31) (a) -1 (b) e^2
- (32) (a) $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$ (b) decreciente en $(-\infty, -5)$, creciente en $(1, \infty)$
- (33) (a) (b) 36 (c) $\frac{1296\pi}{5}$
- (34) $-\frac{1}{3} \ln 2$
- (35) (a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{2}{21}$
- (36) (a) $x = -5$, $y = 3x - 10$ (b) convexa en $(\infty, -5)$, cóncava en $(-5, \infty)$
- (37) (a) e^a (b) $\frac{2}{5}$
- (38) (a) $2 - \sqrt{3}$ (b) -2
- (39) (a) $\frac{316}{15}$ (b) $0, \sqrt{12}$
- (40) (a) 1
- (41) (a) 3, -1 (b) $x = 0$, $y = x$
- (42) 6
- (43) 2, 1 y 3

- (44) (a) 2 (b) -2 (c) $\frac{35}{2}$
- (45) (a) $-\frac{2}{5}(1 + e^{2\pi})$ (b) $\frac{\pi}{4}$
- (46) (a) $(3, \infty)$, 3 (b) 1 (c) $0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
- (47) $-9, 15, -5$
- (48) (a) $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$ (b) $\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$ (c) $\frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) - \frac{\pi+2}{8}$
- (49) (a) 0, $-\infty$ (b) 1, -1
- (50) (a) 1 (b) $x \geq 3, x = 3$
- (51) (a) $A = 8$, no (b) $x = 5$ (c) máximo en $(5, 20)$, mínimo en $(8, 12)$
- (52) (a) no (b) $-4 + \pi^2$ (c) $y = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi)$
- (53) (a) 0, no (b) $y = 2x + 5, y = 1$
- (54) (a) (b) $2 - \frac{2}{e}$ (c) $\pi(e - \frac{5}{e})$
- (55) (a) $x = 3, y = x + 6$ (b) $y - 8 = 28(x - 2)$
- (56) (a) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) - \operatorname{artg} \frac{x}{3} + C$ (b) $\frac{21}{8} - \ln 2$
- (57) (a) $x = 0, x = \pm\frac{\pi}{2}$ (b) $x = \pm\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{2}$
- (58) (a) $x = 4, x = -1, y = 0$ (b) siempre decreciente, $x = 2$
- (59) (a) $y = x$ (b) $1 - \frac{\pi}{4}$
- (60) (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f = \infty$ (b) siempre decreciente, asíntotas $x = 0, y = 1$
- (61) (a) $-16, 16, 0$ (b) $\frac{256}{5}$
- (62) (a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$
- (63) (a) 0, $-\infty$ (b) $a = 0$ (c) no derivable en $x = 0$
- (64) (a) $\mathbb{R} - \{-1, -4\}, x = -1, x = -4, y = 1$ (b) máximo en $x = -2$, mínimo en $x = 2$ (c) $1 + 9 \ln 2 - 4 \ln 5$
- (65) (a) $a = 3$ (b) no (c) $8 \ln 5 - 8$
- (66) (a) $x = -1, x = 2, y = 0$ (b) $y = \frac{3}{4}x$ (c) $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 4) + \frac{(\ln(x+1))^2}{2} + C$
- (67) (a) continua para todo x (b) no es derivable en $x = 0, f'(x)$ es igual a $\frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$ si $x < 0$ y $e^x(x + 1)$ si $x > 0$
(c) $2 + 2e^3$
- (68) (a) siempre creciente (b) Tiene un cero en $(-1, 0)$, no tiene ninguno más porque es continua y creciente
- (69) (a) $4e^{-4} - e^{-1}$ (b) 0, ∞
- (70) (a) $a = 0$ (b) $f'(x) = 1 + \ln x$ si $x > 0$ y $f'(x) = e^x(x^2 + 2x)$ si $x < 0$. No es derivable en $x = 0$ (c) $2 - \frac{5}{e}$
- (71) (a) continua en $\mathbb{R}, 0$ (b) $y = e^{-2}(4 - x)$ (c) $\frac{(\ln 2)^2}{2} + 1 - \frac{2}{e}$
- (72) (a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ (b) $g(x) = 3x^2 - 2x + 5$
- (73) Continua en \mathbb{R} , derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

19. Matrices y determinantes

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

hallar las matrices: (a) $2A + 3B$ (b) AB (c) BA (d) A^2

2. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

calcular: a) AB b) BA c) BB^t d) AB^2

3. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

comprobar que $(BA)^t = A^t B^t$.

4. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$, ¿qué relación deben guardar las constantes a y b para que se verifique que $A^2 = A$?

5. ¿Qué matrices conmutan con la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

6. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3X + Y = A \\ X - 2Y = 2B \end{cases}$$

7. Calcular la matriz $A^{250} + A^{20}$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

a) Calcular A^2 y A^3 .

b) Hallar una regla general para calcular A^n .

9. Se consideran las matrices:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determinar x e y para que $MN = NM$.

b) Calcular M^{1995} y M^{1996} .

10. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

calcular B^3 y A^3 . (Sugerencia $A = B + I$).

11. Probar que $A^n = 2^{n-1}A$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
12. Hallar la inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ aplicando la definición.
13. (a) Calcular todas las matrices diagonales de orden 2 que coinciden con su inversa.
(b) Si A es una de estas matrices, calcular su cuadrado.
14. Si A y B son matrices diagonales de orden 2 demostrar que $AB = BA$.
15. (a) Demostrar que la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ verifica una ecuación del tipo $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, determinando α y β (I denota la matriz identidad).
(b) Utilizar el apartado anterior para calcular la inversa de A .
16. Calcular los siguientes determinantes de orden 2:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -25 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

17. Calcular los siguientes determinantes de orden 3:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

18. Calcular los siguientes determinantes de orden 4:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 6 & 9 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

19. Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b-1 & c & d+1 \\ a+1 & b & c-1 & d \\ a & b+1 & c & d-1 \\ a-1 & b & c+1 & d \end{vmatrix}$$

20. Sean A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2x & 2 & 3+x \\ 2 & x & 5 \\ 10 & 6 & x+5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 4 \\ 5 & 6 & x \end{bmatrix}$$

sabiendo que el determinante de B vale 7, utilizar las propiedades de los determinantes para calcular el valor del determinante de A .

21. Sea A una matriz cuadrada de orden 2 que verifica $2A^2 = A$. Calcular razonadamente los posibles valores del determinante de A .

22. Si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

tiene determinante 1, averiguar el valor del determinante de las siguientes matrices:

$$B = \begin{bmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{bmatrix}$$

23. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

24. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

25. Calcular el rango de:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

26. Calcular la inversa de las siguientes matrices:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

27. Calcular los parámetros a , b y c para los cuales:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ -1 & 1 \\ -3 & c \end{bmatrix} \quad \text{rango}(B) = 1$$

28. Encontrar, en función de los valores del parámetro a , el rango de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{bmatrix}$$

29. Estudiar según los valores de x , el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{bmatrix}$$

30. Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

31. a) Demostrar que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & b-1 \\ 1 & a & -1 \end{bmatrix}$, tiene inversa si y solo si los parámetros a y b

son no nulos.

b) Calcula A^{-1} cuando $a = b = 1$.

32. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- a) Discutir en función de los valores que pueda tomar el parámetro real k , si la matriz AB tiene inversa.
 b) Discutir, en función de los valores de k , si la matriz BA tiene inversa.
33. a) Demostrar que $A^2 - A - 2I = 0$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- b) Calcular A^{-1} utilizando el apartado anterior o de cualquier otra forma
34. Calcular la matriz A sabiendo que se verifica la igualdad:

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

35. Encontrar la matriz A que verifique la ecuación $AX + B = C$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

36. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hallar la matriz X dada por $AXA^{-1} = B$.

37. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Determinar si A y B son invertibles y, si lo son, calcula la matriz inversa.
 b) Resolver la ecuación matricial $BA - A^2 = AB - X$.
38. Resolver la ecuación matricial $B(2A + I) = AXA + B$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

39. Hallar las matrices simétricas de orden 2 tales que $A^2 = A$.

40. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

41. Calcular A^n siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

42. Se considera la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Probar que $B = I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

43. a) Averiguar para qué valores del parámetro t , la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{bmatrix}$ no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $t = 2$.

44. Sin desarrollar el determinante probar la igualdad:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^2$$

45. Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

46. Hallar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a^2 - 1 & a \\ 1 & 2a^2 - 2 & 2a - 1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

47. Calcular el valor del parámetro k para que el rango de la matriz A sea igual a 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

48. a) Averiguar para qué valores del parámetro k admite inversa la matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{bmatrix}$$

b) Hallar la inversa de A para $k = 1$.

49. a) Hallar los valores del parámetro p para los que la matriz A tiene inversa:

$$A = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{bmatrix}$$

b) Halla la inversa para $p = 2$.

Soluciones:

(1) (a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -9 & 23 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -4 & 23 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -14 & 18 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$

(2) (a) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 10 \\ -8 & -20 & -2 \end{pmatrix}$ (b) no existe (c) $\begin{pmatrix} 40 & -24 & 0 \\ -24 & 20 & -14 \\ 0 & -14 & 35 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -14 & 42 & -42 \\ -10 & 30 & -30 \end{pmatrix}$

(3) *

(4) $a = 0$ y $b = 1$ ó $a = 1$ y $b = 0$

(5) $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$

(6) $X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $Y = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 17 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$

(7) $A^{250} + A^{20} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 270 & 2 \end{pmatrix}$

(8) (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(9) (a) $x = 0$, $y = 1$ (b) $M^{1995} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^{1996} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(11) *

(12) $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(14) El producto de matrices diagonales es una matriz diagonal

(15) *

(16) (a) -7 (b) -4 (c) 0 (d) 0

(17) (a) -15 (b) -28 (c) 60 (d) 0

(18) (a) 39 (b) -14

(19) 0

(20) 14

(21) 0 y $\frac{1}{4}$

(22) $|B| = 36$, $|C| = -1$

(23) $x = -1$

(24) rango $A = 3$, rango $B = 3$

(25) rango $C = 3$, rango $D = 4$

(26) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

(27) $a = -1$, $b = -2$, $c = 3$

(28) Para $a \neq \pm 1$ el rango es 3. Para $a = -1$ es 2 y para $a = 1$ es igual a 1(29) Para $x \neq \pm 1$ el rango es 4. Para $x = \pm 1$ es 3(30) Para $a = -4$ el rango es 2. Para los demás valores es 3

(31) (a) El determinante es igual a $-ab$ (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(32) (a) AB no tiene inversa para ningún valor de k (b) BA tiene inversa para cualquier valor de k

(33) (a) * (b) $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(34) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$(35) X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(36) X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(37) (a) \text{ No existe la inversa de } B. \text{ La inversa de } A \text{ es } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} (b) X = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 3 \\ -18 & 12 & -8 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(38) X = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -6 & -18 & 12 \\ 4 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(39) \text{ Si } A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, \text{ debe cumplirse que } x + z = 1 \text{ y } xz - y^2 = 0. \text{ también son soluciones } A = I \text{ y } A = 0$$

$$(40) x = 0, x = \frac{1}{2}$$

$$(41) A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(42) *$$

$$(43) (a) \text{ No tiene inversa para } t = 1 \text{ y } t = 3 (b) \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(44) *$$

$$(45) 81 - 54x^2 + 24x^3 - 3x^4$$

$$(46) \text{ Para } \neq \pm 1 \text{ el rango es } 3. \text{ Para } a = 1 \text{ el rango es } 1 \text{ y para } a = -1 \text{ el rango es } 2$$

$$(47) k = -1$$

$$(48) (a) \text{ Todos menos } -\frac{5}{4} (b) \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(49) (a) \text{ Todos menos } 0, -1 \text{ y } 1 (b) \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

20. Problemas de selectividad: Matrices y Sistemas.

1. Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.
2. Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

- (a) Discutir el sistema según los valores de a .
- (b) Resolver el sistema para $a = -1$.
- (c) Resolver el sistema para $a = 2$.

4. Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real λ :

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

- (a) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ .
 (b) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.
 (c) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

5. Para cada valor del parámetro real a se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + az = -2 ; \quad \pi_2 : x + ay + z = -1 ; \quad \pi_3 : ax + y + z = 3$$

Se pide:

- (a) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.
 (b) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

6. Sea A una matriz real cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n . Se pide:

- (a) Calcular A^{-1} en términos de A .
 (b) Expresar A^n en términos de A e I , para cualquier número natural n .
 (c) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

7. Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$$

Se pide:

- (a) Resolverlo para $m = 1$.
 (b) Discutirlo para los distintos valores de m .

8. Comprobar aplicando las propiedades de los determinantes la propiedad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

9. Encontrar un número real $\lambda \neq 0$ y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula) tales que:

$$B \cdot \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

10. Se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 9 \\ mx + 2y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Se pide:

- (a) Determinar los valores de m para que el sistema tenga solución única.
 (b) Resolverlo para $m = 1$.
11. (a) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la igualdad $A + B = AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:

$$(I - B)^{-1} = -B^{-1}A$$

donde I denota la matriz identidad.

- (b) Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

hallar la matriz B para la cual se verifica $A + B = AB$.

12. Dado el sistema:

$$\begin{cases} (1-a)x - 2y + 4z = 0 \\ x - (1+a)y + z = 0 \\ -x + ay - z = 0 \end{cases}$$

- (a) Estudiar la compatibilidad según los valores del parámetro real a .
 (b) Resolver el sistema lineal anterior en el caso en que sea compatible indeterminado.
13. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se pide:

- (a) Hallar A^{-1} .
 (b) Hallar la matriz X tal que:

$$AXA^t = B$$

donde A^t significa la traspuesta de A .

14. (a) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

escribir una tercera ecuación de la forma $ax + by = c$, distinta de las anteriores, de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

- (b) Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ distinta de las dos anteriores, de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante sea compatible indeterminado.

15. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Determinar la matriz inversa de B .
 (b) Determinar una matriz X tal que $A = BX$.

16. (a) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A ?
 (b) Calcular un número k tal que:

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17. (a) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

- (b) Resolverlo para $\lambda = 2$.

18. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m-1)x + y + z = 3 \\ mx + (m-1)y + 3z = 2m-1 \\ x + 2y + (m-2)z = 4 \end{cases}$$

- (a) Discutirlo según los valores de m .
 (b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

19. (a) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$$

- (b) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación

$$5x + y + \alpha z = \beta$$

el sistema resultante sea compatible determinado.

20. Hallar una matriz X tal que

$$A^{-1}XA = B$$

$$\text{siendo } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

21. Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos:

$$\begin{cases} \pi_1 : x + z = \lambda \\ \pi_2 : 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2 \\ \pi_3 : 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda \end{cases}$$

22. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
 (b) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

(c) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$.

23. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Hallar A^{10} .

(b) Hallar la matriz inversa de B .

(c) En el caso particular $k = 0$, hallar B^{10} .

24. Dado el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k + 1)x + y = 0 \end{cases}$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en esos casos.

25. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, encontrar todas las matrices:

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tales que $AP = PA$.

26. Dada la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a .

(b) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M . Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

27. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Comprobar que $\det A^2 = (\det A)^2$ y que $\det (A + I) = \det A + \det I$.

(b) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que $\det M^2 = (\det M)^2$?. Justifica la respuesta.

(c) Encontrar todas las matrices cuadradas M de orden 2 que verifican $\det (M+I) = \det M + \det I$.

28. (a) Hallar todas las matrices $A = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ distintas de $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tales que $A^2 = A$.

(b) Para una cualquiera de las matrices calculadas en el apartado anterior calcular:

$$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{10}$$

29. (a) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

- (b) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

30. Estudiar el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{bmatrix}$$

según los valores del parámetro m .

31. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$.

32. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontrar las condiciones que deben cumplir a , b y c para que se verifique $AB = BA$.
 (b) Para $a = b = c = 1$ calcular A^{10} .

33. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k .
 (b) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

34. Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $XA^2 + BA = A^2$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

35. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax + y + bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.
 (b) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

36. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Discutir el sistema según los valores del parámetro a . Resolverlo cuando la solución sea única.
 (b) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que $y = 2$.

37. Dada la siguiente matriz de orden n :

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 9 \end{bmatrix}$$

se pide:

- (a) Calcular el determinante de la matriz A_2 .
 (b) Calcular el determinante de la matriz A_3 .
 (c) Calcular el determinante de la matriz A_5 .

38. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$$

se pide:

- (a) Calcular el rango de A según los valores del parámetro A .
 (b) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

39. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3u = -4 \\ x + 2y + z + 3u = 4 \\ 2x - 4y + 2z - 6u = -8 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}$$

40. El cajero automático de una cierta entidad bancaria solo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositados, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

41. Dado el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 4\lambda y + 2z = 2\lambda \\ \lambda x + y - \lambda z = \lambda \\ 4\lambda x + 4\lambda y + \lambda z = 9 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Discutir el sistema según los valores de λ .
 (b) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

42. Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Discutir el sistema según los valores del parámetro.
 (b) Resolver el sistema cuando sea posible.

43. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

se pide:

- (a) Estudiar el rango de la matriz según los valores del parámetro a .
 (b) Obtener la inversa de A para $a = -1$.

44. Dada la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

se pide:

- (a) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible.
 (b) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.
 (c) Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M .

45. Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.
 (b) Resolver el sistema para $\lambda = 5$.

46. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$.

47. Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + kz = 0 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.
 (b) Resolverlo para el caso $k = 3$.

48. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se pide:

- (a) Hallar dos constantes a y b , tales que $A^2 = aA + bI$.
- (b) Sin calcular explícitamente A^3 y A^4 , y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5 .

49. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ay - z = a \\ ax + 2z = -2 \\ x + z = -2 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Discutirlo según los valores del parámetro a .
- (b) Resolverlo en el caso $a = 0$.

50. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{bmatrix}$$

se pide:

- (a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m .
- (b) En el caso $m = 0$, resolver el sistema

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

51. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Estudiar la compatibilidad del sistema.
- (b) Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.
- (c) Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

52. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{bmatrix}$$

se pide:

- (a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a .
- (b) Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1} ? Calcular A^{-1} para $a = 1$.

53. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{bmatrix}$$

se pide:

- (a) Estudiar el rango de la matriz B en función de a .
 (b) Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.

54. Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

55. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

se pide:

- (a) Hallar el rango de A en función de los valores de k .
 (b) Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = B$.
 (c) para $k = 1$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = C$.

56. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

calcular los siguientes determinantes:

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

57. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + 2y + (a-1)z = 1 \\ -x + ay + \quad \quad z = 0 \\ 2x + \quad y - \quad \quad 2z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Discutir las soluciones según los valores de a .
 (b) Hallar la solución del sistema para $a = 1$

58. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + \quad \quad ay + 4z = 6 \\ \quad \quad x + (a+1)y + \quad z = 3 \\ (a-1)x - \quad \quad ay - 3z = -3 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Discutir el sistema según los valores de a .
 (b) Resolverlo para $a = -1$.

59. Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$, vectores columna. Si

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = -1, \quad \det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) = 3, \quad \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = -2$$

calcular razonadamente el determinante de la siguientes matrices:

- (a) $\det(\vec{a}, 3\vec{d}, \vec{b})$.
 (b) $\det(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}, -\vec{d})$.
 (c) $\det(\vec{d} + 3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d})$.

60. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x & - 2z = 2 \\ ax - y + z = -8 \\ 2x & + az = 4 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Discutir el sistema según los valores de a .
 (b) Resolverlo para $a = -5$.

61. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Discutirlo según los valores de a .
 (b) Resolverlo en el caso $a = 4$.
 (c) Resolverlo en el caso $a = 2$.

62. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

se pide:

- (a) Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial $XA = B$ tiene solución única.
 (b) Calcular la matriz X para $\lambda = 4$. Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de λ .

63. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}; \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se pide:

- (a) Calcular el determinante de A . Calcular el rango de A según los valores de a .
 (b) Resolver el sistema homogéneo $AX = 0$ en el caso $a = 1$.
 (c) Resolver el sistema homogéneo $AX = 0$ cuando $a = -1$.

64. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + \lambda y + \lambda z = 1 - \lambda \\ x + y + (\lambda - 1)z = -2\lambda \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda - 1 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Discutirlo según los valores del parámetro λ .

- (b) Resolverlo para el caso $\lambda = 1$.
 (c) Resolverlo para el caso $\lambda = -1$.

65. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (a) Calcular α, β, γ , para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución de $AX = B$.
 (b) Si $\beta = \gamma = 1$ ¿qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema homogéneo $AX = 0$ sea compatible determinado?
 (c) Si $\alpha = -1, \beta = 1$ y $\gamma = 0$, resolver el sistema $AX = B$.

66. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (a) Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.
 (b) Calcular la matriz inversa A^{-1} de A , en el caso $a = 2$.

67. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -mx + my + z = 0 \\ x - my + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Discutirlo según los valores del parámetro m .
 (b) Resolverlo en el caso $m = 0$.
 (c) Resolverlo en el caso $m = 2$.

68. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

(a)
$$\begin{vmatrix} 2a - 2b & c & 5b \\ 2d - 2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

(b)
$$\begin{vmatrix} a - 1 & b - 2 & 2c - 6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$$

69. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A , es decir que cumplen $AB = BA$.

70. (a) Discutir según los valores de m , el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 4x + 3y + (m-1)z = 0 \\ x - 2y + mz = 1 \\ 5x + my + z = 1 \end{cases}$$

(b) Resolver el sistema anterior para el caso $m = 1$.

71. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) Calcular A^{15} y B^{20} .

(b) Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

72. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix} \quad y \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) Hallar el rango de A en función de t .

(b) Calcular t para que $\det(A - tI) = 0$.

73. (a) Despeje X en la ecuación matricial $X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A , B , C y D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.

(b) Para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

determine la matriz fin tal que $YB = A$.

74. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + y + mz = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + (m+1)y + 2z = 4 \end{cases}$$

se pide:

(a) Discutirlo según los valores del parámetro m .

(b) Resolverlo en el caso $m = 0$.

(c) Resolverlo en el caso $m = 2$.

Soluciones: (obtenidas con Maple)

(1) 62, 36 y 16

(2) Para $a = -4$ el rango es 2. Para los demás valores es 3

(3) (a) Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ es compatible determinado. Para $a = 0$ es incompatible y para $a = -1$ es compatible indeterminado (b) $x = 2 + \lambda$, $y = \lambda$, $z = 1$ (c) $x = 1$, $y = -1$, $z = -\frac{1}{2}$

(4) (a) Es compatible indeterminado para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$. Para los demás valores es incompatible (b) Para $\lambda = 0$, $x = -t$, $y = t$, $z = t$. Para $\lambda = 1$, $x = -2t$, $y = 1 + t$, $z = t$ (c) Se cortan en rectas paralelas

(5) (a) $a = -2$ (b) $x = -\frac{5}{3} + \lambda$, $y = -\frac{1}{3} + \lambda$, $z = \lambda$

- (6) (a) $A^{-1} = A$ (b) $A^n = A$ (n impar), $A^n = I$ (n par) (c) $a = -1$
- (7) (a) $x = \frac{3}{2}$, $y = 1$, $z = \frac{3}{2}$ (b) Es compatible determinado salvo para $m = 0$ y $m = -1$ que es incompatible
- (8) *
- (9) $x = 3$, matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $b = d = 0$
- (10) (a) $m \neq 1$ (b) $x = -1 - \lambda$, $y = 3$, $z = \lambda$
- (11) (a) * (b) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- (12) (a) Es compatible determinado (solución trivial) salvo para $a = -3$ que es compatible indeterminado (b) $x = -\lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$
- (13) (a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$
- (14) (a) Cualquier combinación lineal de las anteriores, por ejemplo $4x + y = 3$ (b) Cualquier combinación de las anteriores que tal que el término independiente sea 1, por ejemplo $3x + 3y - 4z = 1$
- (15) (a) $B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -11 \\ -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
- (16) (a) 0 (b) $k = -1$
- (17) (a) Salvo para $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$ el sistema es compatible determinado. Para $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$ es compatible indeterminado (b) $x = 1 + 4t$, $y = -3t$, $z = t$
- (18) (a) Salvo para 2, 4 y -1 el sistema es compatible determinado. Para $m = 4$ es compatible indeterminado. Para los otros dos valores es incompatible. (b) $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{9}{5} - \lambda$, $z = \lambda$
- (19) (a) $x = 1 + \frac{5}{3}\lambda$, $y = -\frac{7}{3}\lambda$, $z = \lambda$ (b) Cualquier $\alpha \neq -6$, por ejemplo $\alpha = 0$. Para este valor de α , $\beta = \frac{7}{5}$
- (20) $X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$
- (21) Para $a \neq \frac{8}{3}$ y $a \neq 2$ se cortan en un punto. Para $a = \frac{8}{3}$ se cortan en rectas paralelas. Para $a = 2$ hay dos planos paralelos y otro que los corta.
- (22) (a) $\alpha = 2$, $\beta = -1$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (23) (a) $A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (24) Tiene soluciones distintas de la trivial para $k = 2$ y $k = -1$. Para $k = 2$ la solución es $(-\frac{1}{5}\lambda, \frac{3}{5}\lambda, \lambda)$. Para $k = -1$ la solución es $(\lambda, 0, \lambda)$
- (25) Matrices del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$
- (26) (a) El rango es 3 salvo para $a = 0$ y $a = \pm 1$ que vale 2 (b) Existe la inversa salvo para $a = 0$ y $a = \pm 1$.
 $M^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 6 & -6 & 6 \\ -6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- (27) (a) * (b) Sí, porque el determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de sus determinantes
 (c) Son las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 0$
- (28) (a) $a = 1, b = 0$ o $a = 0, b = 1$ (b) $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$
- (29) (a) $x = -5 + 8\lambda$, $y = 5 - 5\lambda$, $z = \lambda$ (b) $x = 3$, $y = 0$, $z = 1$
- (30) El rango es 3 excepto para $m = 0$ y $m = 2$ que vale 2
- (31) Matrices de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ \frac{2}{3}x & y \end{pmatrix}$
- (32) (a) $a = b = c$ (b) $\begin{pmatrix} 141267149 & 141208100 & 0 \\ 141208100 & 141267149 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (33) (a) El sistema es compatible determinado salvo para $k = \frac{1}{2}$ que es incompatible y para $k = 2$ que es compatible indeterminado (b) $x = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\lambda$, $y = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\lambda$, $z = \lambda$
- (34) $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- (35) (a) Cualquier combinación lineal de las dos ecuaciones, por ejemplo $3x + 5y - 2z = 8$ (b) $x = \frac{17}{3}$, $y = -\frac{7}{3}$, $z = \frac{2}{3}$
- (36) (a) Para $a \neq \pm 1$ el sistema es compatible determinado. Para $a = -1$ el sistema es incompatible y para $a = 1$ es compatible indeterminado; $x = \frac{a+2}{a+1}$, $y = \frac{-1}{a+2}$ (b) $a = 1$, $a = -\frac{3}{2}$
- (37) (a) 10 (b) 100 (c) 10000
- (38) (a) El rango es 3 salvo para $a = -1$ y $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ que vale 2 (b) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
- (39) $x = -\lambda$, $y = 2 - \frac{3}{2}\mu$, $z = \lambda$, $u = \mu$
- (40) 100, 75 y 50
- (41) (a) El sistema es incompatible para $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ y $\lambda = \frac{1}{5}$. Para los demás valores es compatible determinado (b) $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$
- (42) (a) El sistema es incompatible salvo para $a = 2$ y $a = 6$ que es compatible determinado (b) Para $a = 2$, $x = 0$, $y = -2$. Para $a = 6$, $x = -4$, $y = -14$
- (43) (a) El rango es 3 excepto para $a = -2$ que vale 2 y para $a = 1$ que vale 1 (b) $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- (44) (a) Todos salvo $m = 0$ y $m = 1$ (b) Los mismos (c) $M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- (45) (a) $\lambda = 1$, $\lambda = 5$ (b) $x = -\frac{1}{3}\lambda$, $y = \frac{1}{3}\lambda$, $z = \lambda$
- (46) $X = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
- (47) (a) Para $k = 3$ y $k = -\frac{5}{2}$ (b) $x = -\frac{5}{7}\lambda$, $y = \frac{4}{7}\lambda$, $z = \lambda$
- (48) (a) $a = -1$, $b = 3$ (b) *
- (49) (a) incompatible para $a = 2$, compatible indeterminado para $a = 0$, compatible determinado para los demás valores (b) $x = -1$, $y = \lambda$, $z = -1$
- (50) (a) El rango es 3 salvo para $m = -1$ que vale 2 y para $m = 2$ que vale 1 (b) $x = -\lambda$, $y = -\lambda$, $z = \lambda$, $t = 0$
- (51) (a) Compatible indeterminado (b) $x = 0$ (independiente de las dos anteriores) (c) $x + 2y - z = 1$ (contradictoria con la primera)
- (52) (a) El rango es 3 salvo para $a = 0$ y $a = 2$ que vale 2 (b) Existe salvo para $a = 0$ y $a = 2$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- (53) (a) El rango es 3 salvo para $a = 1$ que vale 2 (b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- (54) $(x - 1)^3$
- (55) (a) El rango es 3 salvo para $k = 0, 1, -1$ que vale 2 (b) $x = \frac{2}{3}$, $y = 0$, $z = \frac{8}{3}$ (c) $x = \frac{9}{4} - \lambda$, $y = \frac{3}{4}$, $z = \lambda$
- (56) (a) -6 (b) 3
- (57) (a) Para $a = -2$ y para $a = -\frac{1}{2}$ es incompatible. Para los demás valores es compatible determinado (b) $x = -\frac{1}{3}$, $y = 1$, $z = -\frac{4}{3}$
- (58) (a) Para $a = -1$ es compatible indeterminado, para $a = -\frac{5}{3}$ es incompatible. Para los demás valores es compatible determinado (b) $x = 3 - \lambda$, $y = 3 + \lambda$, $z = \lambda$
- (59) (a) 3 (b) -5 (c) 4
- (60) (a) Para $a \neq -4$ es compatible determinado, para $a = -4$ es compatible indeterminado (b) $x = 2$, $y = -2$, $z = 0$
- (61) (a) Para $a \neq 2$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 2$ es compatible indeterminado y para $a = -1$ es incompatible (b) $x = 2$, $y = 1$, $z = -3$ (c) $x = 7 + \lambda$, $y = -2 - \lambda$, $z = \lambda$
- (62) (a) $\lambda \neq 3$ (b) $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -4 & 5 & -11 \\ -5 & 7 & -14 \end{pmatrix}$, $-\lambda^2 + 6\lambda - 9$
- (63) (a) Para $a \neq \pm 1$ el rango es 4. Para $a = -1$ es 3 y para $a = 1$ es 1 (b) $(-\lambda - \mu - \nu, \lambda, \mu, \nu)$ (c) $(0, \lambda, 0, \lambda)$
- (64) (a) Para $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2$ es compatible determinado, para $\lambda = -1$ y para $\lambda = 2$ es compatible indeterminado (b) $x = 0$, $y = -2$, $z = 2$ (c) $x = \frac{4}{3} + \lambda$, $y = \frac{2}{3} + \lambda$, $z = \lambda$
- (65) (a) $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{2}$, $c = -3$ (b) $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ (c) $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$
- (66) (a) Todos excepto $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ (b) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

(67) (a) Para $m \neq 1$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado, para $m = 2$ es compatible indeterminado y para $m = 1$ es incompatible (b) $x = 4, y = 4, z = 0$ (c) $x = -4 + 4\lambda, y = -4 + \frac{7}{2}\lambda, z = \lambda$

(68) (a) -30 (b) -12

(69) Matrices de la forma $\begin{pmatrix} 3y+t & y \\ y & t \end{pmatrix}$

(70) (a) Para $m \neq 1$ y $m \neq 7$ el sistema es compatible determinado, para $m = 1$ es compatible indeterminado y para $m = 7$ es incompatible (b) $x = \frac{3}{11} - \frac{3}{11}\lambda, y = -\frac{4}{11} + \frac{4}{11}\lambda, z = \lambda$

(71) (a) $a^{15} = A, B^{20} = 3^{20}I$ (b) $X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(72) (a) El rango es 3 salvo para $t = 2$ y $t = 7$ que vale 2 (b) $t = 7$

(73) (a) $X = AB^{-1}$ (b) $Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

(74) (a) $m \neq -2, 2$ compatible determinado, $m = 2$ compatible indeterminado, $m = -2$ incompatible (b) $x = -2, y = 7, z = \frac{7}{2}$ (c) $x = -\frac{1}{4} - \lambda, y = \frac{7}{4} + \lambda, z = \lambda$

21. Geometría

1. Para cada uno de los siguientes casos, calcular las coordenadas del vector de origen el punto A y de extremo el punto B :

a) $A(3, 0, -2)$, $B(1, -3, 5)$.
 b) $A\left(\frac{1}{2}, -2, 1\right)$, $B\left(-1, \frac{3}{5}, 2\right)$.

2. Del vector $\overrightarrow{PQ} = (-2, 0, 3)$ se sabe que el origen tiene coordenadas $P(1, -2, 3)$. Calcular las coordenadas del extremo Q .

3. Del vector $\overrightarrow{PQ} = (4, -1, 2)$ se sabe que el extremo tiene coordenadas $Q(2, -3, -4)$. Calcular las coordenadas de P .

4. Calcular las coordenadas de los puntos A y B que dividen el segmento de extremos $P(2, 2, -1)$ y $Q(5, -4, -7)$ en tres segmentos iguales.

5. Calcular las coordenadas de tres puntos A , B y C que dividen el segmento de extremos

$$P\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right), \quad Q\left(-3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$$

en cuatro segmentos de igual longitud.

6. Escribir las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano:

- a) Que pasa por el punto $A(-1, 3, 1)$ y lleva la dirección de los vectores $\vec{u} = (1, -1, 3)$ y $\vec{v} = (-1, -1, 4)$.
 b) Que pasa por los puntos $A(1, -1, 2)$, $B(2, 0, -1)$ y $C(-3, 1, 0)$.
 c) Que contiene el triángulo de vértices $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

7. Calcular dos puntos de cada uno de los siguientes planos:

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 + 2\lambda - \mu \\ z = 3 - 3\lambda - 2\mu \end{cases} \quad ; \quad \rho: 2x + y - 3z = 1$$

8. Calcular un punto, dos vectores directores linealmente independientes y un vector normal de cada uno de los siguientes planos.

$$\pi: \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3\lambda - 2\mu \\ z = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases} \quad ; \quad \rho: 3x - y - 2z = 0$$

9. Escribir unas ecuaciones paramétricas para el plano de ecuación implícita $\pi: x - 2y + 3z = 1$.

10. Escribir las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por $A(1, 3, -2)$ y tiene como vector normal $\vec{n} = (1, -2, 0)$.

11. Escribir la ecuación implícita del plano de ecuaciones paramétricas:

$$\pi: \begin{cases} x = -2 - 2\lambda + 3\mu \\ y = 1 - 2\lambda - 2\mu \\ z = 1 + 2\lambda - 2\mu \end{cases}$$

12. Comprueba se los puntos $P(-1, 3, 5)$ y $Q(2, -1, -1)$ pertenecen o no a los siguientes planos:

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = 2 - 3\lambda - \mu \\ z = 1 + 2\lambda + 3\mu \end{cases} \quad \rho: x - 2y + 3z = 1$$

13. Escribir las ecuaciones paramétricas, la ecuación continua y las ecuaciones implícitas de la recta:

a) Que pasa por los puntos $A(1, -2, 0)$, y $B(2, -3, -1)$.

b) Que pasa por el punto $A(-2, -2, 0)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (-1, -1, 4)$.

14. Dados los puntos $A(1, -1, 2)$ y $B(-1, -2, 0)$, calcular las ecuaciones implícitas para la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene la dirección de \vec{AB} .

15. Calcular dos puntos de cada una de las siguientes rectas:

$$a) r: \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad b) s: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2} \quad c) t: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

16. Calcular un punto y un vector de dirección de cada una de las siguientes rectas:

$$a) r: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases} \quad b) s: \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{3} \quad c) t: \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$$

17. Calcular la ecuación en forma continua y las ecuaciones implícitas de la recta de ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases}$$

18. Calcular las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta de ecuaciones implícitas:

$$r: \begin{cases} 3x - y - z - 1 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

19. Escribir las ecuaciones de los ejes y los planos coordenados.

20. Escribir las ecuaciones en forma continua de las rectas que se dan a continuación:

$$r: \frac{x}{2} = \frac{2y-2}{3} = \frac{z-1}{-3}; \quad s: \frac{-x+1}{3} = \frac{2y-4}{2} = \frac{3z-2}{-4}$$

21. Se considera la recta que pasa por el punto $A(-1, 2, -3)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (2, -1, 2)$:

a) Escribir las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones continuas de la recta.

b) Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta y cuáles no:

$$P(5, -1, 3); \quad Q(-3, 3, -4); \quad R\left(0, \frac{3}{2}, -2\right)$$

22. Escribir la ecuación del haz de planos paralelos, tal que uno de ellos pase por los puntos $A(-2, 1, 1)$, $B(3, 0, -3)$ y $C(-2, 1, 4)$.

23. Escribir la ecuación del haz de planos secantes en las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}; \quad s: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}; \quad t: \begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

24. Calcular el valor de a para que los puntos $A(2, 0, -1)$, $B(1, 2, -2)$ y $C(1, a, a)$ pertenezcan a una misma recta.

25. Calcular todos los valores de m que hacen que los puntos del espacio $A(0, 2, 2)$, $B(1, 1, m^2 - 1)$ y $C(2, 0, 2m)$ pertenezcan a una misma recta. Escribir las ecuaciones implícitas de esta recta.
26. Calcular el valor de m para que los puntos $A(0, 1, 2)$, $B(1, 0, 3)$, $C(1, m, 1)$ y $D(m, -1, 2m)$ pertenezcan a un mismo plano.

27. Dado el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$:

- a) Calcular el valor de d para que el plano pase por el punto $P(2, 0, 0)$.
- b) Calcular las coordenadas de A , B y C , puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano π .
- c) Calcular las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices A , B y C .
28. Calcular el valor de a para que los puntos $A(3, 0, 2)$, $B(0, a, a)$, $C(1, 2, 2)$ y $D(-1, -1, 0)$ sean coplanarios. Para este valor hallado, calcular la ecuación del plano que contiene a los cuatro puntos.
29. Escribir la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(3, 1, -1)$ y $B(2, -1, 4)$ y es paralelo a la recta de ecuaciones:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{4}$$

30. Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-2, -3, 2)$ y es paralelo a las rectas:

$$r: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-4}; \quad s: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

31. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, -3, 0)$ y es paralela a la recta determinada por la intersección de los planos:

$$\pi: 2x - 3y + z = 0; \quad \pi': \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = t - s \\ z = 2 + 2t + s \end{cases}$$

32. Determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, -1, 1)$ y $B(0, 3, -2)$ y es paralelo al eje Z .

33. Determinar la ecuación del plano paralelo a los ejes de coordenadas X e Y , y que pasa por el punto de intersección de la recta r y el plano π , siendo:

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases}; \quad \pi: x - 2y - 2z + 3 = 0$$

34. Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x - kz = 2 \\ y - z = -3 \end{cases}; \quad s: \frac{x-1}{2} = y + 1 = z$$

¿Existe algún valor de k que haga que estas rectas sean secantes?

35. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1, 2, 3)$ y que toca a los ejes de coordenadas X y Z .

36. Se considera la recta r que pasa por el punto $A(3, 0, 0)$ y que tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (1, 1, -1)$. Se consideran también los planos paralelos de ecuaciones $\pi: 2x + y = 0$ y $\pi': 2x + y + 3 = 0$. La recta r corta a los planos en los puntos P y Q . Calcular las coordenadas del punto medio de PQ .

37. Estudiar la posición relativa del plano $\pi: x - y + 2z = 1$ y las rectas siguientes:

$$a) r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases} \quad b) s: \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{1} \end{cases} \quad c) t: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4t \\ z = t \end{cases}$$

38. Estudiar la posición relativa de los planos π y π' en los siguientes casos:

$$a) \pi: 2x - y + z = 0, \quad \pi': -2x + y + z = 0$$

$$b) \pi: 2x - y + z = 0, \quad \pi': -4x + 2y - 2z = 3$$

$$c) \pi: 2x - y + z = 0, \quad \pi': -4x + 2y - 2z = 0$$

39. Estudiar la posición relativa de los planos π , π' y π'' en los siguientes casos:

$$a) \pi: 2x - y + z = 0, \quad \pi': 3x + y + 4z = 0, \quad \pi'': x + y - z = 3$$

$$b) \pi: 2x - y + z = 0, \quad \pi': x - 2y + 3z = 1, \quad \pi'': 3x - 3y + 4z = 1$$

$$c) \pi: 2x + y + z = 0, \quad \pi': x + y - z = 0, \quad \pi'': x + 2z = 1$$

40. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}; \quad s: \frac{x+2}{1} = \frac{y+8}{2} = z+5$$

41. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}; \quad s: \begin{cases} x = 2t \\ y = -2t \\ z = -3t \end{cases}$$

42. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r: x = -y = z \quad s: \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

43. Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x + y - z = -6 \\ 2x - z = -2 \end{cases}; \quad s: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+1}{2}$$

Estudiar sus posiciones relativas según los valores de m .

44. Estudiar la posición relativa de las rectas r y s y obtén, si es posible, el ángulo que forman siendo:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 2\lambda + 2 \end{cases}; \quad s: \begin{cases} x = 1 \\ z = y + 2 \end{cases}$$

45. Se considera las rectas:

$$r: \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}; \quad s: \frac{x+1}{2} = y+1 = \frac{z+d}{-2}$$

Hallar el valor de d para que las rectas sean secantes. Para ese valor de d determina el ángulo que forman r y s .

46. Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r_1: \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}; \quad r_2: \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

47. Estudiar la posición relativa de las rectas r y s y calcular el ángulo que forman:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}; \quad s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases}$$

48. Hallar el ángulo que forman los planos π_1 y π_2 , donde π_1 es el plano determinado por los puntos $(0, 0, 8)$, $(-5, 1, 2)$ y $(0, -2, 0)$ y π_2 es el plano perpendicular a la recta

$$nx - 1 = y - 2 = \frac{z}{6}$$

que pasa por el punto $(0, 0, 1)$.

49. Hallar el ángulo que forman el plano determinado por las rectas:

$$r: x = \frac{y}{3} = \frac{3-z}{2}; \quad s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda - 1 \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

con el plano de ecuación $2x - y + z = 1$.

50. Hallar el ángulo que forman la recta r de ecuación

$$r: \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

con el plano que contiene la recta

$$s: -x = y - 2 = 1 - z$$

y el punto $A(3, 1, 6)$.

51. Calcular la proyección ortogonal del punto $P(0, 0, 0)$ sobre el plano $\pi: x + y + z = 1$.

52. Dados la recta:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi: x + y + z - 4 = 0$, halla la ecuación de la recta s , proyección ortogonal de r sobre π .

53. Hallar la ecuación continua de la proyección ortogonal de la recta $(x, y, z) = (2, 1, 1) + t(-1, 0, 2)$ sobre el plano $2x + y - z = 0$.

54. Hallar el punto del plano $\pi: x + y + z = 1$ que equidista de los puntos $A(1, -1, 2)$, $B(3, 1, 2)$ y $C(1, 1, 0)$.

55. Determinar la distancia que hay desde el origen de coordenadas al plano que contiene las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2} = 2 - y = \frac{2z-6}{4}; \quad s: \begin{cases} x = 3 - 2y \\ z = 2y - 2 \end{cases}$$

56. Calcular los puntos de la recta

$$r: \begin{cases} x - z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

que equidistan de los planos:

$$\alpha: 2x + y - 2z = 0; \quad \beta: x - 2y + 2z - 1 = 0$$

57. Calcular la distancia del punto $P(1, 0, 3)$ a la recta:

$$r: \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

58. En cada caso, estudia si las rectas dadas se cruzan y, en caso afirmativo, calcular su distancia:

$$a) \quad r_1: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad ; \quad r_2: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$b) \quad r_1: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases} \quad ; \quad r_2: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

59. Determinar la perpendicular común a las rectas:

$$r: \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

60. Demostrar que las rectas:

$$r: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - ay = 0 \\ z = 5 \end{cases}$$

se cruzan, cualquiera que sea el valor del parámetro a . Calcular la recta perpendicular común a r y s .

61. Determinar el plano π que pasa por los puntos de coordenadas $A(0, 0, 3)$, $B(2, 0, -3)$ y $C(2, -2, 0)$. Calcular el área del triángulo que forman los puntos en que el plano π corta a los tres ejes de coordenadas.

62. Sean $A(-3, 4, 0)$, $B(3, 6, 3)$ y $C(-1, 2, 1)$ los tres vértices de un triángulo. Se pide:

- Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo.
- Calcular el coseno de cada uno de los tres ángulos del triángulo.
- Calcular el área del triángulo.

63. Los planos $\pi: x + y + z = 4$, $\pi': x - z = 0$ y $\pi'': x + y = 3$, tienen un único punto en común. Se pide:

- Determinarlo.
- Hallar las ecuaciones de las rectas en que cada uno de los planos corta al plano $x = 0$.
- Volumen del tetraedro limitado por cada uno de esos tres planos y el plano $x = 0$.

64. Considera un cuadrado cuyo centro es el punto $P(1, 1, -1)$ y tiene uno de sus lados en la recta:

$$r: \begin{cases} x - 2 = y - 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

- a) Calcular la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado.
 b) Calcular la longitud del lado del cuadrado.
65. Hallar el punto P' simétrico de $P(3, 4, 0)$ respecto al plano $\pi: x + y + z = 0$.
66. Hallar las coordenadas del punto simétrico de $P(-2, -2, 3)$ respecto del plano de ecuación general $2x + y + z - 3 = 0$.
67. Se consideran las rectas de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases} ; \quad s: \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

y el plano π que pasa por los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 2)$ y $C(1, 0, 1)$.

- a) Calcular la ecuación general o implícita de π .
 b) Una de las dos rectas corta a π . Determinarla y halla el punto de corte con π .
 c) Calcular el seno del ángulo que forman dicha recta y el plano π .
 d) Comprueba que la otra recta es paralela a π y calcular la ecuación general del plano que la contiene y es paralelo a π .
68. a) Demostrar que los planos $\pi: 2x + 3y - 4z = 6$ y $\pi': -3x + 4y - 2z = -2$ no son paralelos y calcular sus planos bisectores.
 b) Calcular el ángulo que forman entre sí ambos planos bisectores.
69. Sean los puntos $P_1(1, 2, 1)$, $P_2(2, 3, 1)$, $P_3(-1, 4, 3)$ y $P_4(0, 5, 3)$.
 a) Demostrar que los cuatro puntos están en el mismo plano.
 b) Verifica que el polígono que tiene como vértices esos cuatro puntos es un rectángulo.
 c) Calcular el área de ese rectángulo.
70. Considérese la recta r de vector director $(1, 1, 0)$ que pasa por el origen. escriba las ecuaciones paramétricas de todas las rectas que pasan por el origen, que están contenidas en el plano $x - y = 0$ y que forman, además, un ángulo de 60° con r .
71. Calcular la distancia entre las rectas r y s siendo:

$$r: \begin{cases} \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2} \\ x=0 \end{cases} \quad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$$

Obtén la ecuación de la perpendicular común a ambas.

72. Sea el plano π de ecuación $x + 2y + 3z = 5$.
 a) Encontrar la ecuación de un plano paralelo a π y cuya distancia al origen sea 3. ¿Cuántas soluciones hay?
 b) Calcular el punto P del plano π que está más próximo del origen.
 c) Sea Q el punto $(1, 1, 1)$. Se sabe que los segmentos OP y OQ son dos lados de un paralelogramo. Hallar los vértices y el área de dicho paralelogramo.

Soluciones:

- (1) (a) $(-2, -3, 7)$ (b) $(-\frac{3}{2}, \frac{13}{5}, 1)$
 (2) $(-1, -2, 6)$
 (3) $(-2, -2, -6)$
 (4) $A(3, 0, -3)$, $B(4, -2, -5)$
 (5) $A(0, \frac{3}{4}, -\frac{1}{3})$, $B(-1, 1, 0)$, $C(-2, \frac{5}{4}, \frac{1}{3})$

- (6) (a) $x + 7y + 2z - 22 = 0$ (b) $2x + 7y + 3z - 1 = 0$ (c) $x + y + z - 1 = 0$
- (7) (a) $(1, 2, 3)$, $(0, 4, 0)$ (b) $(0, 1, 0)$, $(0, 4, 1)$
- (8) (a) $P(-1, 0, 1)$, $\vec{u}(-1, 3, -2)$, $\vec{v}(0, -2, -1)$, $\vec{n}(7, 1, -2)$ (b) $O(0, 0, 0)$, $\vec{u}(1, 3, 0)$, $\vec{v}(0, -2, 1)$, $\vec{n}(3, -1, -2)$
- (9) $x = 1 + 2\lambda - 3\mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$
- (10) $x = -5 + 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = \mu$
- (11) $4x + y + 5z + 2 = 0$
- (12) (a) $P \in \pi$, $Q \notin \pi$ (b) $P \notin \rho$, $Q \in \rho$
- (13) (a) $x = 1 + t$, $y = -2 - t$, $z = -t$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-1}$; $x + y + 1 = 0$, $x + z - 1 = 0$ (b) $x = -2 - t$, $y = -2 - t$, $z = 4t$;
 $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{4}$; $x - y = 0$, $4x + z + 8 = 0$
- (14) $x - 2y = 0$, $x - z = 0$
- (15) (a) $A(-2, -1, -1)$, $B(0, 0, 1)$ (b) $A(1, -2, 0)$ $B(0, 0, -2)$ (c) $A(0, 0, 0)$ (d) $1, 1, 1$
- (16) (a) $P(0, -2, 1)$ $\vec{v}(-3, 3, -4)$ (b) $P(0, 2, -2)$ $\vec{v}(-2, 1, 3)$ (c) $P(0, 3, -1)$ $\vec{v}(1, -2, 2)$
- (17) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$, $2x + y - 4 = 0$, $3x - z = 0$
- (18) $x = t$, $y = 1 + t$, $z = -2 + 2t$, $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$
- (19) $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
- (20) $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{\frac{2}{3}} = \frac{z-1}{-3}$, $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-2}{-\frac{2}{3}}$
- (21) (a) $x = -1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = -3 + 2t$ (b) P sí, Q no, R sí
- (22) $x + 5y + D = 0$
- (23) (a) $\lambda(x + y + 1) + \mu(2x - z - 1) = 0$ (b) $\lambda(x + 2y + 3) + \mu(3x - 2z - 3) = 0$ (c) $\lambda(2x + y - 3z - 3) + \mu(2x - 2y + z - 1) = 0$
- (24) No tiene solución.
- (25) (a) $m = 2$, $m = -1$ (b) $x + y = 2$, $2x + z = 2$
- (26) $m = 2$, $m = -2$
- (27) (a) $d = 12$ (b) $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, -4)$ (c) $G(\frac{2}{3}, 1, -\frac{4}{3})$
- (28) (a) $a = \frac{4}{3}$ (b) $2x + 2y - 5z + 3 = 0$
- (29) $8x - 4y + z - 19 = 0$
- (30) $x - 13y - 10z - 17 = 0$
- (31) $x = 2 + 5\lambda$, $y = -3 + 7\lambda$, $z = 11\lambda$
- (32) $4x + y - 3 = 0$
- (33) $z = 3$
- (34) No
- (35) $x = \lambda$, $y = 2\lambda$, $z = 3\lambda$
- (36) $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$
- (37) (a) Se cortan (b) Recta paralela al plano (c) Recta contenida en el plano
- (38) (a) Se cortan (b) Paralelos (c) Coincidentes
- (39) (a) Se cortan en un punto (b) Se cortan en una recta (c) Forman un prisma
- (40) Secantes
- (41) Paralelas
- (42) Coincidentes
- (43) $m = -14$ se cortan, $m \neq -14$ se cruzan
- (44) Secantes, 60°
- (45) $d = 1$, 45°
- (46) Se cruzan
- (47) Secantes, $6^\circ 58' 57''$
- (48) 90°
- (49) 60°
- (50) 60°
- (51) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
- (52) $y - z + 1 = 0$, $x + y + z - 4 = 0$
- (53) $x = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{4}$
- (54) $P(4, -2, -1)$

- (55) Las rectas no son coplanarias.
- (56) $P\left(\frac{11}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right), Q\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$
- (57) $\frac{\sqrt{66}}{6}$
- (58) (a) Se cruzan, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (b) Se cruzan, $\frac{\sqrt{6}}{2}$
- (59) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-\frac{8}{5}}{0}$
- (60) La p.c. es el eje OZ , es decir $x = 0, y = 0$
- (61) $6x + 3y + 2z - 6 = 0, \frac{7}{2}$
- (62) (a) $x - 2z + 3 = 0$ (b) $\frac{11}{21}, \frac{19}{21}, -\frac{1}{9}$ (c) $4\sqrt{5}$
- (63) (a) $P(1, 2, 1)$ (b) $r : x = 0, y = \lambda, z = 4 - \lambda; s : x = 0, y = \lambda, z = 0; t : x = 0, y = 3, z = \lambda$ (c) $\frac{1}{6}$
- (64) (a) $2x - 2y - z - 1 = 0$ (b) $3\sqrt{2}$
- (65) $Q\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{14}{3}\right)$
- (66) $P'(2, 0, 5)$
- (67) (a) $x - y - 1 = 0$ (b) $x = 1, y = -\lambda, z = 1 + 2\lambda, (1, 0, 1)$ (c) $18^\circ 26' 6''$ (d) $x - y = 0$
- (68) (a) $5x - y - 2z - 8 = 0, -x + 7y - 6z - 4 = 0$ (b) 90°
- (69) (a) $x - y + 2z - 1 = 0$ (b) (c) $2\sqrt{6}$
- (70) $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{\sqrt{6}}, \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-\sqrt{6}}$
- (71) (a) $\frac{2}{\sqrt{30}}$ (b) $x - 2y + z + 5 = 0, 5x - 16y - 7z - 21 = 0$
- (72) (a) $x + 2y + 3z + k = 0, k = \pm 3\sqrt{14}$ (b) $P\left(\frac{5}{14}, \frac{10}{14}, \frac{15}{14}\right)$ (c) $\frac{5\sqrt{6}}{14}$

22. Paralelismo y perpendicularidad

1. Calcular la ecuación de la recta perpendicular al plano $2x - 3y + 5z - 2 = 0$ por el punto $P(1, 2, -3)$.
2. Calcular la ecuación del plano perpendicular a la recta

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z}{-1}$$

por el punto $P(3, -1, 5)$.

3. Calcular la ecuación del plano perpendicular a la recta:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 2 = 0 \\ x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

por el punto $P(1, -1, 2)$.

4. Calcular la ecuación del plano que contiene al punto $P(1, 1, 1)$ y a la recta:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{7} = \frac{z+4}{2}$$

5. Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

y pasa por el punto $P(1, 3, -1)$.

6. Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 1, 1)$ y es paralelo a $2x - 3y + 6z - 7 = 0$.
7. Calcular la ecuación de la recta paralela a

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$$

por el punto $P(1, -1, 2)$.

8. Calcular la ecuación de la recta paralela a:

$$\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x + 3y - z + 7 = 0 \end{cases}$$

por el punto $P(0, 1, 2)$.

9. Calcular la ecuación de la recta paralela a los planos:

$$\pi : 2x + y - z - 3 = 0 ; \quad \pi' : x + y + 2z - 1 = 0$$

que pasa por el punto $P(-1, 2, 0)$.

10. Calcular la ecuación del plano paralelo a las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{-1} ; \quad r' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

que pasa por el punto $P(0, 1, 0)$.

11. Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

y es paralelo a:

$$r' : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+5}{3}$$

12. Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $P(3, 2, 1)$ y es perpendicular a los planos:

$$\pi : x - y + 2z - 3 = 0 ; \quad \pi' : 2x - 3y + z - 1 = 0$$

13. Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$\frac{x+3}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$$

y es perpendicular a $x + y - 2z = 0$.

14. Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $P(3, 1, 2)$, es paralelo a la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{-1}$$

y perpendicular al plano $3x - y + z - 1 = 0$.

Soluciones:

- (1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{5}$
- (2) $3x + 2y - z - 2 = 0$
- (3) $x + 9y + 5z - 2 = 0$
- (4) $7x - 3y - 4 = 0$
- (5) $7x + y - z - 11 = 0$
- (6) $2x - 3y + 6z - 5 = 0$
- (7) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$
- (8) $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$
- (9) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z}{1}$
- (10) $x - y - z + 1 = 0$
- (11) $11x + 7y - 5z + 4 = 0$
- (12) $5x + 3y - z - 20 = 0$
- (13) $2x + z + 5 = 0$
- (14) $-2x - 5y + z + 9 = 0$

23. Problemas de selectividad: Geometría.

1. Hallar una ecuación cartesiana de plano que contiene a la recta r :

$$x = 1 + t; \quad y = 1 + 2t; \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π :

$$2x + y - z = 2$$

2. Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$ y $C(1, 3, 3)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

- Calcular las coordenadas del cuarto vértice y el área del paralelogramo.
- Clasificar el paralelogramo por sus lados y sus ángulos.

3. Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2}; \quad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

- Calcular la distancia entre r y s .
- Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.
- Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y pasa por $P(1, 0, 0)$.

4. Para cada valor del parámetro real a se consideran los planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + az = -2; \quad \pi_2 : x + ay + z = -1; \quad \pi_3 : ax + y + z = 3$$

Se pide:

- Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.
- Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

5. Dadas las rectas en el espacio:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}; \quad s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

- Hallar la distancia entre las dos rectas.
- Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s

6. Dados el plano:

$$\pi \equiv x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$r \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

se pide:

- Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .
- Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π' .

7. Dados los puntos $A(1, 0, 1)$ y $B(0, 2, 0)$, y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B .

8. Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}; \quad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$$

- a) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.
 b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.
9. Dado el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$, y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$, se pide:
- a) Calcular el punto Q en que se cortan el plano π y la recta r .
 b) Encontrar un plano π' , paralelo a π , tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.
10. Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \quad ; \quad \pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0 ; \quad \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

Se pide:

- a) Determinar la posición relativa de la recta respecto a cada uno de los planos.
 b) Determinar la posición relativa de los planos.
 c) Calcular la distancia de r a π_2 .
11. a) Determinar la posición relativa de los siguientes planos según los valores del parámetro k :
- $$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv 2x + 3y + kz = 3 \\ \pi_2 &\equiv x + ky - z = -1 \\ \pi_3 &\equiv 3x + y - 3z = -k \end{aligned}$$
- b) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.
12. Sea el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$:
- a) Hallar el punto simétrico de $(0, 0, 0)$ respecto de π .
 b) Hallar el plano perpendicular a π que contiene al eje OZ .
 c) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes coordenados.
13. a) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.
 b) Describir dicho conjunto.
14. El plano $\pi \equiv 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:
- a) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.
 b) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene dicha altura.
 c) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π .
15. Dado el punto $P(1, 3, -1)$, se pide:
- a) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.
 b) Calcular los puntos de la recta:

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$$

cuya distancia a P sea igual a 3.

16. Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} \quad ; \quad s : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$$

- Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y el perpendicular a ambas.
- Calcular la mínima distancia entre r y s .

17. Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1 : x + z &= \lambda \\ \pi_2 : 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z &= \lambda + 2 \\ \pi_3 : 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)y &= -\lambda \end{aligned}$$

18. Se consideran las rectas:

$$r : \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

- Hallar la recta t , perpendicular a r y a s , que pasa por el origen.
- Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado anterior.

19. Se considera la familia de planos:

$$mx + (m - 2)y + 3(m + 1)z + (m + 1) = 0$$

siendo m un parámetro real:

- Determinar la recta común a todos los planos de la familia.
- Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1, 1, 0)$.
- Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$r : \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ -y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

20. Sean las rectas:

$$r : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \quad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

- Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.
- Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s .

21. Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\vec{v} = (4, 3, 1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi : z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

22. Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r : \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \quad s : \begin{cases} x + 2y - 5z - 5 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

23. Se consideran los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$. se pide:

- Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ que equidistan de A y B .
- Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a A es igual que la distancia de A a B .

- c) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x, y, z)$ del plano $x + y + z = 3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A .
24. Un plano corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, \lambda, 0)$, $C(0, 0, 4)$. se pide:
- Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro $OABC$ (donde O es el origen) sea 2.
 - Para el valor de λ obtenido en el apartado anterior, calcular la longitud de la altura del tetraedro $OABC$ correspondiente al vértice O .
25. Dados el punto $A(1, -2, -3)$, la recta $r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : x - 2y - 3z + 1 = 0$, se pide:
- Ecuación del plano que pasa por A , es paralelo a r y perpendicular a π .
 - Ecuación de la recta que pasa por A , corta a r y es paralela a π .
26. Sean los puntos $A(\lambda, 2, \lambda)$, $B(2, -\lambda, 0)$, $C(\lambda, 0, \lambda + 2)$.
- ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A , B y C estén alineados?
 - Comprobar que si A , B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.
 - Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor de $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.
27. Hallar los puntos de la recta $r : \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{-1}$ cuya distancia al plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1.
28. Se consideran las rectas:
- $$r : \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$
- Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.
29. Sean las rectas:
- $$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \quad s : \begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ x - 3z - 8 = 0 \end{cases}$$
- Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s .
 - Calcular la distancia entre el plano π y la recta s .
30. Dadas las rectas:
- $$r \equiv \begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$
- se pide:
- Discutir la posición relativa de las dos rectas según los valores del parámetro a .
 - Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las rectas r y s .
31. Dados los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(1, 2, 0)$, se pide:
- Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.
 - Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A , B y C .
 - Hallar la distancia del punto D a plano π .

32. Dados los puntos $P(1, 1, 3)$, $Q(0, 1, 0)$, se pide:

- Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R . Describir dicho conjunto de puntos.
- Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican

$$\text{dist}(P, S) = 2 \cdot \text{dist}(Q, S)$$

donde "dist" significa distancia.

33. Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}; \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

34. Dados el plano:

$$\pi_1 \equiv x + y + z = 1$$

y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

se pide:

- Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1 .
- Hallar un plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1 y π_2 tenga una longitud de $\sqrt{29}$ unidades.

35. Dado el plano $\pi: x + 3y + z = 4$, se pide:

- Calcular el punto simétrico P del punto $O(0, 0, 0)$ respecto del plano π .
- Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $x = 0$.
- Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π , y los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

36. Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}; \quad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$$

se pide:

- Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s .
- Determinar la distancia entre las rectas r y s .
- Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0, 0, 0)$ corta a la recta s .

37. Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}; \quad s \equiv \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales las rectas r , s se cortan perpendicularmente.

38. Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$, hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π .

39. Dada la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π .

40. Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}; \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

se pide:

- Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s .
- Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s .

41. Dadas las rectas:

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}; \quad s \equiv \begin{cases} y+z=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$$

se pide:

- Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s .
- Hallar la distancia desde el punto $A(0, 1, -1)$ a la recta s .

42. Sea π el plano que contiene a los puntos $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$ y $R(0, 0, 3)$. Se pide:

- Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P , Q y R .
- Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π .

43. Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} y=1 \\ z=3 \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

se pide:

- Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.
- Hallar la mínima distancia entre r_1 y r_2 .

44. Dados el plano

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$$

y el plano π_2 determinado por el punto $P(0, 2, 4)$ y los vectores $\vec{u}_1 = (0, 2, 6)$ y $\vec{u}_2 = (1, 0, b)$, se pide:

- Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.
- Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2 .
- Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 .

45. Los puntos $P(1, 2, 1)$, $Q(2, 1, 1)$ y $A(a, 0, 0)$ con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A , B , C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

46. a) Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas:

$$r_1 \equiv x = y = z, \quad r_2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

- b) Hallar la recta r que corta perpendicularmente a las rectas:

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}; \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

47. Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1, \quad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$$

se pide:

- a) Estudiar su posición relativa.
 b) En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos; en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.
48. a) Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.
 b) Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(-2, 1, 1)$.
 c) Hallar el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y P .

49. Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0, \quad \pi_2 \equiv 2x + y - 3z - 1 = 0$$

y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{2}$$

se pide:

- a) El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2 .
 b) El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY , XZ e YZ .
 c) La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2 .
50. Dado el punto $P(0, 1, 1)$ y las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}, \quad s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

se pide:

- a) Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .
 b) Determinar la recta que pasa por el punto P , tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s .

Solución del segundo apartado:

- (i) Plano perpendicular a r por P :

$$2x + 1(y-1) - 1(z-1) = 0 \implies 2x + y - z = 0$$

(ii) Plano que contiene a s y P : el haz de planos de s es:

$$\lambda x + \mu y = 0$$

Si el plano debe pasar por $P(0, 1, 1)$:

$$\lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 = 0 \implies \mu = 0$$

El plano buscado es $x = 0$.

(iii) La recta que nos piden es la intersección de los dos planos, es decir:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

51. Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

- Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.
- Hallar el valor de a para que el tetraedro con vértices P_1 , P_2 , P_3 y P_4 tenga volumen igual a 7.
- Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3 .

52. Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}; \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 \end{cases}$$

se pide:

- Estudiar su posición relativa.
- Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2 .

53. a) Dados los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 0, 2)$ y la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

determinar los puntos de r que equidistan de P y Q .

- Determinar la ecuación del plano π que pasa por el punto Q y es perpendicular a r .

54. Una de las caras del paralelepípedo H tiene vértices en los puntos $A(4, 2, 8)$, $B(6, 4, 12)$, $C(6, 0, 10)$ y $D(8, 2, 14)$.

- Si el punto $E(6, 8, 28)$ es otro de los vértices, hallar el volumen de H .
- Hallar el punto E' simétrico de E respecto del plano que contiene a la cara $ABCD$.

55. Dadas la recta r y la familia de rectas s , mediante:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y = -3 \\ z = 1 \end{cases}; \quad s \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = a \\ x + z = 0 \end{cases}$$

se pide:

- Hallar el valor de a para que ambas rectas se corten. Calcular el punto de corte.
- Hallar la ecuación del plano determinado por ambas rectas cuando ambas se cortan.

56. Se dan la recta r y el plano π , mediante:

$$r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}, \quad \pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$$

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a 1.

57. Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}, \quad s \equiv \begin{cases} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{cases}$$

se pide:

- Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2, 3, 4)$ y es paralelo a las rectas r y s .
- Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4, -1, 2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

58. Dado el punto $P(2, 1, -1)$ se pide:

- Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto $Q(3, 0, 2)$.
- Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r \equiv x-1 = y-1 = z$.
- Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x+y+z=3$.

59. Dado el punto $P(-1, 0, 2)$ y las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3 \end{cases}$$

se pide:

- Determinar la posición relativa de r y s .
 - Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s .
 - Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s .
60.
 - Hallar los puntos de corte de la recta de dirección $(2, 1, 1)$ y que pasa por el punto $P(4, 6, 2)$, con la superficie esférica de centro $C(1, 2, -1)$ y radio $\sqrt{26}$.
 - Hallar la distancia del punto $Q(-2, 1, 0)$ a la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z-3}{2}$$

61. Dados el punto $P(1, 0, -1)$, el plano $\pi \equiv 2x - y + z + 1 = 0$, y la recta:

$$r \equiv \begin{cases} -2x+y-1=0 \\ 3x-z-3=0 \end{cases}$$

se pide:

- Determinar la ecuación del plano que pasa por P , es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π .
 - Hallar el ángulo entre r y π .
62. Dados los puntos $A(2, -2, 1)$, $B(0, 1, -2)$, $C(-2, 0, -4)$, $D(2, -6, 2)$, se pide:
- Probar que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.
 - Hallar el área del triángulo ABC .
63. Dados el punto $P(1, 2, -1)$ y el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z + 2 = 0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en un punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:
- Hallar el punto de tangencia P' .
 - Hallar la ecuación de S .

64. Sean r_A la recta con vector de dirección $(1, \lambda, 2)$ que pasa por el punto $A(1, 2, 1)$, r_B la recta con vector de dirección $(1, 1, 1)$ que pasa por $B(1, -2, 3)$, y r_C la recta con vector de dirección $(1, 1, -2)$ que pasa por $C(4, 1, -3)$. Se pide:
- Hallar λ para que r_A y r_B se corten.
 - Hallar λ para que la recta r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C .
 - Hallar el ángulo que forman r_B y r_C .

65. La recta r pasa por $P(2, -1, 0)$ y tiene vector director $(1, \lambda, -2)$; la recta s pasa por $Q(1, 0, -1)$ y tiene vector director $(2, 4, 2)$.

- Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre r y s sea $\frac{9}{\sqrt{59}}$.
- Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y por Q .

66. Dados los puntos $P(-1, -1, 1)$, $Q(1, 0, 2)$ y los planos:

$$\pi_1 \equiv x - z = 0, \quad \pi_2 \equiv my - 6z = 0, \quad \pi_3 \equiv x + y - mz = 0,$$

se pide:

- Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta.
 - Para $m = 3$ hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 .
 - Hallar la distancia entre los puntos Q y P' , siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano π_1 .
67. (a) Dados los vectores $\vec{u} = (2, 3, 4)$, $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ y $\vec{w} = (-1, \lambda, -5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} tenga volumen 6.
- (b) Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\vec{u} = (2, -1, 4)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

68. Dados el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π .

69. Dados el punto $P(-4, 6, 6)$, el origen de coordenadas O y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

se pide:

- Determinar un punto Q de la recta r , de modo que su proyección Q' sobre OP sea el punto medio de este segmento.
 - Determinar la distancia de P a r .
 - ¿Existe algún punto R de la recta r , de modo que los puntos O , P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto o los puntos con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.
70. Dados los planos $\pi_1 : ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 : x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a , para cada uno de los siguientes supuestos:
- Que π_1 y π_2 sean paralelos.
 - Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.
 - Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $x = y$.

71. Dado el punto $P(2, 1, -1)$, determine el punto simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0, 2, -1)$, $B(1, -3, 0)$ y $C(2, 1, 1)$.

72. Se consideran los puntos $A(0, 5, 3)$, $B(0, 6, 4)$, $C(2, 4, 2)$ y $D(2, 3, 1)$ se pide:

- (a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo.
 (b) Calcular el área de dicho paralelogramo.
 (c) Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio de dicho paralelogramo.

Soluciones:

- (1) $x - y + z = 0$
 (2) (a) $D(0, 2, 2)$ (b) rombo
 (3) (a) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (b) $4x + y - z + 2 = 0$, $2x - 3y + 3z - 1 = 0$ (c) $8x + 5y + z - 8 = 0$, $x - 2y + z - 1 = 0$
 (4) (a) $a = -2$ (b) $x + y - 2z + 2 = 0$, $x - 2y + z + 1 = 0$
 (5) (a) $\frac{22}{\sqrt{26}}$ (b) $x - 3y - 9z + 1 = 0$, $7x - 8y - 11z + 2 = 0$
 (6) (a) $5x - 7y - 16z + 17 = 0$ (b) $x = -2 + 5\lambda$, $y = 1 - \lambda$, $z = 2\lambda$
 (7) $2x + y - 2 = 0$
 (8) (a) $k = 4$ (b) $x + 2y - z + 5 = 0$
 (9) (a) $Q(1, 0, -1)$ (b) $3x + 3y + 3z - 10 = 0$, $3x + 3y + 3z + 10 = 0$
 (10) (a) se corta perpendicularmente con π_1 , paralela a π_2 (b) se cortan (c) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$
 (11) (a) $k = \frac{1}{3}$ dos paralelos y otro que los corta, $k = -2$ se cortan en una recta, demás casos: se cortan en un punto
 (b) $\vec{u} = (1, 0, 1)$
 (12) (a) $O'(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7})$ (b) $2x - y = 0$ (c) 6
 (13) (a) $2x - y + 2z + 5 = 0$, $z = 0$, $2x - y + 2z - 13 = 0$, $z = 0$ (b) son dos rectas paralelas
 (14) (a) $\frac{2}{3}$ (b) $x = 2t$, $y = -2t$, $z = t$ (c) $\frac{3}{2}$
 (15) (a) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$ (b) $(0, 1, 1)$, $(3, 2, -3)$
 (16) (a) $3x - 10y + 6z + 1 = 0$; $x + 5y + 2z - 9 = 0$ (b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$
 (17) $\lambda \neq 2$, $\lambda \neq 4$: los planos se cortan en un punto; $\lambda = 2$: dos planos paralelos y otro que los corta; $\lambda = 4$: los planos se cortan en rectas paralelas.
 (18) (a) $x = -3t$, $y = t$, $z = t$ (b) $(3, -1, -1)$
 (19) (a) $-2y + 3z + 1 = 0$, $x - y + 6z + 2 = 0$ (b) $x - 5y + 12z + 4 = 0$ (c) $x + 13y - 15z - 5 = 0$
 (20) (a) $4x + 2y - z = 0$, $x - 8y + 5z = 0$ (b) $7x + 5y - z - 3 = 0$, $x + 15y - 18z - 23 = 0$
 (21) $(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$, $(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$
 (22) paralelas
 (23) (a) $2x - 2y + 2z - 1 = 0$ (b) $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3$ (c) $x = 1 - t$, $y = 2$, $z = t$
 (24) (a) $\lambda = 3$ (también -3) (b) $\frac{12}{13}$
 (25) (a) $3x + 3y - z = 0$ (b) $x + y + 1 = 0$, $x - 2y - 3z - 14 = 0$
 (26) (a) no (b) (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
 (27) $(6, 8, -4)$, $(0, 2, 2)$
 (28) $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$
 (29) (a) $-3x + 5y + 4z - 13 = 0$ (b) $\frac{32}{5\sqrt{2}}$
 (30) (a) (b) $a = 0$ se cortan, $a \neq 0$ se cruzan (c) $\sqrt{2}$
 (31) (a) $2x + 3y + z - 1 = 0$ (b) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$
 (32) (a) plano mediador $x + 3z - 5 = 0$ (b) $(-1, 1, -3)$, $(\frac{1}{3}, 1, 1)$
 (33) $4x + y - 2z + 2 = 0$, $11x + 2y - 7z - 2 = 0$
 (34) (a) $(3, 2, -4)$ (b) $x + y + z = 0$, $x + y + z - 2 = 0$
 (35) (a) $(\frac{8}{11}, \frac{24}{11}, \frac{8}{11})$ (b) $\frac{1}{\sqrt{11}}$ (c) $\frac{32}{9}$
 (36) (a) $x - 2z - 1 = 0$ (b) $\frac{7}{\sqrt{5}}$ (c) no
 (37) $a = 1$, $b = -1$
 (38) $2x - y + 2z - 8 = 0$, $2x - y + 2z + 10 = 0$
 (39) $\frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$

- (40) (a) $12x + 11y + 57z + 217 = 0$, $35x + 53y - 22z = 0$ (b) $\frac{5}{\sqrt{251}}$
- (41) (a) $2x - y + 1 = 0$ (b) 3
- (42) (a) 1 (b) $(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49})$
- (43) (a) $y + z - 4 = 0$, $x = 0$ (b) $\sqrt{2}$
- (44) (a) $b = -2$, $a \neq 2$ (si $a = 2$ son coincidentes) (b) $x = \frac{3}{2}$, $y = t$, $z = -2 + 3t$ (c) $2x - 3y + z - 3 = 0$
- (45) $a = \frac{9}{2}$
- (46) (a) 32 (b) $8x + 7y + 11z - 16 = 0$, $3x + y + 9z - 8 = 0$
- (47) (a) se cortan (b) $P(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$, $\vec{u} = (0, 2, 1)$
- (48) (a) $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$ (b) $-2x + y + z - 3 = 0$ (c) $\frac{4}{3}$
- (49) (a) $P_1(3, 0, 0)$, $P_2(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{2})$ (b) $\frac{1}{36}$ (c) $\frac{x-13}{6} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-10}{5}$ o bien $x - 2y - 3 = 0$, $2x + y - 3z - 1 = 0$
- (50) (a) $(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3})$ (b) $2x + y - z = 0$, $x = 0$
- (51) (a) $a = \frac{4}{3}$ (b) $a = \frac{10}{3}$, $a = -\frac{2}{3}$ (c) $4y + 10z - 31 = 0$
- (52) (a) se cruzan (b) $\frac{4}{\sqrt{3}}$
- (53) (a) $(15, -\frac{11}{2}, 3)$ (b) $2x - y - 2 = 0$
- (54) (a) 112 (b) (18, 12, 20)
- (55) (a) $a = -3$ (b) $x + 2y + 3 = 0$
- (56) $(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, 3)$, $(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, -3)$
- (57) (a) $3x - y + 2z - 11 = 0$ (b) $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$
- (58) (a) (4, -1, 5) (b) (0, 1, 1) (c) $(-\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$
- (59) (a) se cruzan (b) $-x + 4y - 3z + 5 = 0$, $-x + y + 2z - 5 = 0$ (c) $x + y - 2z = 0$, $z - 3 = 0$
- (60) (a) $(-4, 2, -2)$, $(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}, \frac{5}{3})$ (b) $3\sqrt{2}$
- (61) (a) $x + y - z - 2 = 0$ (b) $\arcsen \frac{3}{2\sqrt{21}}$
- (62) (a) Los vectores $\vec{AB} = (-2, 3, -3)$ y $\vec{CD} = (4, -6, 6)$ son paralelos. $\sqrt{149/22}$ (b) $\frac{\sqrt{149}}{2}$
- (63) (a) $P'(0, 0, 1)$ (b) $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \frac{9}{4}$
- (64) (a) $\lambda = -1$ (b) $\lambda = 1$ (c) $\frac{\pi}{2}$
- (65) (a) $\lambda = 3$ (b) $\lambda = -1$
- (66) (a) $m = -2$, $m = 3$ (b) $x + 2y + z + 2 = 0$ (c) $\sqrt{2}$
- (67) (a) 0 y 6 (b) $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 0$
- (68) $x - 2y + 2z - 12 = 0$, $x - 2y + 2z + 6 = 0$
- (69) (a) (4, 14, -4) (b) * (c) *
- (70) (a) $a = -1$ (b) $a = \frac{1}{2}$ (c) $a = 1$
- (71) $P'(0, 1, 1)$
- (72) (a) * (b) $2\sqrt{2}$ (c) $x = 1$; $y = 9/2 + \lambda$; $z = 5/2 - \lambda$

24. Probabilidad

- Se lanzan dos dados equilibrados. Sea A el suceso “obtener números iguales en los dos dados” y B “obtener dos números impares”. Calcular las probabilidades:
 - $p(A)$
 - $p(B)$
 - $p(A \cap B)$
 - $p(A \cup B)$
- Se lanza una moneda tres veces:
 - Escribir el espacio muestral.
 - Calcular la probabilidad de obtener exactamente una cruz.
- Un dado octaédrico tiene sus caras numeradas de 1 a 8. En un lanzamiento de este dado, calcular la probabilidad de obtener:
 - Un número par.
 - Un múltiplo de 3.
 - Un múltiplo de 4.
 - Un número que no sea múltiplo de 4.
 - Un número menor que 4.
- Se lanzan una moneda y un dado. Sea A el suceso “obtener una cara” y B el suceso “obtener al menos 3”. Calcular las probabilidades:
 - $p(A)$
 - $p(B)$
 - $p(A \cup B)$
 - $p(A \cap B)$
 - $p(\bar{A} \cup B)$
- En una cierta calle un tercio de sus habitantes no leen el periódico, un cuarto leen un periódico nacional y tres quintos leen un periódico local. ¿Cuál es la probabilidad de que en una casa elegida al azar se lean ambos periódicos?
- Se lanzan dos dados equilibrados. Sea A el suceso “el producto de los números obtenidos es par” y B el suceso “la suma de los números obtenidos es impar”. Calcular:
 - $p(A)$
 - $p(B)$
 - $p(A \cup B)$
 - $p(A \cap B)$
 - $p(\bar{A} \cup \bar{B})$
- En una clase de 25 estudiantes, 15 estudian francés, 13 estudian malayo y 5 no estudian ninguna lengua. Si se escoge un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que estudie francés y malayo?
- De los 32 estudiantes de una clase, 18 juegan al golf, 16 tocan el piano y 7 hacen ambas actividades. Si se escoge un estudiante al azar, calcular la probabilidad de que:
 - Juegue al golf pero no toque el piano.
 - Toque el piano pero no juegue al golf.

9. En una ciudad, el 40 % de la población lee el periódico A , el 30 % lee el periódico B y el 10 % lee el periódico C . También se sabe que un 5 % lee A y B , el 4 % lee A y C , el 3 % lee B y C y un 2 % lee los tres periódicos. Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar:
- Lea solamente A .
 - Lea solamente B .
 - No lea ningún periódico.
10. Sean X e Y sucesos tales que $p(X) = \frac{1}{4}$, $p(Y) = \frac{1}{8}$ y $p(X \cap Y) = \frac{1}{8}$. Calcular:
- $p(X \cup Y)$
 - $p(\overline{X \cup Y})$
11. Si $p(A) = 0,2$ y $p(B) = 0,5$ y $p(A \cap B) = 0,1$, calcular:
- $p(A \cup B)$
 - $p(\overline{A \cup B})$
 - $p(\overline{A} \cup B)$
12. En una clase hay 14 chicas y 11 chicos. Se escogen al azar dos estudiantes para representar a la clase en una asamblea:
- ¿De cuántas maneras se pueden elegir los dos estudiantes?
 - Calcular las probabilidades de que los estudiantes elegidos sean (I) dos chicas (II) dos chicos (III) un chico y una chica
13. De un grupo de 10 estudiantes se eligen cuatro al azar para formar un equipo. ¿Cuál es la probabilidad de que dos estudiantes concretos Sofía y Jerónimo sean elegidos para el equipo?
14. En una fuente hay 5 naranjas y 3 limones. se seleccionan dos frutas al azar. Calcular la probabilidad de que sean (a) dos limones (b) una naranja y un limón
15. En un acuario hay 7 peces rojos y 5 peces amarillos. Con una red se escogen al azar dos de ellos. Calcular la probabilidad de que los peces sean (a) los dos rojos (b) de colores diferentes
16. En un vaso hay 4 canicas verdes, 5 rojas y 3 azules. Se escogen tres de ellas al azar. Calcular la probabilidad de que las canicas seleccionadas sean (a) todas rojas (b) de diferente color (c) al menos una verde
17. Los sucesos A y B son tales que $p(A) = 0,4$ y $p(B) = 0,6$ y $p(A \cup B) = 0,7$. Calcular las probabilidades:
- $p(A \cap B)$
 - $p(A \cap \overline{B})$
 - $p(\overline{A} \cup \overline{B})$
18. De los estudiantes de una clase, un 80 % son más altos de 160 cm y un 75 % no miden más de 180 cm. Si se escoge un estudiante de la clase al azar, calcular la probabilidad de que su estatura esté comprendida entre 160 y 180 cm.
19. Si $p(A) = 0,6$, $p(B) = 0,55$ y $p(A \cap B) = 0,2$ calcular:
- $p(A \cup B)$
 - $p(\overline{A} \cap B)$
 - $p((A \cup B) - (A \cap B))$
20. Si $p(A \cap \overline{B}) = 0,5$, $p(A \cap B) = 0,2$ y $p(A \cup B) = 0,85$, calcular:
- $p(A)$
 - $p(B)$

(c) $p(\bar{A} \cap B)$

21. La siguiente tabla muestra las frecuencias relativas de las edades de los estudiantes de un instituto:

Edad (en años)	13	14	15	16	17
Frecuencia relativa	0,15	0,31	0,21	0,19	0,14

(a) Se elige un estudiante al azar. Calcular la probabilidad de que tenga (I) 15 años (II) 16 años o más

(b) Suponiendo que en ese instituto hay 1200 estudiantes calcular cuántos de ellos tienen 15 años.

22. Se lanzan dos dados 500 veces. Las frecuencias de los distintos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencias	6	8	21	34	65	80	63	77	68	36	42

Usando estas frecuencias para estimar las probabilidades calcular la probabilidad de:

(a) La suma sea múltiplo de 5.

(b) La suma sea un número par.

(c) La suma sea divisible por 5 o sea un número par.

23. Se lanza un dado equilibrado de 10 caras. Calcular la probabilidad de que el número obtenido sea:

(a) Primo.

(b) O primo o múltiplo de 4.

(c) Múltiplo de 4 o múltiplo de 3.

24. De las 53 personas que trabajan en una escuela 36 toman té, 18 café y 10 no beben ni té ni café.

(a) ¿Cuántos toman té y café?

(b) Si se elige uno de ellos al azar calcular la probabilidad de que (I) Beba té pero no café (II) Beba té y café

25. De los 27 estudiantes de una clase, 15 han elegido Arte y 20 han elegido Teatro. También hay 4 que no han elegido ninguna de las dos asignaturas.

(a) ¿Cuántos han elegido ambas asignaturas?

(b) Se escoge al azar un estudiante. Calcular la probabilidad de que (I) Haya elegido teatro pero no arte (II) Haya elegido alguna de las dos asignaturas (III) Supuesto que ha elegido Teatro haya elegido Arte

26. De los sucesos A y B se sabe que $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,35$, $p(A) = 0,25$ y $p(B) = 0,6$. Calcular:

(a) $p(A \cap B)$

(b) $p(A|B)$

(c) $p(\bar{B}|\bar{A})$

27. Se elige al azar un número de la siguiente lista:

1 2 4 7 11 16 22 29

Calcular la probabilidad de que:

(a) Sea par pero no múltiplo de 4.

(b) Sea mayor que 5 y menor que 15.

(c) Sea menor que 5 si es menor que 15.

- (d) Esté comprendido entre 10 y 20 sabiendo que está comprendido entre 5 y 25.
28. La probabilidad de que un estudiante elija Tecnología y Español es 0,1. La probabilidad de que escoja Tecnología es 0,6. ¿Cuál es la probabilidad de que escoja Español un estudiante que ha escogido Tecnología?
29. U y V son sucesos mutuamente excluyentes. Se sabe que $p(U) = 0,26$ y $p(V) = 0,37$. Calcular:
- $p(U \cap V)$
 - $p(U|V)$
 - $p(U \cup V)$
30. La siguiente tabla muestra datos correspondientes a 50 jugadores de tenis:

	Zurdos	Diestros	Total
Hombres	5	32	37
Mujeres	2	11	13
Total	7	43	50

- Se selecciona al azar un jugador del grupo. Calcular la probabilidad de que sea:
- Hombre y zurdo
 - Diestros
 - Diestra sabiendo que se trata de una mujer
31. Si $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,6$, $p(C) = 0,3$, $p(A \cap B) = 0,24$, $p(B \cap C) = 0,15$ y $p(A \cup C) = 0,52$, ¿Cuáles de los sucesos A , B y C son independientes?
32. Se extrae una carta de una baraja de 52 cartas. Sean los sucesos: A = “la carta extraída es una reina”, B = “el color de la carta extraída es rojo” y C = “la carta es una figura”.
¿Cuáles de estos sucesos son independientes? Explicar la respuesta.
33. Si $p(A) = \frac{1}{3}$, $p(A \cup B) = \frac{5}{6}$ y $p(B|A) = \frac{3}{4}$ calcular $p(B)$. ¿Son independientes los sucesos A y B ?
34. Los sucesos A y B son independientes y tales que $p(A) = 0,45$ y $p(A \cap B) = 0,18$. Calcular la probabilidad:
- $p(B)$
 - $p((A \cup B))$
 - $p(\bar{A} \cup \bar{B})$
35. En una caja hay 3 bolas blancas y 7 bolas negras. Se sacan sucesivamente y sin reemplazamiento dos bolas de la caja.
- Dibujar el diagrama en árbol que representa esta información.
 - Calcular la probabilidad de que (I) Ambas bolas sean blancas (II) Ambas bolas sean negras.
36. Una estantería contiene 12 juguetes, 7 coches y 5 camiones. Un niño coge 2 juguetes de la estantería:
- Dibujar el diagrama en árbol que representa esta información.
 - Calcular la probabilidad de que (I) Ambos juguetes sean coches (II) Escoja al menos un coche.
37. Un jugador de tenis ha observado que cuando entra su primer servicio, la probabilidad de que gane el punto es 0,75. En cambio, cuando juega con el segundo servicio la probabilidad es 0,45. El primer servicio entra 3 de cada 5 veces y el segundo 3 de cada 4.
- Calcular la probabilidad de que este jugador gane el próximo punto que juega con su servicio.

- (b) Supuesto que ha ganado el punto, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho jugando con su primer servicio?
38. Se tienen dos cajas. La primera caja contiene 9 cartas numeradas de 1 a 9 y la segunda contiene 5 cartas numeradas de 4 a 8. Se escoge al azar una caja y se extrae de ella una carta.
- (a) Calcular la probabilidad de obtener una carta con un número par.
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta par se haya extraído de la primera caja?
39. En una fábrica 2 máquinas hacen cerraduras y las cerraduras se guardan en un almacén. La primera máquina produce el 60% de las cerraduras de las que el 5% son defectuosas mientras que sólo lo son el 2% de las cerraduras producidas por la segunda máquina. Se selecciona al azar una cerradura del almacén:
- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la cerradura seleccionada sea defectuosa?
- (b) Supuesto que la cerradura seleccionada sea defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que fuera producida por la primera máquina?
40. En una caja hay 14 bolas blancas y 16 bolas negras mientras que, en una segunda caja hay 7 blancas y 12 negras. Se saca una bola de la primera caja y se coloca en la segunda. Después, se extraen dos bolas de la segunda caja.
- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean negras?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la primera caja fuera blanca si las dos bolas extraídas de la segunda han sido blancas?
41. Un espacio muestral contiene dos sucesos A y B que cumplen $p(B) = \frac{2}{3}$, $p(A|B) = \frac{5}{6}$ y $p(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{1}{4}$.
- (a) Dibujar el diagrama en árbol correspondiente a esta información.
- (b) Calcular (i) $p(A)$ (ii) $p(B|A)$ (iii) $p(\bar{A}|\bar{B})$
42. Un estudio llevado a cabo sobre un gran número de personas muestra que un 18% tienen problemas de pulmón. De éstos, un 70% son fumadores empedernidos, otro 20% son fumadores ocasionales y, finalmente, un 10% son no fumadores. De los que no tienen problemas de pulmón se encuentra que un 5% son fumadores empedernidos, un 15% son fumadores ocasionales y un 80% son no fumadores. Se escoge al azar una persona del grupo.
- (a) Calcular la probabilidad de que sea un no fumador.
- (b) Calcular la probabilidad de que tenga problemas de pulmón si es un fumador empedernido.
43. Se tienen tres urnas A , B y C . En la urna A hay 2 cubos blancos y 4 cubos rojos, en la urna B hay 5 blancos y 3 rojos y en la urna C hay 4 blancos y 6 rojos. Se elige una urna al azar y se extrae un cubo de ella:
- (a) Calcular la probabilidad de sacar un cubo rojo.
- (b) Supuesto que se ha extraído un cubo rojo, calcular la probabilidad de que se haya extraído de la urna C .
44. Se eligen al azar y sin reemplazamiento dos letras del conjunto $\{a, b, c, d, e, f, o\}$. Después se elige una tercera letra. ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera letra sea una vocal?
45. El 25% de los aparatos que llegan a un servicio técnico tienen garantía. Entre los que no tienen garantía, un 20% ya fueron reparados en otra ocasión. Finalmente, el 5% de los aparatos tienen garantía y además ya fueron reparados en otra ocasión.
- (a) ¿Qué porcentaje de los aparatos que llegan al servicio técnico ya fueron reparados en otra ocasión?
- (b) ¿Qué porcentaje no fueron reparados en otra ocasión y además no tienen garantía?
- (c) Un aparato que acaba de llegar ya fue reparado en otra ocasión. ¿Qué probabilidad hay de que tenga garantía?

46. Sean A y B dos sucesos tales que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(\bar{B}) = \frac{2}{5}$ y $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$. Calcular:
- $p(B|A)$
 - $p(\bar{A}|B)$
47. En una clase de 20 alumnos hay 12 que estudian Biología, 15 que estudian Historia y 2 alumnos que no estudian ni Biología ni Historia.
- Represente esta información en un diagrama de Venn.
 - Halle la probabilidad de que un alumno de esta clase elegido al azar esté estudiando ambas asignaturas: Biología e Historia.
 - Sabiendo que un alumno dado, elegido al azar, estudia Biología, halle la probabilidad de que este alumno también estudie Historia.
48. Una bolsa contiene diez monedas equilibradas. Cinco de dichas monedas tienen cara y cruz, otras tres son monedas con dos caras y las dos restantes son monedas con dos cruces. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza.
- Calcúlese la probabilidad de que salga cara en dicho lanzamiento.
 - Si en el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida tenga cara y cruz?

Soluciones:

- (1) (a) $\frac{6}{36}$ (b) $\frac{9}{36}$ (c) $\frac{3}{36}$ (d) $\frac{12}{36}$
- (2) (a) $\{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$ (b) $\frac{3}{8}$
- (3) (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{3}{4}$ (e) $\frac{3}{8}$
- (4) (a) $\frac{6}{12}$ (b) $\frac{8}{12}$ (c) $\frac{10}{12}$ (d) $\frac{4}{12}$ (e) $\frac{10}{12}$
- (5) $\frac{11}{60}$
- (6) (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{2}$
- (7) $\frac{8}{25}$
- (8) (a) $\frac{11}{32}$ (b) $\frac{9}{32}$
- (9) (a) 0,33 (b) 0,24 (c) 0,30
- (10) (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{4}$
- (11) (a) 0,6 (b) 0,4 (c) 0,9
- (12) (a) 300 (b) (i) $\frac{91}{300}$ (ii) $\frac{55}{300}$ (iii) $\frac{77}{150}$
- (13) $\frac{2}{15}$
- (14) (a) $\frac{3}{28}$ (b) $\frac{15}{28}$
- (15) (a) $\frac{7}{22}$ (b) $\frac{35}{66}$
- (16) (a) $\frac{1}{22}$ (b) $\frac{3}{11}$ (c) $\frac{41}{55}$
- (17) (a) 0,3 (b) 0,1 (c) 0,7
- (18) 0,55
- (19) (a) 0,95 (b) 0,35 (c) 0,75
- (20) (a) 0,7 (b) 0,35 (c) 0,15
- (21) (a) (i) 0,21 (ii) 0,33 (b) 252
- (22) (a) 0,204 (b) 0,53 (c) 0,598
- (23) (a) $\frac{4}{10}$ (b) $\frac{6}{10}$ (c) $\frac{5}{10}$
- (24) (a) 11 (b) (i) $\frac{25}{53}$ (ii) $\frac{11}{53}$
- (25) (a) 12 (b) (i) $\frac{8}{27}$ (ii) $\frac{4}{27}$ (iii) $\frac{3}{5}$
- (26) (a) 0,20 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{7}{15}$
- (27) (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$
- (28) $\frac{1}{6}$
- (29) (a) 0 (b) 0 (c) 0,63

- (30) (a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{43}{50}$ (c) $\frac{11}{13}$
(31) Son independientes A y B
(32) Son independientes A y B , B y C
(33) $p(B) = \frac{3}{4}$, sí
(34) (a) 0,40 (b) 0,67 (c) 0,82
(35) (a) * (b) $\frac{1}{15}$, $\frac{7}{15}$
(36) (a) * (b) $\frac{42}{132}$ (c) $\frac{112}{132}$
(37) (a) 0,5850 (b) 0,7692
(38) (a) $\frac{47}{90}$ (b) $\frac{20}{47}$
(39) (a) 0,0380 (b) 0,7895
(40) (a) $\frac{181}{475}$ (b) $\frac{7}{13}$
(41) (a) * (b) $\frac{29}{36}$, $\frac{20}{29}$ $\frac{1}{4}$
(42) (a) 0,6740 (b) 0,7545
(43) (a) $\frac{197}{360}$ (b) $\frac{72}{197}$
(44) $\frac{3}{7}$
(45) (a) 0,20 (b) 0,60 (c) 0,25
(46) (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{7}{12}$
(47) (a) * (b) $\frac{9}{20}$ (c) $\frac{3}{4}$
(48) (a) $\frac{11}{20}$ (b) $\frac{5}{11}$

25. Variable aleatoria

1. Una variable aleatoria discreta tiene la siguiente función de probabilidad:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0,21	0,25	0,41	a	0,01

Calcular: (a) El valor de a (b) $p(1 \leq X \leq 3)$ (c) $p(X \leq 3)$

2. La variable aleatoria discreta X tiene la siguiente función de probabilidad:

$$f(x) = p(X = x) = k(4 - x)$$

para $x = 0, 1, 2, 3$ y $f(x) = 0$ para los demás valores de x .

Calcular: (a) El valor de la constante k (b) $p(1 \leq X < 3)$.

3. Una variable aleatoria discreta X tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	1	5	10
$p(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Calcular el valor de (a) $E(X)$ (b) $E(X^2)$ (c) $\text{Var } X$ (d) Desviación típica de X

4. Una variable aleatoria discreta X puede tomar solamente los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5. La distribución de probabilidad está dada en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5
$p(X = x)$	a	a	a	b	b	b

Si se verifica que $p(X \geq 2) = 3p(X < 2)$: (a) Calcular los valores de a y b (b) Calcular los valores esperados de X y de X^2 (c) Calcular la varianza de X

5. Una variable aleatoria T toma solo valores enteros y tiene una función de probabilidad definida por:

$$f(t) = p(T = t) = \begin{cases} kt^2 & \text{si } t = 1, 2, 3 \\ k(8 - t)^2 & \text{si } t = 4, 5, 6, 7 \\ 0 & \text{para los demás valores} \end{cases}$$

donde k es una constante:

- (a) Calcular el valor de k .
 (b) Calcular $p(T = 4)$, $p(T \leq 4)$ y $p(T = 4 | T \leq 4)$
 (c) Calcular $E(t)$ y $\text{Var}(t)$.
 (d) Determinar la moda de T
6. Una variable aleatoria discreta tiene una distribución de probabilidad que se expresa en la siguiente tabla:

x	5	10	15	20	25	30
$p(X = x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

- (a) Calcular $p(X \leq 15)$
 (b) Construir la tabla de la función de distribución para esta variable aleatoria.
 (c) Calcular la mediana de la distribución.

7. Un centro de llamadas de emergencia tiene en servicio 5 líneas que operan 24 horas diarias. La variable aleatoria L es el número de líneas en uso para períodos de 5 minutos. La distribución de probabilidades es la siguiente:

n	0	1	2	3	4	5
$p(L = n)$	0,07	0,21	0,25	0,31	0,12	0,04

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos tres líneas estén en uso simultáneamente?
- (b) Calcular la media y la varianza de L
- (c) Construir la tabla para la función de distribución de esta variable.
- (d) Calcular el valor de la mediana.
8. Un dado tiene sus caras numeradas 1, 2, 2, 3, 3 y 3. Se lanza el dado dos veces y se representa mediante la variable aleatoria S la suma de los valores obtenidos.
- (a) Construir las tablas para la función de probabilidad y la función de distribución de S .
- (b) Calcular la media, la mediana y la moda de S .
- (c) Calcular la desviación típica de S .
9. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria X está dada por $f(x) = kx$ donde $x = 1, 2, \dots, n$ y k es un parámetro.
- (a) Demostrar que $k = \frac{2}{n^2+n}$
- (b) Calcular el valor esperado de X .
10. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta X está dada por $f(x) = 3^{a-x}$ donde $x = 1, 2, 3, \dots$ y a es un parámetro:
- (a) Demostrar que $a = \log_3 2$.
- (b) Calcular una expresión de la función de distribución de X .
11. Se lanza una moneda diez veces. Calcular la probabilidad de obtener (a) exactamente 4 caras (b) al menos seis caras (c) no más de cinco caras
12. Una moneda está trucada de modo que la probabilidad de obtener cara es de 0,6. Calcular la probabilidad de obtener (a) exactamente 2 caras cuando la moneda se lanza 5 veces (b) al menos 3 caras cuando la moneda se lanza 7 veces (c) más caras que cruces cuando la moneda se lanza 9 veces
13. En la producción en masa de bombillas la probabilidad de que una de ellas sea defectuosa es de 1%. Se seleccionan bombillas al azar y se ponen en cajas de ocho.
- (a) Si se elige una caja al azar calcular la probabilidad de que contenga (I) al menos una bombilla defectuosa (II) no más de dos bombillas defectuosas
- (b) Supuesto que la caja que se ha elegido al azar contiene al menos una bombilla defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que contenga exactamente dos bombillas defectuosas?
14. Sea $X \sim B(6; 0,35)$. Calcular:
- (a) La moda a de X .
- (b) La mediana b de X
- (c) $p(X < 2a | X > b)$
15. Sea $X \sim B(6; 0,4)$:
- (a) Construir tres tablas para la función de distribución binomial de X cuando $n = 2$, $n = 5$ y $n = 10$.
- (b) Supuesto que $p(X \leq 10) > 0,5$ calcular el valor más grande de n .
16. Si $X \sim B(n; 0,3)$ y $p(X > 3) > 0,7$ encontrar el valor más pequeño de n .

17. La probabilidad de que Joe dé en el blanco es de 0,6. Calcular el menor número de intentos que necesita Joe para poder asegurar que la probabilidad de dar en el blanco al menos una vez es mayor que 95 %.
18. Si $X \sim B(8; 0,4)$ calcular (a) $p(X = 5)$ (b) $p(X \leq 5)$ (c) $p(X < 5)$ (d) La media de X (e) La varianza de X .
19. Sabiendo que $Y \sim B(7; 0,3)$ calcular (a) $p(Y = 1) + p(Y = 2)$ (b) $p(Y \leq 2)$ (c) $p(Y \geq 2)$ (d) la mediana de Y
20. Si $T \sim B\left(5; \frac{1}{2}\right)$:
- Demostrar que $p(T = 5) = \frac{1}{32}$.
 - Construir la tabla de la distribución de probabilidad de T . a partir de ella calcular la moda de T .
 - Construir la tabla para la función de distribución de T .
 - Calcular la mediana de T .
21. La probabilidad de que llueva en un día de junio en Villaseca es 0,02.
- ¿Cuál es la probabilidad de que llueva exactamente 3 días de junio en esa ciudad?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva los cinco primeros días de junio?
 - ¿Cuál es el valor esperado para el número de días de lluvia en Villaseca?
22. Una variable aleatoria R sigue una distribución binomial $B(n; p)$ con media 2 y varianza 1,5. Calcular los valores de n y p .
23. En un test de elección múltiple hay 20 preguntas. Para cada una de ellas puede elegirse entre cuatro respuestas y solamente una de ellas es correcta.
- Si un estudiante elige al azar las respuestas, calcular la probabilidad de obtener (I) ninguna correcta (II) más de diez correctas (III) no más de cinco correctas
 - Calcular la media y la desviación típica del número de respuestas correctas.
 - Supóngase que cinco estudiantes eligen al azar las respuestas. ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellos obtengan más de diez respuestas correctas?
24. En una gran ciudad el 18% de la población son zurdos. Si se elige una muestra de 10 personas de esta ciudad:
- Calcular la probabilidad de que exactamente dos de ellas sean zurdas.
 - Calcular la probabilidad de que al menos una persona de la muestra sea zurda.
 - Calcular el número más probable de zurdos en la muestra
- Si se elige otra muestra de 25 personas
- ¿Cuál es el valor esperado para el número de personas zurdas en la muestra?
 - Calcular la varianza para el número de personas zurdas en la muestra.
- Si ahora se selecciona al azar una muestra de tamaño n
- Calcular el valor mínimo de n para el que la probabilidad de que contenga al menos 2 personas zurdas sea mayor que el 95 %.

En la misma ciudad el porcentaje de mujeres zurdas es del 16% y el de hombres zurdos es del 22%. se selecciona al azar una muestra de cinco mujeres y cinco hombres de la ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra contenga al menos una mujer zurda y un hombre zurdo? $p(X = 3)$

25. $p(X = 3)$

26. de

27. Las precipitaciones anuales de una región son, en media, de 2000 ml/m^2 con una desviación típica de 300 ml/m^2 . Calcular, suponiendo que la distribución es normal, la probabilidad de que en un año determinado la lluvia no supere los 1200 ml/m^2 .
28. En un examen realizado a gran número de alumnos se comprobó que las calificaciones se distribuían de acuerdo a una normal de media 6 y desviación típica 1. Elegido un alumno al azar calcular la probabilidad de que su calificación esté comprendida entre 6,7 y 7,1
29. El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal $N(200, 50)$ Se extrae una trucha al azar.
- ¿Cuál es la probabilidad de que su peso no exceda los 175 gramos?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea superior a los 230 gramos?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que su peso esté comprendido entre 225 y 275 gramos?
 - Al 30% de las truchas de peso inferior se les clasifica como de *segunda*; al 30% de mayor peso como *especial* y al resto como de *primera*. Calcular los pesos fronteras entre dichas categorías.
30. La compañía aérea *Avión* sabe que el tiempo de retraso de sus vuelos sigue una distribución normal de media 10 minutos y desviación típica 5 minutos.
- Calcula la probabilidad de que un vuelo no tenga retraso.
 - Calcula la probabilidad de que el próximo vuelo llegue con menos de 10 minutos de retraso.
 - Probabilidad de que el próximo vuelo llegue con no más de 20 minutos de retraso.
31. Un saco que contiene 400 monedas es vaciado sobre una mesa. Halla la probabilidad de que:
- Aparezcan más de 210 caras.
 - El número de caras sea menor que 180.
 - El número de caras esté comprendido entre 190 y 210, ambos incluidos.
32. Un estudio ha demostrado que en un barrio el 60% de los hogares tienen al menos dos televisores. Se elige, al azar, una muestra de 50 hogares. Calcula la probabilidad de:
- Al menos 20 de los citados hogares tengan dos o más televisores.
 - Entre 30 y 40 hogares tengan como mínimo dos televisores.
33. Tras un test de cultura general se ha obtenido que las puntuaciones siguen una normal $N(65, 18)$. Se desea clasificar a los examinados en tres grupos: *A* (de bajo nivel cultural), *B* (de nivel cultural medio) y *C* (de nivel cultural elevado), de manera que en el grupo *A* esté el 20% de la población, en el grupo *B* el 65% y en el grupo *C* el 15%. ¿Cuáles han de ser la puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?
34. Aplicado un test a un grupo de 400 personas se ha obtenido que las puntuaciones siguen una distribución $N(60, 5)$. Calcular la puntuación que marca el percentil 67.
35. Las edades de los 450 espectadores que asisten a una representación teatral se distribuyen de acuerdo a la siguiente tabla:

Edad	[0, 15)	[15, 30)	[30, 45)	[45, 60)	[60, 75)
Personas	19	95	218	102	16

- Representar dichos datos mediante un histograma y dibujar el polígono de frecuencias correspondiente.
- A la vista de los resultados anteriores ajustar, si parece adecuado, dicha distribución empírica mediante una distribución normal.
- Calcular el número de espectadores, correspondientes a cada grupo de edad, que habría de acuerdo a la distribución normal encontrada en el apartado anterior.

36. En una máquina tragaperras hay 3 ventanas en las que aparecen frutas con estas probabilidades: 1 limón 40 %, 1 pera 30 %, 1 cereza 20 %, 1 naranja 10 %. Jugar cuesta 2 euros y los premios son: 3 naranjas 20 euros, 2 naranjas y una cereza 15 euros, 3 cerezas 10 euros, 3 limones 8 euros. Después de jugar 40 veces. ¿Cuánto esperamos ganar?
37. Una variable aleatoria continua tiene como función densidad de probabilidad la siguiente:

$$p(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ k & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

- (a) Demostrar que $k = \frac{2}{3}$.
- (b) Calcular $E(X)$ y $\text{Var}(X)$.
- (c) Demostrar que la mediana de X es $\frac{1}{36}$ mayor que la media.
- (d) Hallar el valor de la constante a para que $p(X > E(X) - a) = 0,95$
38. Si $X \sim N(\mu, 9)$, calcular μ si $p(X \leq 5) = 0,754$.
39. Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$. Calcular los valores de μ y σ si $p(X \leq 1) = 0,345$ y $p(X \leq 3) = 0,943$.
40. La variable aleatoria X se distribuye normalmente con una media μ y una varianza σ^2 . Sabiendo que $p(X > 58,44) = 0,022$ y $p(X < 48,44) = 0,012$ calcular los valores de μ y σ .
41. Se utiliza una máquina para llenar bolsas de un kilo de harina. Cuando se comprueban las bolsas se encuentra que su peso medio es de 1,03 kg. Suponiendo que el peso de las bolsas se distribuye normalmente, calcular la desviación típica si el 1,8 % de las bolsas pesa menos de un kilo.
42. Una variable aleatoria X se distribuye normalmente con media μ y desviación típica σ y, además, $p(X > 50,1) = 0,119$ y $p(X < 43,6) = 0,305$:
- (a) Obtener los valores de μ y σ .
- (b) A partir del resultado anterior, calcular $p(|X - \mu| < \frac{\sigma}{2})$
43. Una gran feria de muestras ha reunido datos de asistencia a sus exposiciones. El próximo fin de semana va tener lugar una exposición importante y los datos recogidos muestran que el promedio de asistencia diaria a este tipo de acontecimientos es de 7850 personas con una desviación típica de 367 personas.
- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que más de 7000 personas intenten asistir a la exposición el sábado?
- (b) Si la capacidad del centro es de 8500 personas, ¿cuál es la probabilidad de que el centro se llene?
- Los datos también muestran que, cada día, la hora de llegada media de los visitantes es 155 minutos después de la apertura.
- (c) Suponiendo que la hora de llegada de los visitantes al centro sigue una distribución de Poisson, calcúlese el porcentaje de visitantes que llegarán en las primeras tres horas después de la apertura de la exposición el sábado.
44. Una máquina expendedora de café vierte cafés de diferentes tipos en vasos. Los datos que se conocen muestran que la cantidad de café dispensado por la máquina sigue una distribución normal de media 120 ml y desviación típica 8,3 ml.
- (a) Si los vasos tienen una capacidad de 130 ml ¿cuál es la probabilidad de que el café rebose del vaso?
- (b) Si la máquina está cargada con 500 de estos vasos, ¿cuántos de ellos se espera que rebosen con el café?
- (c) Los datos recogidos muestran también que la máquina dispensa el vaso correctamente un 99 % de las veces. El señor Li usa la máquina dos veces diarias y paga cada vez 2 yuans. ¿Cuántos días es probable que use la máquina hasta que pierda 5 yuans debido al error de la máquina al dispensar los vasos.

45. El peso W , en gramos, de los gorriones hembras (en adelante gorrionas) puede representarse mediante una distribución normal de media μ y desviación típica σ .
- Los datos experimentales muestran que el 84 % de las gorrionas pesan al menos 20 g y un 44 % de ellas pesan más de 22,5 g. Calcular los valores de μ y σ con 5 cifras decimales correctas.
 - Se recoge una muestra aleatoria de cinco gorrionas. Si B es el número de pájaros en la muestra que pesa más de 23 g calcular la probabilidad $p(2 \leq B \leq 4)$.
46. La pérdida de peso, en kilogramos, de las personas que siguen el régimen adelgazante *DELGAMÁS* durante un período de tres meses está modelizada por una variable aleatoria X . Los datos experimentales mostraron que el 67 % de las personas que utilizaron *DELGAMÁS* perdieron hasta cinco kilogramos, mientras que el 12,4 % perdieron al menos siete kilogramos.
- Suponiendo que X sigue una distribución normal, halle la pérdida de peso esperada para una persona que siga durante tres meses la dieta *DELGAMÁS*
47. Tim va a un conocido restaurante donde no se puede reservar mesa. Se ha determinado que los tiempos de espera hasta que se consigue una mesa siguen una distribución normal, de media 18 minutos y desviación típica 4 minutos.
- Tim dice que se marchará si 25 minutos después de haber llegado al restaurante todavía no ha conseguido mesa. Halle la probabilidad de que Tim se vaya del restaurante sin haber conseguido mesa.
 - Tim lleva esperando 15 minutos. Halle la probabilidad de que Tim consiga una mesa durante los próximos cinco minutos.
- Ahmed comete, y
48. El tiempo que tardan los autobuses en hacer el recorrido entre dos ciudades dadas sigue una distribución normal, de media igual a 45 minutos y desviación típica igual a 7 minutos.
- Halle la probabilidad de que un autobús elegido al azar tarde menos de 40 minutos en hacer el viaje.
 - El 90 % de los autobuses tardan menos de t minutos en hacer el viaje. Halle el valor de t .
 - Para una muestra aleatoria de 10 autobuses se registra la duración del viaje entre las dos ciudades. Halle la probabilidad de que exactamente 6 de estos autobuses tarden menos de 40 minutos en hacer el viaje.
49. El número de accidentes de autobús que hay durante un intervalo de tiempo dado sigue una distribución de Poisson, siendo la media igual a 0,6 accidentes por día.
- Halle la probabilidad de que, en un día cualquiera elegido al azar, haya al menos dos accidentes.
 - Halle el número más probable de accidentes que hay en un día cualquiera elegido al azar. Justifique su respuesta.
 - Halle la probabilidad de que no haya ningún accidente en toda una semana (de siete días) elegida al azar.

Soluciones:

- (a) 0,12 (b) 0,87 (c) 0,87
- (a) $k = \frac{1}{10}$ (b) $\frac{1}{2}$
- (a) 6,2 (b) 50,2 (c) 11,76 (d) 3,43
- (a) $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{5}{24}$ (b) $E(X) = \frac{23}{8}$, $E(X^2) = \frac{265}{24}$ (c) $\text{Var}(X) = \frac{533}{192}$
- (a) $k = \frac{1}{44}$ (b) $\frac{4}{11}$, $\frac{15}{22}$ y $\frac{8}{15}$ (c) 4 y $\frac{17}{11}$ (d) 4
- (a) 0,4 (b) * (c) 20
- (a) 0,47 (b) 2,32 y 1,54 (c) * (d) 2
- (a) * (b) $\frac{14}{3}$, 5, 5 (c) 1,05
- (a) * (b) $\frac{2n+1}{3}$
- (a) * (b) $F(x) = 1 - 3^{-x}$

- (11) (a) 0,205 (b) 0,377 (c) 0,630
 (12) (a) 0,2304 (b) 0,9037 (c) 0,733
 (13) (a) 0,0773, 0,999946 (b) 0,0341
 (14) (a) 2 (b) 2 (c) 0,667
 (15) (a) * (b) 26
 (16) 15
 (17) 4
 (18) (a) 0,1239 (b) 0,9502 (c) 0,8263 (d) 3,2 (e) 0,192
 (19) (a) 0,647 (b) 0,647 (c) 0,671 (d) 2
 (20) (a) * (b) 2, 3 (c) * (d) 2
 (21) (a) 0,188 (b) 0,9039 (c) 0,6
 (22) $n = 8, p = 0,25$
 (23) (a) 0,00317, 0,00394, 0,617 (b) 5, 0,387 (c) 0,000154
 (24) (a) 0,298 (b) 0,8626 (c) 1 (d) 4,5 (e) 3,69, 0,414
 (25) 0,00383
 (26) 0,1063
 (27) (a) 0,3085 (b) 0,2743 (c) 0,2417 (d) *
 (28) (a) 0,0228 (b) 0,5 (c) 0,977
 (29) (a) 0,147 (b) 0,0202 (c) 0,706 (estimado con la normal)
 (30) (a) 0,9986 (b) 0,560
 (31) 49,85, 83,66
 (32) 62,20
 (33) (a) * (b) $N(37,5; 13,0)$ (c) 16, 104, 196, 112, 19
 (34) -51,92
 (35) (a) * (b) $\frac{11}{9}, \frac{37}{162}$ (c) la mediana es 1,25 (d) 0,703
 (36) $\mu = -1,1842$
 (37) $\mu = 1,4028, \sigma = 1,0106$
 (38) $\mu = 53,9 \sigma = 2,25$
 (39) $\mu = 0,0143$
 (40) (a) $\mu = 45,6, \sigma = 3,85$ (b) 0,383
 (41) (a) 0,990 (b) 0,0383 (c) 97,8%
 (42) (a) 0,114 (b) 57,1 (c) Tiene que tomar 250 cafés, tienen que pasar 125 días
 (43) (a) $\mu = 22,17050, \sigma = 2,18259$ (b) 0,570
 (44) 3,77
 (45) (a) $p(X > 25) = 0,0401$ (b) $p(15 < X < 20 | X > 15) = 0,601$
 (46) (a) 0,2375 (b) 53,97 (c) 0,01274
 (47) (a) 0,1219 (b) 0 (c) 0,015

26. Distribuciones de probabilidad

1. Una variable aleatoria continua tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(6x^2 + 4x + 1) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

Hallar la media y la varianza de X .

2. Una variable aleatoria continua tiene como función de densidad de probabilidad la siguiente:

$$p(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ k & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

- (a) Demostrar que $k = \frac{2}{3}$.
- (b) Calcular $E(x)$ y $\text{Var}(x)$.
- (c) Demostrar que la mediana es $\frac{1}{36}$ mayor que la media.
- (d) Hallar el valor de la constante a para que $p(X > E(X) - a) = 0,95$.

3. Sea

$$p(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- (a) Comprobar que $k = \frac{3}{8}$.
- (b) Calcular $E(X)$ y la mediana de X .

4. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X se define como:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{27}{8x^2} & \text{si } 3 < x \leq r \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- (a) Calcular el valor de r .
- (b) Calcular la media y la desviación típica.

5. Una variable aleatoria continua tiene una función de densidad de probabilidad dada por:

$$p(x) = \begin{cases} k(2x - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- (a) Hallar el valor de k .
- (b) Calcular $p(0,25 < X < 0,5)$.

6. La función de probabilidad de una variable aleatoria continua es:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x(4 - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcular el valor de la mediana de X .

7. La función de probabilidad de una variable aleatoria continua X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{4 - x^2} & \text{para } \frac{-2}{3} \leq x \leq \sqrt{2} \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

- (a) Hallar el valor exacto de la constante c .
- (b) Dibujar aproximadamente la gráfica de $f(x)$ y, a partir de ella, obtener la moda de la distribución.
- (c) Hallar el valor exacto de $E(x)$.

8. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi(4 + x^2)} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Hallar la moda de X y el valor exacto de $E(x)$.

9. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Hallar la probabilidad de que X se encuentre entre la media y la moda.

Soluciones:

- (1) $\frac{2}{3}, \frac{14}{225}$
 (2) (a) * (b) $E(X) = \frac{11}{9}$, $\text{Var}(X) = \frac{37}{162}$ (c) La mediana es $\frac{5}{4}$ (d) 0,835
 (3) (a) * (b) $E(X) = \frac{3}{2}$, mediana = $\sqrt[3]{4}$
 (4) (a) $r = \frac{54}{11}$ (b) $E(X) = \frac{9}{8} + \frac{27}{8} \ln \frac{18}{11}$, $\sigma \simeq 1,10$
 (5) (a) $k = \frac{3}{4}$ (b) $p \simeq 0,113$
 (6) mediana $\simeq 1,08$
 (7) (a) $c = \frac{4}{\ln(6+4\sqrt{2})}$ (b) La moda es $\sqrt{2}$ (c) $c \ln \frac{4}{3}$
 (8) moda = 0, media = $\frac{2}{\pi} \ln 2$
 (9) $p \simeq 0,117$

www.five-fingers.es

27. Examen Julio 2018

Opción A

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (a) Discutir el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro α .
- (b) Para $\alpha = 0$ calcular si es posible A^{-1} .
- (c) Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$, en el caso $\alpha = 1$.

2. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^3 - 4x}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y se pide:

- (a) Estudiar la continuidad de f en $x = 2$.
- (b) Calcular las asíntotas horizontales de $f(x)$. ¿Hay alguna asíntota vertical?
- (c) Calcular $\int_0^2 f(x) dx$

3. Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ y el punto $A(-4, 4, 7)$. Se pide:

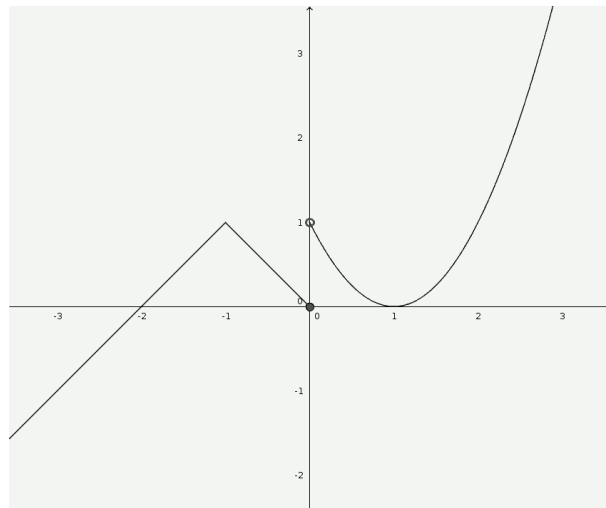
- (a) Determinar un vector \vec{w}_1 que sea ortogonal a \vec{u} y a \vec{v} , unitario y con tercera coordenada negativa.
- (b) Hallar un vector no nulo \vec{w}_2 que sea combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} y ortogonal a \vec{v} .
- (c) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores \vec{u} y \vec{v} y una de sus diagonales es el segmento OA .

4. Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13,8% de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes aunque el 43% de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años:

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál es la de que no sea diabético o no sepa que lo es?
- (b) Cierta test diagnostica correctamente el 96% de los casos positivos de diabetes, pero da un 2% de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

Opción B

- Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.
-



El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. Usando la información de la figura se pide:

- Indicar los valores de $f(-1)$ y $f'(1)$.
 - Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.
 - Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.
 - Determinar el valor de $\int_{-2}^0 f(x) dx$.
- Dados el punto $P(0, -1, 1)$ y la recta r que pasa por el punto $Q(1, 0, 1)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (1, 0, 2)$ se pide:
 - Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P .
 - Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector \vec{SP} sea perpendicular a la recta r .
 - Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1 y T_2 , contenidos en la recta r , que están separados a distancia $\sqrt{5}$ de P .
 - La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 8,5$ y desviación típica $\sigma = 2,5$. Se pide:
 - Calcular el valor α tal que $p(X \leq \alpha) = 0,05$.
 - Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9,3.

28. Examen Julio 2018

Opción A

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (a) Discutir el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro α .
- (b) Para $\alpha = 0$ calcular si es posible A^{-1} .
- (c) Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$, en el caso $\alpha = 1$.

2. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^3 - 4x}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y se pide:

- (a) Estudiar la continuidad de f en $x = 2$.
- (b) Calcular las asíntotas horizontales de $f(x)$. ¿Hay alguna asíntota vertical?
- (c) Calcular $\int_0^2 f(x) dx$

3. Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ y el punto $A(-4, 4, 7)$. Se pide:

- (a) Determinar un vector \vec{w}_1 que sea ortogonal a \vec{u} y a \vec{v} , unitario y con tercera coordenada negativa.
- (b) Hallar un vector no nulo \vec{w}_2 que sea combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} y ortogonal a \vec{v} .
- (c) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores \vec{u} y \vec{v} y una de sus diagonales es el segmento OA .

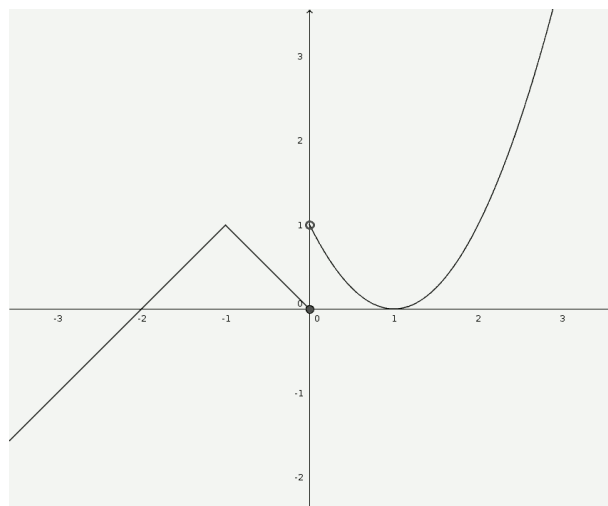
4. Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13,8% de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes aunque el 43% de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años:

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál es la de que no sea diabético o no sepa que lo es?
- (b) Cierta test diagnostica correctamente el 96% de los casos positivos de diabetes, pero da un 2% de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

Opción B

1. Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

2.



El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. Usando la información de la figura se pide:

- Indicar los valores de $f(-1)$ y $f'(1)$.
 - Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.
 - Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.
 - Determinar el valor de $\int_{-2}^0 f(x) dx$.
3. Dados el punto $P(0, -1, 1)$ y la recta r que pasa por el punto $Q(1, 0, 1)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (1, 0, 2)$ se pide:
- Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P .
 - Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector \vec{SP} sea perpendicular a la recta r .
 - Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1 y T_2 , contenidos en la recta r , que están separados a distancia $\sqrt{5}$ de P .
4. La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 8,5$ y desviación típica $\sigma = 2,5$. Se pide:
- Calcular el valor α tal que $p(X \leq \alpha) = 0,05$.
 - Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9,3.

29. Examen. Junio 2019

Opción A

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}; \quad \text{y} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- Estudiar el rango de A en función del parámetro real a .
- Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

2. Dada

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

donde \ln denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

- Calcular en caso de que exista, un asíntota horizontal de $y = f(x)$.
- Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.
- Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

3. Dadas la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$$

y la recta s que pasa por el punto $(2, -5, 1)$ y tiene dirección $(-1, 0, -1)$, se pide:

- Estudiar la posición relativa de las dos rectas.
- Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s .
- Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

4. La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10%. Se pide:

- Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.
- Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

Opción B

1. Un estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado 1 bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.

Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

2. Dada la función

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$$

se pide:

- Determinar su dominio.
- Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$$

3. Dados el punto $A(2, 1, 0)$ y el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 4z = 36$ se pide:

- Determinar la distancia del punto A al plano π .
- Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo a A .
- Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π .

4. Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80% de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10%. En un estudio experimentales, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

- (a) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.
 (b) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

30. Examen Julio 2019

Opción A

1. (2,5 puntos) dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} kx + (k + 1)y + z = 0 \\ -x + ky - z = 0 \\ (k - 1)x - y = -(k + 1) \end{cases}$$

se pide:

- (a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k .
 (b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$.
2. (2,5 puntos)
 (a) (1,25 puntos) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1) = 1; \quad f'(1) = 2; \quad g(1) = 3; \quad g'(1) = 4$$

Dada

$$h(x) = f((x + 1)^2),$$

use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$.

Dada

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

calcule $k'(1)$.

- (b) (1,25 puntos) Calcule la integral

$$\int (\sen x)^4 (\cos x)^3 dx$$

(se puede usar el cambio de variable $t = \sen x$).

3. (2,5 puntos) Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 3, -3)$ y $C(-3, -1, 1)$, se pide:
- (a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene los tres puntos.
 (b) (0,5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A , B y C) tal que los vectores \vec{AB} , \vec{AC} y \vec{AD} sean linealmente dependientes.
 (c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX , de modo que el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y P sea igual a 1.
4. (2,5 puntos) Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.
- (a) (1,25 puntos) Se sabe que el 40% del total de aspirantes en el proceso de selección han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.
 (b) (1,25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X , de media 5,6 y desviación típica σ . Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8,2$ es 0,67, calcule σ .

Opción B

1. (2,5 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) (1 punto) Calcular para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.
- (b) (0,75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a .
- (c) (0,75 puntos) Calcular en función de a , el determinante de lqqa matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .
2. (2,5 puntos) Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que

$$F'(t) = t^2(10 - t)$$

- (a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.
- (b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.
- (c) (0,5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.
3. (2,5 puntos) Dados el plano

$$\pi \equiv 2x + 3y - z = 4$$

y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}, \quad s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1); \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

se pide:

- (a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de π .
- (b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto de intersección de las rectas r y s .
- (c) (0,5 puntos) Calcule el ángulo que forman entre sí las rectas r y s .
4. (2,5 puntos) Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama $1/3$ de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es de $1,6\%$ mientras que para los de alta gama es del $0,9\%$. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.
- (a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.
- (b) (1,5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

31. Examen Julio 2020**Opción A**

1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{cases}$$

Se pide:

- (a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a .
- (b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a = 0$.
2. Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:
- (a) (0,5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.
- (b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.
- (c) Calcular

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

3. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3 - z = -1 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

se pide;

- (a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s .
- (b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.
- (c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s .
4. Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:
- (a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.
- (b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.
- (c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Opción B

1. (2,5 puntos) Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275,8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63,6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.
2. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- (a) (0,5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.
- (b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.
- (c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.
3. Dados los puntos $P(-3, 1, 2)$ y $Q(-1, 0, 1)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

- (a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π .
- (b) (0,5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P .
- (c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q .
4. Se consideran dos sucesos A y B tales que $p(A) = 0,5$, $p(B) = 0,25$ y $p(A \cap B) = 0,125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:
- (a) (0,5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B . ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?
- (b) (0,5 puntos) ¿Son A y B independientes?
- (c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad $p(\bar{A} \cap B)$ (donde \bar{A} denota el suceso complementario al suceso A).
- (d) (0,75 puntos) Calcular $p(\bar{B} | A)$.

32. Examen Julio 2020. Coincidencias

Opción A

1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (k+1)x + 3y + kz = 1 \\ 3x + (k+1)y + 2z = k-1 \\ kx + 2y + kz = 2 \end{cases}$$

se pide:

- (a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real k .
- (b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $k = -3$.
2. dada la función $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x + x \cos x$, se pide:
- (a) (1.25 puntos) Estudiar su crecimiento en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Justificar, usando el teorema adecuado, que la función se anula en algún punto de ese intervalo. Justificar razonadamente que ese punto es único.
- (b) (1.25 puntos) Calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

3. Se consideran los puntos $A(0, -4, 2)$, $B(3, -2, 3)$ y $C(-1, -3, 3)$. Se pide:
- (a) (0,75 puntos) Comprobar que el triángulo de vértices A , B y C es rectángulo, identificando los catetos y la hipotenusa.
- (b) (0,75 puntos) Determinar una ecuación del plano π que contiene a los tres puntos.
- (c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por los puntos B y C .
4. De una bolsa con 20 fichas numeradas del 1 al 20 se extraen sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento. Se pide:
- (a) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que ambos números sean múltiplos de 3.
- (b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que el primer número sea múltiplo de 6 y el segundo sea múltiplo de 3.
- (c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que ninguno de los dos números sea múltiplo de 2.
- (d) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un número impar, sabiendo que la primera también lo ha sido.

Opción B

1. Sean

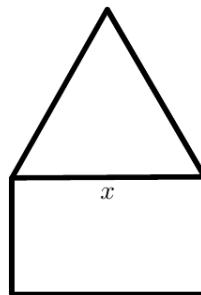
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y A una matriz que verifica $AB = BC$. Se pide:

- (a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de A .
 (b) (1 punto) Calcular BCB^{-1} .

(c) (1 punto) Encontrar el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $BC \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Disponemos de 10 metros de una barra metálica. Con ella queremos construir una estructura formada por un rectángulo que está rematado por arriba por un triángulo equilátero. La base del triángulo coincide con el lado superior del rectángulo, como se observa en la figura. Para construir la estructura, se cortan 6 trozos de la barra original de longitudes adecuadas y se sueldan para obtener la forma pedida.



Se pide:

- (a) (0,5 puntos) Si denotamos por x la base del triángulo, calcular su altura en función de x .
 (b) (2 puntos) Determinar cómo debemos cortar la barra original para que la estructura resultante encierre un área total máxima.

3. Dadas la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

y la recta s que pasa por $A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ y tiene dirección $(-1, 1, 0)$, se pide:

- (a) (0,5 puntos) Estudiar la posición relativa de ambas rectas.
 (b) (1 punto) Calcular la ecuación de un plano que contiene a la recta r y a un vector perpendicular a r y a s .
 (c) (1 punto) Encontrar una perpendicular común a r y a s .

4. El peso de las crías recién nacidas de una especie de primates sigue una distribución normal X de media $\mu = 3353$ gramos. Sabiendo que $p(X > 3693) = 0,2$, se pide:

- (a) (1,5 puntos) Calcular la desviación típica, σ , de la distribución de pesos.
 (b) (1 punto) Calcular el valor x_0 tal que $p(X < x_0) = 0,2$.

33. Examen Septiembre 2020

1. Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3, 4)$ y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplode matriz A que verifique la condición pedida, justificándolo apropiadamente:

- (a) (0,5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.
- (b) (0,5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.
- (c) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
- (d) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
- (e) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

2. (2,5 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

se pide:

- (a) (0,5 puntos) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.
- (b) (1,25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.
- (c) (0,75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

3. (2,5 puntos) Dados el punto $P(3, 3, 0)$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$$

se pide:

- (a) (0,75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r .
- (b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r .
- (c) (0,75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A .

4. (2,5 puntos) Se tienen tres urnas A , B y C . La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de forma consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

- (a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.
- (b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda negra.
- (c) (0,5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

Opción B

1. (2,5 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide;

- (a) (1 punto) Calcular si es posible la inversa de la matriz A .
- (b) (0,5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.

(c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

2. (2,5 puntos) La potencia generada por una pila viene dada por la expresión

$$p(t) = 25te^{-t^2/4}$$

donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

(a) (0,5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada si se deja en funcionamiento indefinidamente.

(b) (0,75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en que se alcanza.

(c) (1,25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante t , $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

3. (2,5 puntos) Del paralelogramo $ABCD$ se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$. Se pide:

(a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC .

(b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

(c) (0,5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores \vec{AB} y \vec{AC} .

4. (2,5 puntos) En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X , Y . Sabemos que $p(X) = 0,4$ y que $p(X \cap \bar{Y}) = 0,08$ (donde \bar{Y} es el suceso complementario de Y). Se pide:

(a) (1 punto) Calcular $p(Y)$.

(b) (0,5 puntos) Calcular $p(X \cup Y)$.

(c) (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X , y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.