Bachillerato Internacional
Matemáticas II
Problemas

Jesús García de Jalón de la Fuente

Curso 2017-2018

Índice

1. Cálculo de límites

1. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-x+5)$

   b) $\lim\limits_{x\to \infty}(3x^2-x+5)$

   c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+5x^2+x-1}{3x^2+4x+2}$

   d) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4}{5x^4+3x^3+2x^2+x+1}$

2. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4}{3x^3-2x^2+6x+1}$

   b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+x+14}{x^3+x^2+2}$

   c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+6}{x^4-x^3+x-1}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4}{x^3+x^2}$

3. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$

   b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+10x+12}{x^3+2x^2-2x+3}$

   c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2}$

   d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}{x^4+4x^3+4x^2}$

4. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+7x^2+15x+9}$

   b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-6x^2+8x-3}{x^4-2x^3+2x-1}$

   c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}-\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$

   d) $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}}\dfrac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$

5. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

   b) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}}$

   c) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2-2}-x\right)$

   d) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+2}\right)$

6. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^3-x^2+1}-\sqrt{x^3-x+1}\right)$

   b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\right)$

   c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

   d) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x+1}{2x}\right)^x$

7. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x+1}{2x^2}\right)^{x^2}$

   b) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x}$

   c) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^x$

   d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

8. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_3 x$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_{1/2} x$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_5 x$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{1/3} x$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)$

h) $\lim\limits_{x\to 5} \log_5 x$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \log_3 x$

j) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \log_3 \dfrac{1}{x}$

9. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+5}{x^2+1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x+1}{x^3-3x^2+2x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+2}{x^4-1}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-3x^3+2}{4x^4+2}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5-3x^3+2x}{x^3-5x+6}$

10. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x-1}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x+3}{1+e^x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{3^x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2^x+x}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5^x}{3^x}$

11. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{5\ln x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\ln x}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

12. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{3x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arsen} x}{1-\cos x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{artg} x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\operatorname{tg} x}{3x}$

13. Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:

a) $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$

b) $y=\dfrac{x-3}{2x+4}$

c) $y=\dfrac{1}{3x-2}$

14. Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:

a) $y=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$

b) $y=\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$

c) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$

15. Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:

a) $y=\dfrac{2x^2+1}{x-3}$

b) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2-3x+2}$

c) $y=\dfrac{x^4+1}{x^2-3}$

Soluciones:

(1) (a) 15 (b) ∞ (c) ∞ (d) $\frac{1}{5}$

(2) (a) ∞ (b) 0 (c) ∞ (d) 0

(3) (a) 2 (b) $\frac{7}{13}$ (c) $\frac{9}{17}$ (d) $\frac{5}{4}$

(4) (a) 2 (b) 2 (c) $-\frac{15}{4}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

(5) (a) $20\sqrt{5}$ (b) $\nexists$ (c) 0 (d) $\frac{3}{2}$

(6) (a) $-\infty$ (b) ∞ (c) $\frac{1}{2}$ (d) ∞

(7) (a) 0 (b) e^{-6} (c) 1 (d) e^{-4}

(8) (a) ∞ (b) ∞ (c) $-\infty$ (d) $-\infty$ (e) $-\infty$ (f) ∞ (g) 0 (h) 1 (i) 0 (j) $-\frac{1}{2}$

(9) (a) ∞ (b) 0 (c) 1 (d) 0 (e) $\frac{1}{4}$ (f) ∞

(10) (a) 0 (b) ∞ (c) 0 (d) 0 (e) ∞ (f) ∞

(11) (a) 0 (b) ∞ (c) 0 (d) 0 (e) 0 (f) $\nexists$

(12) (a) ∞ (b) 0 (c) ∞ (d) 0 (e) -2 (f) $\frac{2}{3}$

(13) (a) $x = 3$, $y = 2$ (b) $x = -2$, $y = \frac{1}{2}$ (c) $x = \frac{2}{3}$, $y = 0$

(14) (a) $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$ (b) $x = -1$, $x = 1$, $y = 2$ (c) $y = 0$

(15) (a) $x = 3$, $y = 2x + 6$ (b) $x = 1$, $x = 2$, $y = x + 3$ (c) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

2. Continuidad

1. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - ax + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

según los valores de a.

2. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$$

3. Calcular a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ b & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

4. Estudiar los puntos de discontinuidad de la función:

$$y = \frac{2}{x - 3} - \frac{12}{x^2 - 9}$$

5. Hallar el valor de k para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

sea continua en $x = 1$.

6. ¿Cómo hay que definir en $x = 1$ la función:

$$y = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \qquad x \neq 1$$

para que sea continua en ese punto?

7. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

según los valores de a.

8. De la función $g(x)$ se sabe que es continua en el intervalo cerrado $[0,1]$ y que para $0 < x \leq 1$ es:
$$g(x) = \frac{x^2+x}{x}$$
¿Cuánto vale $g(0)$?

9. Sea la función:
$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$
El segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando $x = 2$. ¿Cómo se debería elegir el valor de $f(2)$ para que la función f sea continua en ese punto?

Soluciones:

(1) Para $a = \frac{1}{2}$ es continua en $x = 1$. Para los demás valores hay un salto finito.
(2) En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable. En $x = -1$ hay un infinito de la función.
(3) $a = -9$, $b = 10$.
(4) En $x = 3$ hay una discontinuidad evitable. En $x = -3$ hay un infinito.
(5) $k = 4$.
(6) La función tiene que valer $\frac{1}{2}$.
(7) La función es continua en $x = 0$ para $a = \frac{1}{2}$.
(8) Tiene que valer $g(0) = 1$.
(9) Debe elegirse $f(2) = 4$.

3. Teorema de Bolzano

1. Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + 40 = 0$ tiene alguna solución en el intervalo $(-4, -3)$.
2. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto.
3. Dada la función $f(x) = x^3 + x - 5$, demostrar que existe un $c \in (1,3)$ tal que $f(c) = 20$.
4. Comprobar que la ecuación $\operatorname{sen} x - 2x + 3 = 0$ tiene una solución en el intervalo $(1,2)$.
5. Comprobar que la función $f(x) = x^5 - x^3 - x + 5$ toma el valor -1 en el intervalo $(-2,-1)$.
6. Demostrar que la función $f(x) = xe^{-x} + 3$ toma el valor $\frac{3}{2}$ en el intervalo $(-1,0)$.
7. Demostrar que la ecuación $\operatorname{sen} x - \cos x + 2x = 3$ tiene una solución en el intervalo $(1,2)$.
8. Comprobar que la función $f(x) = \cos x - x + 1$ corta al eje OX en al menos un punto, e indica un intervalo de extremos de números enteros consecutivos al cual pertenezca dicho punto.
9. Lo mismo para la función $f(x) = xe^x - x - 16$.
10. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = \cos \pi x - 2$ se cortan en un punto x_0. Calcular la parte entera de x_0.
11. Demostrar que la ecuación $x^3 + 3x^2 + 4x - 7 = 0$ tiene al menos una solución.
12. Comprobar que la ecuación $2x = \cos x$ tiene al menos una solución.
13. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$ se cortan en algún punto.
14. Sea la función:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$
Observamos que f está definida en $[0,1]$ y que toma valores de signos opuestos en los extremos de este intervalo. Sin embargo, no existe ningún $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

4. Reglas de derivación

Obtener la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = (x^2 - 7x + 1)^2$
2. $y = (4x^2 + 5)^3$
3. $y = (3x^3 - 4x^2 - 5x + 1)^4$
4. $y = x^3(2x + 1)^3$
5. $y = (x - 3)^2(2x + 5)^3$
6. $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 3}$
7. $y = \dfrac{3x + 1}{(x - 3)^2}$
8. $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{(2x + 1)^3}$
9. $y = \sqrt{x^3 - x + 1}$
10. $y = \sqrt{5x^2 - 1}$
11. $y = \sqrt[3]{x}$
12. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$
13. $y = \sqrt[4]{x}$
14. $y = \sqrt[4]{x^3 - 3x}$
15. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
16. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
17. $y = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x}}$
18. $y = \dfrac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
19. $y = (x^2 - 3x + 1)\sqrt{3x^2 + 2}$
20. $y = 3\ln(x^2 - 3)$
21. $y = \ln\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$
22. $y = \ln\sqrt{4x^2 + 1}$
23. $y = \dfrac{1}{\ln x}$
24. $y = \dfrac{2}{\ln(x^2 + 1)}$
25. $y = x\ln x - x$
26. $y = (x^2 - 3x)\ln(x + 1)$
27. $y = e^{2x}$
28. $y = e^{-x}$
29. $y = e^{3x^2 - 3}$
30. $y = xe^{2x}$
31. $y = (x^2 - 1)e^{x^2}$
32. $y = \dfrac{e^x}{x}$
33. $y = x^2 e^{-x}$
34. $y = e^{\sqrt{x}}$
35. $y = \sqrt{5e^x - 2}$
36. $y = \ln(e^x + 1)$
37. $y = \log_3 x$
38. $y = \log_2(1 - \sqrt{x})$
39. $y = 2^x$
40. $y = 2^{5x-1}$
41. $y = \sqrt{1 + \ln x}$
42. $y = (\ln x)^2$
43. $y = (1 - \ln x)^3$
44. $y = e^x \ln x$
45. $y = \operatorname{sen} 3x$
46. $y = \operatorname{tg}(\pi - x)$

47. $y = \cos^2 x$

48. $y = 5\cos(2\pi - x)$

49. $y = 3\operatorname{sen}^2 x$

50. $y = \operatorname{sen} x \cos x$

51. $y = \operatorname{sen}^2 x \cos 2x$

52. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

53. $y = e^{2\operatorname{sen} x}$

54. $y = \dfrac{1}{\cos x}$

55. $y = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

56. $y = \ln \operatorname{tg} x$

57. $y = x^x$

58. $y = x^{\cos x}$

59. $y = \ln \operatorname{cotg} x$

60. $y = \ln \dfrac{3-5x}{2x+7}$

61. $y = \ln \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

62. $y = \ln \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

63. $y = \dfrac{1}{8} \ln \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$

64. $y = \ln \cos e^x$

65. $y = \ln \cos e^{x^2}$

66. $y = 2^{\operatorname{tg} x}$

67. $y = 3^{\cos x^2}$

68. $y = 5^{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

69. $y = e^{\sqrt{x}}$

70. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

71. $y = \dfrac{e^{5x}}{1+e^x}$

72. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

73. $y = 3^x$

74. $y = \ln \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$

75. $y = \ln \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

76. $y = \log\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)$

77. $y = \log \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

78. $y = \log \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$

79. $y = \operatorname{arsen} \sqrt{x}$

80. $y = \arccos \dfrac{1}{x}$

81. $y = x \operatorname{artg} \dfrac{1}{x}$

82. $y = \sqrt{25-x^2} + \operatorname{arsen} \dfrac{x}{5}$

83. $y = \ln \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x} + \operatorname{artg} x$

84. $y = (1+x)^x$

85. De la ecuación de la trayectoria $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ obtener la fórmula de la velocidad y la aceleración.

86. De la fórmula

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

obtener, derivando y haciendo $x = 1$, que

$$n2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

87. Obtener la derivada segunda de:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 4$

b) $y = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 6$

c) $y = \ln\sqrt{1 - x^2}$

d) $y = e^{\operatorname{sen} x}$

e) $y = \ln\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}$

f) $y = x^2 e^x$

88. Obtener la diferencial de:

a) $y = 4x^2 - 5x + 2$

b) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$

c) $y = \sqrt{2x - 3}$

d) $y = x^2 e^{\operatorname{sen} x}$

Soluciones:

(1) $y' = 2(x^2 - 7x + 1)(2x - 7)$

(2) $y'3(4x^2 + 5)^2(8x) =$

(3) $y' = 4(3x^3 - 4x^2 - 5x + 1)^3(9x^2 - 8x - 5)$

(4) $y' = 3x^2(2x + 1)^3 + 3(2x + 1)^2 \cdot 2x^3$

(5) $y' = 2(x - 3)(2x + 5)^3 + 3(2x + 5)^2 \cdot 2(x - 3)^2$

(6) $y' = \frac{2x(3x^2-2x+3)-(6x-2)(x^2+1)}{(3x^2-2x+3)^2}$

(7) $y' = \frac{3(x-3)^2-2(x-3)(3x+1)}{(x-3)^4} = \frac{3(x-3)-2(3x+1)}{(x-3)^3}$

(8) $y' = \frac{(2x-1)(2x+1)^3-3(2x+1)^2\cdot 3(x^2-x+2)}{(2x+1)^6} = \frac{(2x-1)(2x+1)-3\cdot 3(x^2-x+2)}{(2x+1)^4}$

(9) $y' = \frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x+1}}$

(10) $y' = \frac{10x}{2\sqrt{5x^2-1}}$

(11) $y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

(12) $y' = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x$

(13) $y' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

(14) $y' = \frac{1}{4}(x^3 - x)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(3x^2 - 3\right)$

(15) $y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

(16) $y' = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$

(17) $y' = \frac{2\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-1)}{x}$

(18) $y' = \frac{(3x^2+1)\sqrt{x^2+1}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}(x^3+x)}{x^2+1}$

(19) $y' = (2x - 3)\sqrt{3x^2 + 2} + \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+2}}(x^2 - 3x + 1)$

(20) $y' = 3 \cdot \frac{2x}{x^2+3}$

(21) $y' = \frac{2x}{x^2-4} - \frac{2x}{x^2+4}$

(22) $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{8x}{4x^2+1}$

(23) $y' = \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

(24) $y' = \frac{-\frac{2x}{x^2+1}\cdot 2}{(\ln(x^2+1))^2)}$

(25) $y' = \ln x + \frac{1}{x}x - 1 = \ln x$

(26) $y' = (2x - 3)\ln(x + 1) + \frac{1}{x+1}(x^2 - 3x)$

(27) $y' = e^{2x} \cdot 2$

(28) $y' = -e^{-x}$

(29) $y' = e^{3x^2-3(6x)}$

(30) $y' = e^{2x} + e^{2x\cdot 2x}$

(31) $y' = 2xe^{x^2} + e^{x^2} \cdot 2x(x^2 - 1)$

(32) $y' = \frac{e^x x - e^x}{x^2}$

(33) $y' = 2xe^{-x} - e^{-x}x^2$

(34) $y' = e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(35) $y' = \frac{5e^x}{2\sqrt{5e^x - 2}}$

(36) $y' = \frac{e^x}{e^x + 1}$

(37) $y' = \frac{1}{x \ln 3}$

(38) $y' = \frac{1}{(1.\sqrt{x}) \ln 2} \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

(39) $y' = 2^x \ln 2$

(40) $y' = 2^{5x-1} \cdot 5 \ln 2$

(41) $y' = \frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}} \cdot \frac{1}{x}$

(42) $y' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$

(43) $y' = 3(1 - \ln x)^2 \frac{-1}{x}$

(44) $y' = e^x \ln x + \frac{1}{x} e^x$

(45) $y' = 3 \cos 3x$

(46) $y' = \frac{1}{\cos^2(\pi - x)}(-1)$

(47) $y' = 2 \cos x(- \operatorname{sen} x)$

(48) $y' = 5(- \operatorname{sen}(2\pi - x))(-1)$

(49) $y' = 3 \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x$

(50) $y' = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

(51) $y' = 2 \operatorname{sen} x \cos x \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen}^2 x$

(52) $y' = \frac{\cos x \cos^2 x - 2 \cos x(- \operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x}{\cos^4 x}$

(53) $y' = e^{2 \operatorname{sen} x} 2 \cos x$

(54) $y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

(55) $y' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$

(56) $y' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x}$

(57) $y' = e^{x \ln x} (\ln x + 1)$

(58) $y' = e^{\cos x \ln x} \left(- \operatorname{sen} x \ln x + \frac{1}{x} \cos x\right)$

(59) $y' = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$

(60) $y' = \frac{-5}{3-5x} - \frac{2}{2x+7}$

(61) $y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1}$

(62) $y' = \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1}$

(63) $y' = \frac{1}{8} \left(\frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} - \frac{- \cos x}{1 - \operatorname{sen} x} \right)$

(64) $y' = \frac{1}{\cos e^x} (- \operatorname{sen} e^x) e^x$

(65) $y' = \frac{1}{\cos e^{x^2}} \left(- \operatorname{sen} e^{x^2}\right) e^{x^2} 2x$

(66) $y' = 2^{\operatorname{tg} x} \ln 2 \frac{1}{\cos^2 x}$

(67) $y' = 3^{\cos x^2} \ln 3 \left(- \operatorname{sen} x^2\right) 2x$

(68) $y' = 5^{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \ln 5 \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cos x$

(69) $y' = e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(70) $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(71) $y' = \frac{e^{5x} 5(1+e^x) + e^x e^x}{(1+e^x)^2}$

(72) $y' = \frac{e^x x^2 - 2xe^x}{x^4}$

(73) $y' = 3^x \ln 3$

(74) $y' = \frac{-e^x}{1-e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}$

(75) $y' = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

(76) $y' = \frac{1}{\cos 2x \ln 10}(-\operatorname{sen} 2x) \cdot 2$

(77) $y' = \frac{\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)\ln 10} - \frac{-\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)\ln 10}$

(78) $y' = \frac{1}{2\ln 10}\left(\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} - \frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right)$

(79) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(80) $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\frac{-1}{x^2}$

(81) $y' = \operatorname{artg}\frac{1}{x} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{-1}{x^2}\cdot x$

(82) $y' = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}}\frac{1}{5}$

(83) $y' = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2}$

(84) $y' = e^{x\ln(1+x)}\left(\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}x\right)$

(85) $v_0 + at, a$

(86) $*$

(87) (a) $y'' = 6x - 10$ (b) $y'' = 12x^2 - 12x + 6$ (c) $y'' = \frac{3x^2-1}{(1-x^2)^2}$ (d) $y'' = e^{\operatorname{sen} x}\left(\cos^2 x - \operatorname{sen} x\right)$ (e) $y'' = \frac{-1}{2(1+\operatorname{sen} x)}$ (f) $y'' = (x^2+4x+2)e^x$

(88) (a) $\mathrm{d}y = (8x-5)\,\mathrm{d}x$ (b) $\mathrm{d}y = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ (c) $\mathrm{d}y = \frac{2}{2\sqrt{2x-3}}\,\mathrm{d}x$ (d) $\mathrm{d}y = \left(2xe^x + e^x x^2\right)\,\mathrm{d}x$

5. Continuidad y derivabilidad

1. Considérese la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & x \le 0 \\ 2x+1 & x > 0 \end{cases}$$

donde a es un número real.

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y comprobar que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

b) ¿Para qué valor del parámetro a la función es derivable en $x = 0$?

2. Determinar el valor de a para el cual la siguiente función es derivable en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \le 0 \\ x^2 + a & x > 0 \end{cases}$$

3. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x < 2 \\ e^{2-x} & x \ge 2 \end{cases}$$

calcular a para que f sea continua en $x = 2$. Para el valor obtenido, ¿es derivable la función en $x = 2$?

4. Discutir según los valores de m la continuidad y la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - mx^2 & x \le 1 \\ \dfrac{2}{mx} & x > 1 \end{cases}$$

5. Determinar los valores de a y b para que la siguiente función sea derivable en todos sus puntos:

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & x \le -1 \\ \dfrac{a}{x} & -1 < x \le 1 \\ \dfrac{x^2+ax+1}{x+1} & x > 1 \end{cases}$$

6. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x < 1 \\ cx & x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular a, b y c para que la función sea derivable en $x = 1$, sabiendo que $f(0) = f(4)$.

7. Estudia la derivabilidad de las función $f(x) = |x^2 - 7x + 12|$ en $x = 4$.

8. La función $f(x) = \sqrt{x}$ no es derivable en $x = 0$ y la función $g(x) = \operatorname{sen} x$, sí. ¿Es derivable en $x = 0$ la función $p(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$?

9. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \frac{3\pi}{2} < x < 3\pi \\ x - 3\pi & x \geq 3\pi \end{cases}$$

Estudiar su continuidad y su derivabilidad en $x = 3\pi$.

Soluciones: (1) $a = 2$ (2) $a = 1$ (3) $a = 0$, no (4) Continua para $m = 1$ y $m = 2$. Derivable para $m = 1$ (5) Es continua para $a = 2$ y $b = 0$. No es derivable (6) $a = -\frac{7}{4}$, $b = 1$, $c = \frac{1}{4}$ (7) no es derivable (8) sí (9) continua, no derivable

6. Recta tangente

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 2$
2. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $-x^2 + 2x + 5$ en el punto de abscisa $x = -1$
3. Calcular la ecuación de la recta tangente a $y = 3x^2 - 4x + 2$ que tenga pendiente igual a 2.
4. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x+4}$ en el punto de abscisa 0.
5. Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ que sean paralelas a la recta $y = 6x + 10$.
6. Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.
7. Hallar los puntos de tangente horizontal de la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.
8. Hallar los puntos de tangente horizontal de las siguientes curvas:
   a) $y = 3x^2 - 2x + 1$
   b) $y = x^3 - 3x$
9. ¿En qué puntos de $y = 1/x$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante?.¿Tiene algún punto de tangente horizontal?
10. ¿En qué punto la recta tangente a la curva $y = x^2 - 6x + 5$ es paralela a la recta $y = 2x - 3$?
11. ¿En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene la pendiente igual a 8?
12. Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ que son paralelas a $2x+y-1 = 0$.
13. Calcular la ecuación de la tangente a la curva $y = \ln x$ trazada desde el origen.
14. ¿Hay algún punto de la gráfica de $y = \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ con tangente horizontal?
15. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva$f(x) = \operatorname{sen} x$ en el origen.

16. ¿Hay algún punto de la gráfica de $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ en el que la tangente tenga menor pendiente que la bisectriz del primer cuadrante?

17. Encontrar los puntos con abscisa en $[0, 2\pi]$ para los que la tangente a la curva $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ sea horizontal.

18. Obtener la ecuación de la tangente a la curva $x^2 + y^2 = 13$ en $P(2, 3)$ de dos formas: utilizando la derivación implícita y despejando y.

19. Usar la derivación implícita para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2y^3 = 2$ en el punto de abscisa $x = 1$

20. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

c) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto del abscisa $x = 1$.

21. Determinar las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función

$$f(x) = xe^x + \frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$$

en el punto de abscisa $x = 0$.

22. Hallar el área del triángulo formado por el eje X y las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $y = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

Soluciones:

(1) $y = -x + 2$ (2) $y = 4$ (3) $y = 2x - 1$ (4) $y = \frac{1}{4}x + 2$ (5) $y = 6(x - \sqrt{3})$, $y = 6(x + \sqrt{3})$ (6) $y = -4x + 8$, $y = 4x + 8$ (7) $(-1, 4)$, $(3, -28)$ (8) (*a*) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (*b*) $(-1, 2)$, $(1, -2)$ (9) $(-1, -1)$, $(1, 1)$ (10) $(4, -3)$ (11) $(-2, 0)$, $(2, 0)$ (12) $(0, 0)$, $(2, 4)$ (13) $y = \frac{1}{e}x$ (14) no (15) $y = x$ (16) no (17) $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$ (18) $y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2)$ (19) $y - \sqrt[3]{2} = -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}(x - 1)$ (20) (*a*) 0 (*b*) $(0, 0)$, $(1, 0)$ (*c*) $y = \frac{1}{4}(x - 1)$ (21) $y = x - \frac{1}{2}, y = -x - \frac{1}{2}$ (22) $\frac{e^3+e}{2}$

7. Crecimiento y decrecimiento. Concavidad y convexidad

1. Estudiar la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2(x + 1)$

b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 2x$

2. Estudiar la monotonía de:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

3. Estudiar la monotonía de:

a) $f(x) = 3x^2e^x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$

c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

d) $f(x) = x \ln \sqrt{x}$

4. Determinar los máximos y mínimos de las siguientes funciones utilizando la derivada segunda:

a) $y = x^3 - 24x - 6$

b) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

c) $y = \ln(x^2+1)$

d) $y = (x^2+4)e^x$

5. Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

c) $y = \sqrt{9+x^2}$

d) $y = \dfrac{\ln x}{2x}$

e) $y = 4\cos x - \cos 2x$

f) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

6. Sea $f(x) = x^2 + mx$ donde m es un parámetro real. Hallar el valor de m para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = -\frac{3}{4}$.

7. Se considera la función:

$$f(x) = ae^{x^2+bx+c} \ ; \qquad a > 0$$

Calcular los parámetros a, b y c sabiendo que la función tiene un mínimo relativo en el punto $(1, a)$ y $f(0) = 1$.

8. Determinar los valores de a, b y c para que la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en $x = -1$ y su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3.

9. Calcula para $f(x) = (x+1)e^{-x}$ los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad.

10. Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$$

11. Demostrar que la curva de ecuación

$$y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

no tiene ningún punto de inflexión.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$$

Determinar a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

13. Calcular los valores del parámetro a, $a \neq 0$, que hacen que las tangentes a la curva de ecuación

$$y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1$$

en los puntos de inflexión sean perpendiculares.

14. Se considera la función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son parámetros reales.

a) Averiguar los valores de a y b para los que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = 4$ son paralelas al eje X.

b) Con los valores de a y b hallados anteriormente, obtener el valor de c para el que se cumple que el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ está en el eje X.

15. Demuestra que la curva $f(x) = x - 2\cos x$ tiene un punto de inflexión en el interior del intervalo $[0, \pi]$ y halla la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto. Haz un dibujo en un entorno del punto hallado.

16. Hallar una función polinómica de tercer grado que tenga un extremo relativo en $(1, 1)$ y un punto de inflexión en $(0, 3)$. ¿Es $(1, 1)$ el único extremo de la función?.

Soluciones:

(1) (a) creciente en $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (0\infty)$ (b) creciente en $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

(2) (a) creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ (b) creciente en $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

(3) (a) creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, máximo en $x = -2$ (b) decreciente en $(-\infty, -4)$, mínimo en $x = -4$ (c) creciente en $\left(0, \sqrt{e}\right)$, máximo en $x = \sqrt{e}$ (d) decreciente en $(0, \frac{1}{e})$, mínimo en $x = \frac{1}{e}$

(4) (a) máximo en $x = -2\sqrt{2}$, mínimo en $x = 2\sqrt{2}$ (b) máximo en $x = -1$, mínimo en $x = 1$ (c) mínimo en $x = 0$ (d) no hay extremos relativos

(5) (a) cóncava en $(1, \infty)$ (b) cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, puntos de inflexión en $x = -1$ y $x = 1$ (c) cóncava en $(-\infty, \infty)$ (d) convexa en $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$ (e) convexa en $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$ (f) cóncava en $(-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$

(6) $m = \frac{3}{2}$

(7) $a = \frac{1}{e}$,$b = -2$, $c = 1$

(8) $a = 3$, $b = -6$, $c = 0$

(9) creciente en $(-\infty, 0)$, cóncava en $(1, \infty)$

(10) máximo en $x = -1$, mínimo en $x = 1$, puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$

(11) La derivada segunda no tiene raíces

(12) $a = 26$, $b = -19$

(13) $a = -1$, $a = 1$

(14) $a = -9$, $b = 24$, $c = -18$

(15) $y - \frac{\pi}{2} = 3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

(16) $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$, $d = 3$.

8. Teoremas de Rolle y del valor medio

1. Estudiar si se puede aplicar el teorema de Rolle a $f(x) = 2\operatorname{tg} x$ en el intervalo $[0, \pi]$ y, si es posible, determinar el punto en el que la derivada se anula.

2. Razonar si se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ en el intervalo $[0, 4]$.

3. Aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en el intervalo $[-4, 2]$ e interpretarlo geométricamente.

4. Cada una de las funciones siguientes toma el mismo valor en los extremos del intervalo $[-2, 2]$, pero no hay ningún valor $\xi \in (-2, 2)$ en el que la derivada se anule. Justificar en cada caso por qué no contradicen el teorema de Rolle:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

   b) $f(x) = 2 - |x|$

5. Probar que la función $f(x) = x^3+x^2-x-1$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$ y calcula un punto del intervalo abierto $(-1, 1)$ cuya existencia garantiza el teorema.

6. Demostrar que la ecuación $2 - x = e^x$ solamente tiene una solución.

7. Demostrar que la ecuación $x^2 = x \cos x - \operatorname{sen} x$ se verifica para un solo valor de x.

8. Demostrar que la curva $y = x^3 - 3x + 1$ solo corta al eje X en un punto del intervalo $(0, 1)$.

9. Demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ solo tiene una solución real.

10. Dado el intervalo $I = [0, 5]$ y dadas las funciones $f(x) = x^2 - Ax$, encontrar el valor de A para que se pueda aplicar el teorema de Rolle al intervalo I y aplicar el teorema en ese caso.

11. Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demostrar que las curvas $y = \cos x$ e $y = \sqrt{x}$ se cortan en un único punto del intervalo $(0, \pi)$.

12. Demostrar que se puede aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ en el intervalo $[0, 4]$ y halla el punto que verifica el teorema.

13. Aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = -x^2 + 2x - 8$ en el intervalo $[-3, 3]$ e interpretarlo geométricamente.

14. Razonar si es aplicable el teorema del valor medio a la función

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

    en el intervalo $[0, e]$. En caso afirmativo, hallar el valor al que se refiere el teorema.

15. Dada la función:

$$f(x) = x^x - 2^x + x - 1$$

    demostrar que existen $\alpha, \beta \in (1, 2)$ tales que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\beta) = 2$. Decir que teorema se utiliza.

16. Sea $f(x) = x^3 + 2x - 1$ y sea el intervalo $I = [0, 2]$. Aplicar el teorema del valor medio a la función f en el intervalo I, hallando el punto de dicho intervalo cuya existencia asegura el teorema.

17. Dada la función

$$f(x) = x \cos \frac{\pi x}{2}$$

    demostrar que existe $\xi \in (1, 2)$ tal que $f'(\xi) = -2$. Citar los teoremas que se utilicen.

Soluciones:

(1) No se puede aplicar. La función no es continua en $x = \frac{\pi}{2}$

(2) No se puede aplicar. La función no es derivable en $x = 2$

(3) La función es continua y derivable y toma valores iguales en los extremos del intervalo. Existe un punto de derivada cero $\xi = -1$

(4) (*a*) La función no es continua en $x = 0$ (*b*) La función no es derivable en $x = 0$

(5) $\xi = \frac{1}{3}$

(6) $F(x) = e^x + x - 1$ es continua y derivable, toma valores positivos y negativos y su derivada no se anula

(7) La función $F(x) = x^2 - x\cos x + \operatorname{sen} x$ es continua y derivable y se anula en $x = 0$. Para $x \neq 0$ la derivada no se anula

(8) Toma valores de signo contrario en los extremos y la derivada no se anula en el interior del intervalo

(9) La función $F(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ toma valores positvos y negativos y su derivada no se anula en ningún punto

(10) $A = 5$, $\xi = \frac{5}{2}$

(11) La función $F(x) = \cos x - \sqrt{x}$ es continua y derivable en el interior del intervalo (no en $x = 0$), toma valores de signos contrario en los extremos y la derivada no se anula en el intervalo

(12) La función es continua en el intervalo y derivable en su interior, $\xi = \sqrt{3}$

(13) $\xi = 0$, en ese punto la tangente es paralela a la cuerda

(14) Se puede aplicar porque escontinua en el intervalo y derivable en su interior, $\xi = 1$

(15) $f(1) = -1$ y $f(2) = 1$. La función es continua y derivable para $x > 0$. Existe α por el teorema de Bolzano y β por el teorema del valor medio

(16) $\xi = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(17) Basta aplicar el teorema del valor medio teniendo en cuenta que $f(2) = -2$ y $f(1) = 0$

9. Regla de l'Hôpital

1. Calcular los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2\operatorname{sen} x}$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^3}$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x - 3}$

2. Calcular los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

3. Calcular los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1 + x)}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^3 + x}$

4. Calcular:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\operatorname{cotg} x$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x}}$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + x - e^x}{\operatorname{sen}^2 x}$

5. Calcular:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x - 3}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x$

6. Calcular:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x \operatorname{sen} x - x}{2x^2 + x^4}$ b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

7. Calcular:

a) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1} \right)$ b) $\lim_{x\to\infty} x \left(\operatorname{artg} e^x - \dfrac{\pi}{2} \right)$

8. Calcular:

a) $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{e^{-x}}$ b) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \operatorname{tg} \dfrac{1}{x} \right)^x$

9. Calcular:

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$ b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sqrt{1 - \cos x}}{\ln(1 - \cos x)}$

10. Calcular, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}$

11. Calcular:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2}$ b) $\lim_{x\to 1^+} (x^2 - 1) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2^n - 8}{2^{n+1}} \right)$

12. Calcular los valores del número real a sabiendo que:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2} = 8$ b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + ax)}{\operatorname{sen} 2x} = 3$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x}{\ln(e^{ax} - 1)} = 4$

13. Calcular los valores de $\lambda \neq 0$ para los cuales:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{\cos^2 \lambda x - 1} = -1$$

14. Calcular:

a) $\lim_{x\to 2} (x-2) \ln(x-2)$ b) $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$

c) $\lim_{x\to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$ d) $\lim_{x\to\infty} (x^3 - 1)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x^2 + 2}$

Soluciones:

(1) (a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{3}{2}$
(2) (a) ∞ (b) -2 (c) 2
(3) (a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) 0
(4) (a) 1 (b) 0 (c) 1 (d) $-\frac{1}{2}$

(5) (a) $\frac{3}{2}$ (b) 1

(6) (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$

(7) (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0

(8) (a) 1 (b) e

(9) (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$

(10) (a) 1 (b) -1 a la izquierda y 1 a la derecha

(11) (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{4}{\pi}$ (c) $\frac{1}{2}$

(12) (a) $a = \pm 4$ (b) $a = 6$ (c) $a = \frac{1}{2}$

(13) $\lambda = \pm 1$

(14) (a) 0 (b) 1 (c) e (d) 1 (e) 1

10. Problemas de optimización

1. De todos los cilindros que pueden inscribirse en una esfera de 9 cm de radio, hallar la altura y el radio del que tiene mayor volumen.

2. Descomponer el número 8 en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo sea mínima.

3. ¿En qué punto de la parábola $y = 4 - x^2$ la tangente forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima?

4. Determinar el punto de la parábola $y = x^2$ que está más próximo al punto $(3, 0)$.

5. Determinar un punto de la curva de ecuación $y = xe^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

6. Considérense las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = -e^{-x}$. Para cada recta r perpendicular al eje X, sean A y B los puntos de corte de dicha recta con las gráficas de f y g respectivamente. Determínese la recta r para el cual el segmento AB es de longitud mínima.

7. El coste del marco de una ventana rectangular es de 12,50 euros por metro lineal de los lados verticales y 8 euros por metro lineal de los lados horizontales.

   a) Calcular razonadamente las dimensiones que debe tener el marco de una ventana de 1 m^2 de superficie para que resulte lo más económico posible.

   b) Calcular, además, el coste de este marco.

8. De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación

   $$\frac{x}{2} + y = 1$$

   determinar el de área máxima.

9. Considérese el recinto limitado por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 3$. De entre los rectángulos que tienen un lado sobre la porción de recta que queda sobre la curva y los otros dos vértices sobre la parábola, determinar el que tiene área máxima.

10. Un trozo de alambre de longitud 20 se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Encontrar las longitudes de ambos trozos para que sea mínima la suma del área del rectángulo y la del cuadrado.

11. Una cartulina tiene forma rectangular con 30 cm de base y 20 cm de altura. Se quiere construir un cajón sin tapa con la forma resultante tras recortar cuatro cuadrados de lado x en cada esquina de la cartulina. Calcular x para que el volumen del cajón resultante sea máximo. Calcular dicho volumen.

12. Hallar el rectángulo de área máxima inscriptible en un triángulo isósceles de base 6 cm y altura 10 cm.
13. Hallar el rectángulo de área máxima inscriptible en un semicírculo.
14. Demostrar que de todos los rectángulos de igual perímetro, el de área máxima es el cuadrado.
15. Hallar el cilindro de máximo volumen inscriptible en un cono recto circular de radio 10 cm. y altura 20 cm.
16. Demostrar que todos los cilindros de igual superficie, el de volumen máximo es el de altura igual al diámetro.
17. Inscribir en una esfera el cilindro, de volumen máximo.
18. Idem de área máxima.
19. Demostrar que la altura del cono de volumen máximo inscrito en una esfera vale los 4/3 del radio. (Tomar como variable dicha altura.)
20. Calcular las dimensiones de un depósito cónico invertido abierto, de 2000 litros de capacidad, de modo que requiera la mínima cantidad de superficie.
21. Sabido es que el desarrollo de la superficie lateral de un cono es un sector circular. Dado un círculo, ¿cuál es el sector correspondiente a un cono de máximo volumen?

Soluciones:

(1) $r = 3\sqrt{6}$, $h = 6\sqrt{3}$

(2) 2 y 6

(3) $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(4) $x = 1$

(5) $x = 0$

(6) $x = 0$

(7) 80 cm y 125 cm

(8) El que tiene un vértice en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

(9) El que tiene un vértice en $(1, 1)$

(10) $\frac{180}{17}$ y $\frac{160}{17}$

(11) $\frac{25-5\sqrt{7}}{3}$

(12) La base es 3 cm y la altura 5 cm.

(13) La base es $R\sqrt{2}$ y la altura $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

(14) La base debe ser la cuarta parte del perímetro.

(15) El radio es $\frac{20}{3}$ cm y la altura $\frac{20}{3}$ cm.

(16) El radio es $\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ y la altura el doble. S es el área total.

(17) El radio es $\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ y la altura $\frac{2R}{\sqrt{3}}$

(18) El radio es $r = R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$

(19)

(20) El radio es $r = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}}{\pi}}$ m.

(21) El ángulo debe ser $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$. Aproximadamente 294°.

11. Representación de funciones

1. Estudiar y representar las siguientes funciones:

   a) $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

   b) $y = x + \dfrac{1}{x}$

2. Representar gráficamente la función $y = x^3 - 3x$.

3. Dada la función

   $$y = \frac{x-1}{x+1}$$

   determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, los puntos de inflexión y las asíntotas. Esbócese su gráfica.

4. Se considera la función:

   $$y = \frac{x}{x^2+1}$$

   a) Halle sus asíntotas, máximos y mínimos.

   b) Represéntese gráficamente la función.

5. Estudiar (dominio, crecimiento, máximos, mínimos y asíntotas) y representar gráficamente la función:

   $$y = \frac{2x-1}{x-x^2}$$

6. Representar gráficamente la función:

   $$y = \frac{x^3}{1-x^2}$$

   estudiando las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

7. Calcular las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = e^{\frac{1}{x}}$ y representarla gráficamente.

8. Se considera la función:

   $$y = \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

   Hallar los extremos locales y los puntos de inflexión. Representar gráficamente la función.

9. Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$.

   a) Comprobar que la recta $y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$.

   b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   c) Con los datos anteriores, hacer una representación aproximada de la función.

10. Representar gráficamente las funciones:

    a) $y = x \ln x$

    b) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

11. Sea $f(x) = 2 - x + \ln x$ con $x \in (0, \infty)$. Se pide:

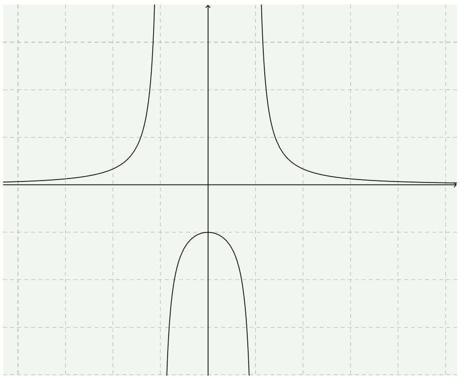
    a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

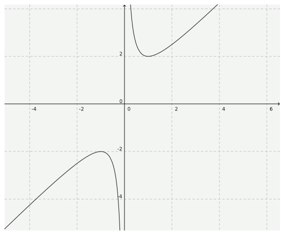
b) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad.

c) Determinar las asíntotas y esbozar la gráfica.

Soluciones:

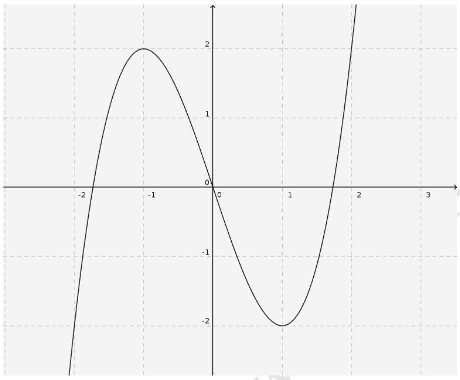
(1)

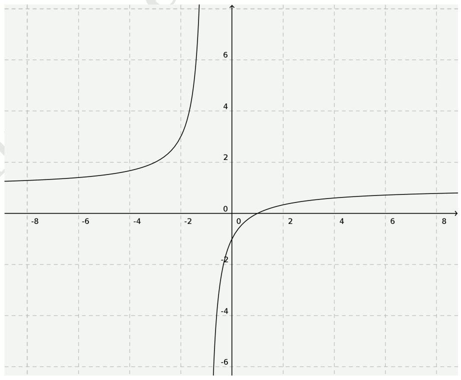




(2)

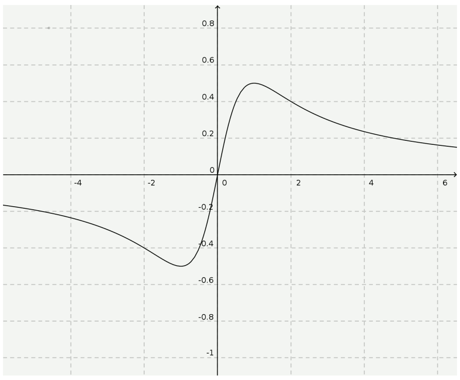
(3)

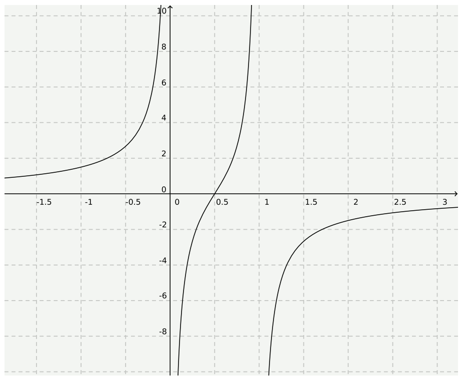




(4)

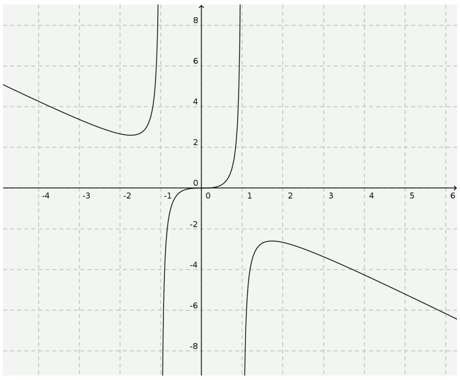
(5)

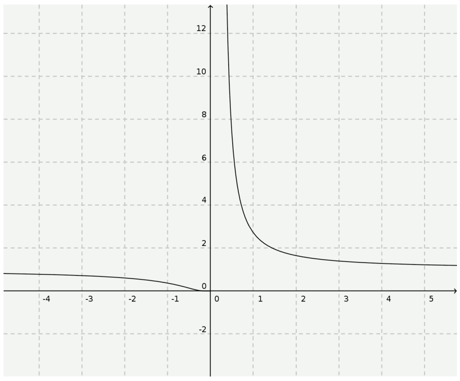




(6)

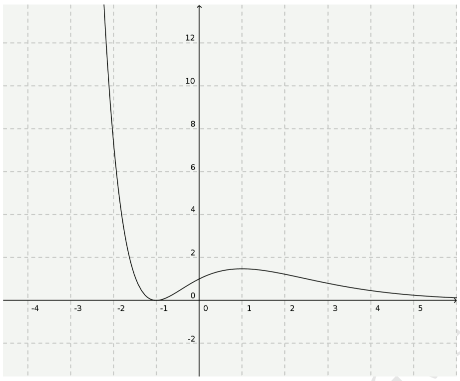
(7)

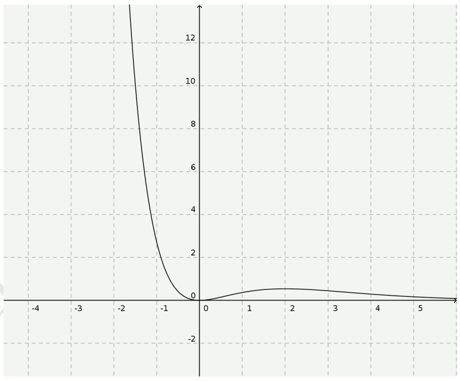

8
6
4
2
0
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
-2
-4
-6
-8


12
10
8
6
4
2
0
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
-2

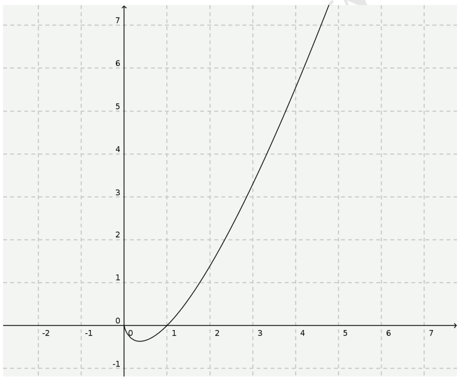
(8)

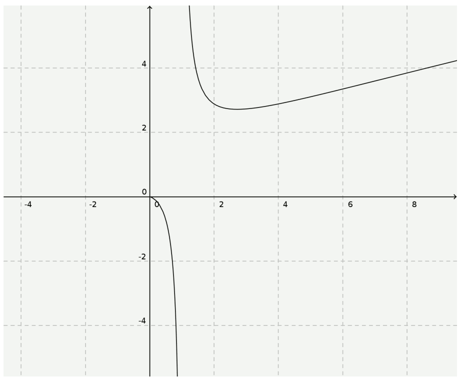
(9)


12
10
8
6
4
2
0
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
-2

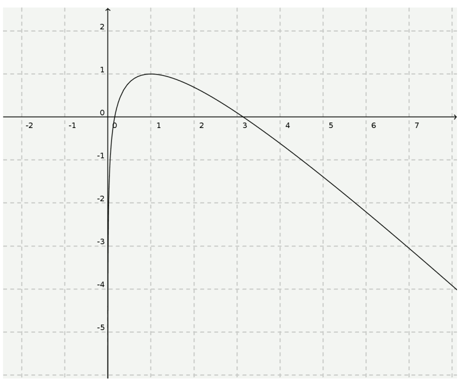

12
10
8
6
4
2
0
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
-2

(10)


7
6
5
4
3
2
1
0
-2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
-1


4
2
0
-4 -2 0 2 4 6 8
-2
-4

(11)


2
1
0
-2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
-1
-2
-3
-4
-5

12. Problemas BI

1. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de tal forma que su posición en un tiempo t está dada por:

$$x(t) = t^3 - 7t^2 + 11t - 2{,}5$$

   a) Calcular la velocidad y aceleración en el tiempo t.
   b) Calcular el tiempo en que la partícula está en reposo y cuando está acelerando y frenando. Justifica las respuestas.
   c) Calcular los valores de t en que el movimiento cambia de sentido.
   d) Calcular la distancia recorrida en los primeros 3 segundos.

2. La posición de una partícula t segundos después de que comience el movimiento está dada por la función:

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t$$

   metros. Calcular:

   a) La velocidad y aceleración en función de t.
   b) El momento en que la partícula está (I) en reposo (II) acelerando (III) frenando.
   c) La aceleración cuando la velocidad de la partícula es cero. Interpretar la respuesta.
   d) El momento en que la partícula cambia de dirección.
   e) La distancia recorrida en los primeros cinco segundos.

3. Una caja sin tapa se construye cortando cuadrados en los vértices de una pieza de cartón cuadrada de 4 m de lado. Calcular el tamaño de los cuadrados de forma que el volumen de la caja sea máximo.

4. Calcular las dimensiones de una lata cilíndrica de un litro de capacidad de forma que su superficie sea mínima.

5. Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima cuya base está en el eje de abscisas y sus otros dos vértices sobre la parábola $y = 10 - x^2$.

6. Una lámina de latón de 36 cm de perímetro se enrolla para formar un cilindro.

   a) Calcular sus dimensiones de forma que el volumen del cilindro sea máximo.
   b) La misma lámina gira alrededor de uno de sus lados para generar el cilindro. Calcular las dimensiones para que el volumen sea máximo.

7. Calcular la pendiente de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el punto $(0, 1)$.

8. Calcular la derivada del folium de Descartes $x^3 + y^3 - 9xy = 0$.

9. El punto $P(2, m)$ donde $m < 0$ se encuentra en la curva $2x^2y + 3y^2 = 16$:

   a) Calcular el valor de m.
   b) Calcular la pendiente de la normal y la tangente en P.

10. Dada la curva $x + y = x^2 - 2xy + y^2$:

   a) Calcular su derivada.
   b) Demostrar que $1 - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2}{2x - 2y + 1}$.
   c) Demostrar que $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \left(1 - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3$.

11. Una escalera de 10 m de longitud se encuentra apoyada sobre una pared. La parte superior desliza sobre la pared con una velocidad de 0,5 m s^{-1}. Calcular la velocidad con que desliza sobre el suelo el otro extremo de la escalera cuando se encuentra a 6 m de la pared.

12. Un depósito cónico se llena con agua a razón de 3 m^3 min^{-1}. El depósito está situado con el vértice hacia abajo. ¿A qué velocidad sube el nivel del agua cuando la profundidad es de 2 m y el radio de la superficie del agua es de 1,5 m?

13. El volumen de un cubo aumenta a 1,5 m s^{-1}.Calcular la velocidad con que aumenta la superficie del cubo cuando su volumen es de 81 m^3.

14. Un avión que vuela a una altura de 8000 m pasa sobre una estación de radar. Cuando el avión se encuentra a 12000 m de la estación, el radar obtiene que la distancia está cambiando con una velocidad de 320 km h^{-1}. Calcular la velocidad del avión en ese momento.

15. Dos circunferencias concéntricas se están expandiendo. En el tiempo t el radio de la circunferencia exterior es de 9 m y está creciendo a un ritmo de 1,2 m s^{-1}. El radio de la circunferencia interior es de 1 m y crece a 1,5 m s^{-1}. Calcular la velocidad de crecimiento del área de la corona comprendida entre ambas circunferencias en el tiempo t.

16. Calcular los valores de a para los que la serie

$$a^2 + \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2} + \cdots$$

es convergente y calcular su suma.

17. Dada la función:

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{x^2 - x^3}$$

calcular:

a) Su asíntota horizontal.

b) Los puntos en que la curva se corta con su asíntota.

18. Sea f una función par definida en el intervalo $(-a, a)$, $a > 0$. Demostrar que si f es derivable en todo su dominio, la tangente a su gráfica en $x = 0$ es paralela al eje x.

19. Si f es una función tal que $f(x) = [g(x)]^3$, $g(0) = -\frac{1}{2}$, $g'(0) = \frac{8}{3}$, calcular la ecuación de la tangente a $f(x)$ en $x = 0$.

20. Calcular la menor distancia del punto $(1{,}5, 0)$ a la curva $y = \sqrt{x}$.

21. Con una pieza de alambre de 80 cm se forman dos circunferencias iguales y un cuadrado. Calcular el radio de las circunferencias si queremos que la suma de las tres áreas sea mínima.

22. Una escalera de 10 m de longitud se apoya contra una pared. En determinado momento, el extremo superior empieza a deslizar hacia abajo con una velocidad de 0,5 m s^{-1}. Calcular la velocidad de cambio del ángulo que forma la escalera con el suelo cuando la escalera se apoya a 8 m del suelo.

23. Un cámara profesional se encuentra filmando un safari. Supongamos que está situado a 30 m de un árbol, siguiendo a unos pájaros que vuelan a una velocidad de 95 km h^{-1}. Los pájaros se mueven perpendicularmente a la línea que une el árbol con el cámara. ¿A qué velocidad debe girar la cámara para seguir a un pájaro:

a) Que está justo enfrente de la cámara.

b) Un segundo después.

Soluciones:

(1) (a) $v = 3t^2 - 14t + 11$, $a = 6t - 14$ (b) Está en reposo en $t = 1$ y $t = \frac{11}{3}$, la partícula acelera cuando a y v tienen el mismo signo, o sea, para $1 < t < \frac{7}{3}$ y para $t > \frac{11}{3}$. (c) $t = 1$ y $t = \frac{11}{3}$ (d) 13 m

(2) (a) $v = t^2 - 6t + 8$, $a = 2t - 6$ (b) (I) $t = 2$ y $t = 4$ (II) $2 < t < 3$ y $t > 4$ (III) $0 < t < 2$ y $3 < t < 4$ (c) $a = -2$ y $a = 2$ (d) $t = 2$ y $t = 4$ (e) 9,33 m

(3) $\frac{2}{3}$ m

(4) $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \simeq 5{,}42$, $h = \frac{100}{\sqrt[3]{250\pi}} \simeq 10{,}8$

(5) $2\sqrt{\frac{10}{3}} \simeq 3{,}65$, $\frac{20}{3} \simeq 6{,}67$

(6) (a) $\sqrt{12} \simeq 3{,}46$, $18 - \sqrt{12} \simeq 14{,}5$ (b) lo mismo

(7) $m = 0$

(8) $y' = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$

(9) (a) $m = -4$ (b) $\frac{1}{2}$ y -2

(10) (a) $y' = \frac{2x - 2y - 1}{2x - 2y + 1}$ (b) $*$ (c) $*$

(11) $\frac{2}{3}$ m s^{-1}

(12) $\frac{4}{3\pi}$ m s^{-1}

(13) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ m^2 s^{-1} $\simeq 1{,}39$ m^2 s^{-1}

(14) $\frac{320\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$ km h^{-1} $\simeq 496$ km h^{-1}

(15) 58,4 m^2 s^{-1}

(16) Es convergente para todos los valores de a distintos de cero. La suma es $1 + a^2$

(17) Asíntota $y = -1$, puntos de corte $\left(\sqrt{5}, -1\right)$ y $\left(-\sqrt{5}, -1\right)$

(18) Si $f(x) = f(-x)$ entonces $f'(x) = -f'(-x)$. Por tanto $f'(0) = 0$

(19) $y = 2x - \frac{1}{8}$

(20) $\sqrt{1{,}25}$

(21) $\frac{20}{2+\pi}$ cm

(22) $-\frac{1}{12}$ s^{-1}

(23) $\frac{95}{108} \simeq 0{,}880$ s^{-1}, 0,496 s^{-1}

13. Integral indefinida

1. Calcular las siguientes integrales inmediatas:

   $(a)\ \int (4x^2 - 5x + 7)\,\mathrm{d}x$ $\quad (b)\ \int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,\mathrm{d}x$ $\quad (c)\ \int \frac{1}{2x+7}\,\mathrm{d}x$

2. Calcular las siguientes integrales inmediatas:

   $(a)\ \int (x - \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x$ $\quad (b)\ \int (x^2+4)x(x^2-1)\,\mathrm{d}x$ $\quad (c)\ \int (x-1)^3\,\mathrm{d}x$

3. Calcular las siguientes integrales inmediatas:

   $(a)\ \int \sqrt{3x}\,\mathrm{d}x$ $\quad (b)\ \int (\operatorname{sen} x + e^x)\,\mathrm{d}x$ $\quad (c)\ \int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$

4. Calcular las siguientes integrales inmediatas:

   $(a)\ \int \operatorname{sen}(x-\pi)\,\mathrm{d}x$ $\quad (b)\ \int \frac{7}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ $\quad (c)\ \int (e^x + 3e^{-x})\,\mathrm{d}x$

5. Calcular las siguientes integrales inmediatas:

   $(a)\ \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$ $\quad (b)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ $\quad (c)\ \int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

6. Calcular las siguientes integrales inmediatas:

   $(a)\ \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$ $\quad (b)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (c)\ \int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$

7. Calcular las siguientes integrales:

   $(a)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x-4}$ $\quad (b)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-4)^2}$ $\quad (c)\ \int (x-4)^2\,\mathrm{d}x$ $\quad (d)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-4)^3}$

8. Calcular las siguientes integrales:

   $(a)\ \int e^{x-4}\,\mathrm{d}x$ $\quad (b)\ \int e^{-2x+9}\,\mathrm{d}x$ $\quad (c)\ \int e^{5x}\,\mathrm{d}x$ $\quad (d)\ \int (3^x - x^3)\,\mathrm{d}x$

9. Resuelve las siguientes integrales de tipo arcotangente:

   $(a)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}$ $\quad (b)\ \int \frac{4\,\mathrm{d}x}{3+x^2}$ $\quad (c)\ \int \frac{5\,\mathrm{d}x}{4x^2+1}$ $\quad (d)\ \int \frac{2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x$

10. Calcula las siguientes integrales del tipo arcoseno:

    $(a)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}$ $\quad (b)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$ $\quad (c)\ \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$

11. Calcular las siguientes integrales racionales:

    $(a)\ \int \frac{x^2-5x+4}{x+1}\,\mathrm{d}x$ $\quad (b)\ \int \frac{x^2+2x+4}{x+1}\,\mathrm{d}x$ $\quad (c)\ \int \frac{x^3-3x^2+x-1}{x-2}\,\mathrm{d}x$

12. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$

13. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x-2}$ (b) $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x$

14. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+6x+6}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$

15. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{x-2}{2x^2+x+2}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{x-1}{2x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x$

16. Calcula las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \cos x \operatorname{sen}^3 x\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+3)^5}$ (d) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ln^3 x\,\mathrm{d}x$

17. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int x^4 e^{x^5}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x^2\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$

18. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+5}}$ (b) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^5 x}\,\mathrm{d}x$

19. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{(x+3)^5}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{3x}{2-6x^2}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x}(x-1)\,\mathrm{d}x$

20. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \sec^2 x\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \sqrt{(1+\cos x)^3}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

21. Integrar por partes:

(a) $\displaystyle\int x^2 e^{3x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \operatorname{artg} x\,\mathrm{d}x$

22. Integrar por partes:

(a) $\displaystyle\int x \cos x\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int x \ln x\,\mathrm{d}x$

23. Integrar por partes:

(a) $\displaystyle\int \arccos x\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int x \cos 3x\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int x^5 e^{-x^3}\,\mathrm{d}x$

24. Calcula $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$ integrando por partes dos veces.

25. Calcula:

$(a)\ \displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (b)\ \int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x \qquad (c)\ \int \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (d)\ \int \frac{\operatorname{artg} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

26. Calcular:

$(a)\ \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad (b)\ \int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad (c)\ \int (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$

27. Calcular:

$(a)\ \displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x \qquad (b)\ \int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \qquad (c)\ \int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

28. Calcular:

$(a)\ \displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx \qquad (b)\ \int \cos^2 x\,dx \qquad (c)\ \int e^x\cos x\,dx$

29. Encuentra la primitiva de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1+3x}$$

que se anula para $x = 0$.

30. Halla la función $F(x)$ para la que

$$F'(x) = \frac{1}{x^2}; \qquad F(1) = 2$$

31. De todas las primitivas de la función $y = 4x - 6$, ¿cuál de ellas toma el valor 4 para $x = 1$?

Soluciones (no se ha puesto la constante de integración):

(1) (a) $\frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x$ (b) $\frac{5\sqrt[5]{x^4}}{4}$ (c) $\frac{1}{2}\ln|2x+7|$

(2) (a) $\frac{x^2}{2} + \cos x$ (b) $\frac{x^6}{6} - \frac{3x^4}{4} - 2x^2$ (c) $\frac{(x-1)^4}{4}$

(3) (a) $\frac{2x\sqrt{3x}}{3}$ (b) $-\cos x + e^x$ (c) $\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4}$

(4) (a) $-\cos(x+\pi)$ (b) $7\operatorname{tg} x$ (c) $e^x - 3e^{-x}$

(5) (a) $2\ln|x|$ (b) $\ln|x-1|$ (c) $\ln x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

(6) (a) $3\operatorname{artg} x$ (b) $\operatorname{arsen} x$ (c) $-x + \operatorname{tg} x$

(7) (a) $\ln|x-4|$ (b) $\frac{-1}{x-4}$ (c) $\frac{(x-4)^3}{3}$ (d) $\frac{-1}{2(x-4)^2}$

(8) (a) e^{x-4} (b) $-\frac{1}{2}e^{-2x+9}$ (c) $\frac{1}{5}e^{5x}$ (d) $\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x^4}{4}$

(9) (a) $\frac{1}{2}\operatorname{artg}\frac{x}{2}$ (b) $\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{artg}\frac{x}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{5}{2}\operatorname{artg}(2x)$ (d) $\frac{2}{3}\operatorname{artg}(3x)$

(10) (a) $\frac{1}{2}\operatorname{arsen} x$ (b) $\operatorname{arsen}\frac{x}{2}$ (c) $\operatorname{arsen} e^x$

(11) (a) $\frac{x^2}{2} - 6x + 10\ln|x+1|$ (b) $\frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x+1|$ (c) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - 3\ln|x-2|$

(12) (a) $\ln|x^2+3x-10|$ (b) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\operatorname{artg} x$ (c) $2\ln(x+2) + \ln(x-2)$

(13) (a) $\frac{1}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}\ln(x+1)$ (b) $-\frac{1}{2}\ln|x+2| + 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x|$ (c) $\frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}$

(14) (a) $2\ln x - \frac{3}{x+1}$ (b) $\frac{1}{3}\operatorname{artg}(x+1)$ (c) $\operatorname{artg}(x+2)$

(15) (a) $\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\operatorname{artg}(x+1)$ (b) $\frac{1}{4}\ln(2x^2+x+2) - \frac{3\sqrt{15}}{10}\operatorname{artg}\frac{4x+1}{\sqrt{15}}$ (c) $\frac{1}{4}\ln(2x^2+4x+3) - \sqrt{2}\operatorname{artg}(x+1)\sqrt{2}$

(16) (a) $\frac{\operatorname{sen}^4 x}{4}$ (b) e^{x^2} (c) $\frac{-1}{8(x^2+3)^4}$ (d) $\frac{(\ln x)^4}{4}$

(17) (a) $\frac{e^{x^5}}{5}$ (b) $-\frac{\cos x^2}{2}$ (c) $\operatorname{arsen}\frac{x}{3}$

(18) (a) $\sqrt{x^2+5}$ (b) $-\frac{\cos^2 x}{2}$ (c) $\frac{1}{4\cos^4 x}$

(19) (a) $\frac{2\sqrt{(x+3)^7}}{7}$ (b) $-\frac{1}{4}\ln|2-6x^2|$ (c) $\frac{\sqrt{(x^2-2x)^3}}{3}$

(20) (a) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}$ (b) $\frac{(1+\ln x)^3}{3}$ (c) $-\frac{2\sqrt{(1+\cos x)^5}}{5}$

(21) (a) $\frac{1}{27}(9x^2-6x+2)e^{3x}$ (b) $-\frac{1+x}{e^x}$ (c) $x\operatorname{artg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

(22) (a) $\cos x + x\operatorname{sen}x$ (b) $-x^3\cos x+3x^2\operatorname{sen}x-6\operatorname{sen}x+6x\cos x$ (c) $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$

(23) (a) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$ (b) $\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{3}x\operatorname{sen}3x$ (c) $-\frac{1}{3}(1+x^3)e^{-x^3}$

(24) $\frac{1}{2}x\cos\ln x+\frac{1}{2}x\operatorname{sen}\ln x$

(25) (a) $\frac{1}{2}(\ln x)^2$ (b) $\ln(\ln x)$ (c) $\cos\frac{1}{x}$ (d) $\frac{1}{2}(\operatorname{artg}x)^2$

(26) (a) $-2\cos\sqrt{x}$ (b) $\sqrt{x}\ln x-2\sqrt{x}$ (c) $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$

(27) (a) $\frac{2}{15}\sqrt{(x+1)^3}(x-2)$ (b) $\frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-2)$ (c) $-\ln|x-1|+2\sqrt{x}+\ln|-1+\sqrt{x}|-\ln|1+\sqrt{x}|$

(28) (a) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}x\cos x$ (b) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x\cos x$ (c) $\frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen}x+\cos x)$

(29) $\frac{1}{3}\ln|1+3x|$

(30) $\frac{-1}{x}+3$

(31) $2x^2-6x-7$

14. Más integrales indefinidas

Calcular las siguientes integrales:

1. $\int \frac{1+x^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

2. $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

3. $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x$

4. $\int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

5. $\int \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$ (multiplicar y dividir por $1-\cos x$)

6. $\int (\operatorname{tg}2x+\sec 2x)^2\,\mathrm{d}x$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$

8. $\int \frac{1}{9+x^2}\,\mathrm{d}x$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{25-16x^2}}\,\mathrm{d}x$

10. $\int \frac{1}{4x^2+9}\,\mathrm{d}x$

11. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-9}}\,\mathrm{d}x$

12. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x$ (hacer $t=x^3$)

13. $\int \frac{x}{x^4+3}\,\mathrm{d}x$ (hacer $t=x^2$)

14. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}x$

15. $\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

16. $\int \frac{\sec x\operatorname{tg}x}{9+4\sec^2 x}\,\mathrm{d}x$

17. $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

18. $\int \frac{1}{x^2+10x+30}\,\mathrm{d}x$

19. $\int \frac{1}{\sqrt{20+8x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

20. $\int \frac{1}{2x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

21. $\int \frac{1}{2\sqrt{28-12x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

22. $\int \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

23. $\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$

24. $\int (x-2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$

25. $\int \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$

26. $\int \frac{1}{\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x$

27. $\int \sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x$

28. $\int \sqrt{2-3x}\,\mathrm{d}x$

29. $\int x\sqrt[3]{2x^2+3}\,\mathrm{d}x$

30. $\int \sqrt{1+x^4}\,x^3\,\mathrm{d}x$

31. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+4)^3}\,\mathrm{d}x$

32. $\displaystyle\int (x-1)^2 x\,\mathrm{d}x$

33. $\displaystyle\int (x^2-x)^4(2x-1)\,\mathrm{d}x$

34. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}}\,\mathrm{d}x$

35. $\displaystyle\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

36. $\displaystyle\int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

37. $\displaystyle\int \sec 3x \operatorname{tg} 3x\,\mathrm{d}x$

38. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 2x\,\mathrm{d}x$

39. $\displaystyle\int x \sec^2 x^2\,\mathrm{d}x$

40. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$

41. $\displaystyle\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

42. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\,\mathrm{d}x$

43. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-4\operatorname{tg}^2 x}}\,\mathrm{d}x$

44. $\displaystyle\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x$

45. $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

46. $\displaystyle\int (e^x+1)^3 e^x\,\mathrm{d}x$

47. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$

48. $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,\mathrm{d}x$

49. $\displaystyle\int e^{-x^2+2}x\,\mathrm{d}x$

50. $\displaystyle\int (e^x+1)^2\,\mathrm{d}x$

51. $\displaystyle\int (e^x-x^e)\,\mathrm{d}x$

52. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,\mathrm{d}x$

53. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$

54. $\displaystyle\int x^3\, 5^{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

55. $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

56. $\displaystyle\int \ln(x^2+2)\,\mathrm{d}x$

57. $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$

58. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

59. $\displaystyle\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$

60. $\displaystyle\int \operatorname{arsen} x\,\mathrm{d}x$

61. $\displaystyle\int \operatorname{artg} x\,\mathrm{d}x$

62. $\displaystyle\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x$

63. $\displaystyle\int \arccos 2x\,\mathrm{d}x$

64. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

65. $\displaystyle\int x^3 e^{2x}\,\mathrm{d}x$

66. $\displaystyle\int x \cos x\,\mathrm{d}x$

67. $\displaystyle\int x \sec^2 3x\,\mathrm{d}x$

68. $\displaystyle\int x \operatorname{artg} x\,\mathrm{d}x$

69. $\displaystyle\int x^2 e^{-3x}\,\mathrm{d}x$

70. $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

71. $\displaystyle\int x \operatorname{arsen} x^2\,\mathrm{d}x$

72. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

73. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$

74. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x-4}\,\mathrm{d}x$

75. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\,\mathrm{d}x$

76. $\displaystyle\int \frac{x}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$

77. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$

78. $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+2x+6}\,\mathrm{d}x$

79. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$

80. $\displaystyle\int \frac{4x-1}{2x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$

Soluciones: (no se ha puesto la constante de integración):

(1) $2\sqrt{x}\left(1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}x^2\right)$ (2) $\frac{x^2}{x+1}$ (3) $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$ (4) $\sec x$ (5) $-\operatorname{cotg} x+\operatorname{cosec} x$ (6) $\operatorname{tg} 2x+\sec 2x-x$ (7) $\operatorname{arsen}\frac{x}{2}$ (8) $\frac{1}{3}\operatorname{artg}\frac{x}{3}$ (9) $\frac{1}{4}\operatorname{arsen}\frac{4x}{5}$ (10) $\frac{1}{6}\operatorname{artg}\frac{2x}{3}$ (11) $\frac{1}{3}\operatorname{arsec}\frac{2x}{3}$ (12) $\frac{1}{3}\operatorname{arsen} x^3$ (13) $\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{artg}\frac{x^2\sqrt{3}}{3}$ (14) $\frac{1}{2}$ (15) $\frac{3x^2}{2}-4x+4\operatorname{artg} x$ (16) $\frac{1}{6}\operatorname{artg}\frac{2\sec x}{3}$ (17) $-\sqrt{1-x^2}+3\operatorname{arsen} x$ (18) $\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{artg}\frac{(x+5)\sqrt{5}}{5}$ (19) $\operatorname{arsen}\frac{x-4}{6}$ (20) $\frac{1}{3}\operatorname{artg}\frac{2x+1}{3}$ (21) $\operatorname{arsen}\frac{x+6}{8}$ (22) $-\sqrt{5-4x-x^2}+\operatorname{arsen}\frac{x+2}{3}$ (23) $-\sqrt{4x-x^2}+4\operatorname{arsen}\frac{x-2}{2}$ (24) $\frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}}$ (25) $-\frac{1}{2(x-1)^2}$ (26) $2\sqrt{x+3}$ (27) $\frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}$ (28) $-\frac{2}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}}$ (29) $\frac{3}{16}(2x^2+3)^{\frac{4}{3}}$ (30) $\frac{1}{6}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}$ (31) $-\frac{1}{4(x^2+4)^2}$ (32) $\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$ (33) $\frac{1}{5}(x^2-x)^5$ (34) $\sqrt{x^2+2x-4}$ (35) $\frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3$ (36) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}$ (37) $\frac{1}{3}\sec 3x$ (38) $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg} 2x$ (39) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x^2$ (40) $\operatorname{tg} x-x$ (41) $-\frac{1}{5}\cos^5 x$ (42) $\operatorname{arsen}\frac{x\sqrt{5}}{5}$ (43) $\frac{1}{2}\operatorname{arsen}(2\operatorname{tg} x)$ (44) $\frac{1}{2\ln 3}3^{2x}$ (45) $-e^{\frac{1}{x}}$ (46) $\frac{(e^x+1)^4}{4}$ (47) $x-\ln(e^x+1)$ (48) $-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x^2}}$ (49) $-\frac{1}{2}e^{-x^2+2}$ (50) $\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x$ (51) $e^x-\frac{x^{e+1}}{e+1}$ (52) $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3)$ (53) $\operatorname{arsen} e^x$ (54) $\frac{1}{4\ln 5}5^{x^4+1}$ (55) $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)$ (56) $x\left(\ln(x^2+2)-2\right)+2\sqrt{2}\operatorname{artg}\frac{x}{\sqrt{2}}$ (57) $x(\ln x-1)$ (58) $-x\cos x+\operatorname{sen} x$

(59) $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3$ (60) $x \operatorname{arsen} x + \sqrt{1-x^2}$ (61) $x \operatorname{artg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ (62) $\frac{1}{2}(\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|)$ (63) $x \arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$
(64) $-x^2\cos x + 2(x \operatorname{sen} x + \cos x)$ (65) $\frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x}$ (66) $x \operatorname{sen} x + \cos x$ (67) $\frac{1}{3}x \operatorname{tg} 3x - \frac{1}{9}\ln|\sec x|$
(68) $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{artg} x - \frac{1}{2}x$ (69) $-\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right)$ (70) $-x^3\cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x\cos x - 6\operatorname{sen} x$
(71) $\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arsen} x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ (72) $-\frac{\ln x + 1}{x}$ (73) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|$ (74) $\frac{1}{5}\ln\left|(x+1)(x-4)^4\right|$ (75) $x + \ln\left|(x+2)(x-4)^4\right|$ (76) $\ln|x-2| - \frac{2}{x-2}$
(77) $\ln(x^2+x+1)$ (78) $\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{artg}\frac{x+1}{\sqrt{5}}$ (79) $\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - 3\operatorname{artg}(x+2)$ (80) $\ln(2x^2+3x+2) - \frac{8}{\sqrt{191}}\operatorname{artg}\frac{4x+3}{\sqrt{191}}$

81. Demostrar la siguiente fórmula de reducción:

$$\int \operatorname{sen}^m x \, \mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \operatorname{sen}^{m-2} x \, \mathrm{d}x$$

82. Aplicar la fórmula anterior para calcular la integral de $\operatorname{sen}^2 x$.

83. Calcular la integral de $\operatorname{sen}^3 x$.

84. $\int \sec x \, \mathrm{d}x$ Con el cambio $t = \operatorname{sen} x \quad \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\int \sec x \, \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\cos x} \, \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\cos x}\frac{1}{\cos x} \, \mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{1-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln|1-t| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + C \\
&= \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C
\end{aligned}$$

85. $\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x$ Por partes $u = \sec x$; $\mathrm{d}v = \sec^2 x \, \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x &= \int \sec x \sec^2 x \, \mathrm{d}x \\
&= \sec x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \sec x \operatorname{tg} x - \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x \\
&= \sec x \operatorname{tg} x - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x \\
&= \sec x \operatorname{tg} x - \int \frac{1}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x + \int \frac{1}{\cos x} \, \mathrm{d}x \\
&= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \, \mathrm{d}x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|
\end{aligned}$$

$$2\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

$$\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

86. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ Con el cambio $x = \operatorname{sen} t$; $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t\\ &= \int \cos t\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\left(t+\operatorname{sen} t\cos t\right)+C\\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsen} x + x\sqrt{1-x^2}\right)+C\end{aligned}$$

87. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ Con el cambio $x = \sec t$; $\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{\sec^2 t-1}\,\frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int \operatorname{tg} t\,\frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\,\frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int \sec^3 t\,\mathrm{d}t - \int \sec t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\sec t\operatorname{tg} t + \frac{1}{2}\ln|\sec t+\operatorname{tg} t| - \ln|\sec t+\operatorname{tg} t| + C\\ &= \frac{1}{2}\sec t\operatorname{tg} t - \frac{1}{2}\ln|\sec t+\operatorname{tg} t| + C\\ &= \frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C\end{aligned}$$

15. Integral definida

1. Se define el valor medio de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ como el cociente

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Calcular el valor medio de la función $f(x) = x\cdot\sqrt{4-x^2}$ en el intervalo $[0,2]$.

2. Sea f una función definida por

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}\ ; \qquad 1 \le x \le 3$$

Hallar c tal que

$$f(c) = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Sea

$$F(x) = \int_0^{2x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Hallar el valor de $F'(0)$.

4. Determinar el valor máximo y mínimo de la función

$$F(x) = \int_1^x \ln t \; \mathrm{d}t$$

en el intervalo $[2, 10]$.

5. Determinar la siguiente integral definida:

$$\int_{-4}^{2} |x^2 - 4| \; \mathrm{d}x$$

6. Hallar el área encerrada por las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$.

7. Dadas las funciones $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = x^2 - x - 2$, encontrar el valor del área comprendida entre ellas.

8. Dadas la parábola $y = 6x - x^2$ y la recta $y = 2x$, determinar el área limitada por ambas.

9. Determinar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

10. Calcular el área de la región limitada por la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y el eje OX.

11. Averiguar el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

12. Calcular el área limitada por la gráfica de la función $y = \cos x$ entre $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$ y el eje OX.

13. Calcular el área encerrada por la curva $y = x \operatorname{sen} x$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

14. Hallar el área limitada por la curva $y = \ln x$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

15. Hallar el área del recinto limitado por los ejes de coordenadas, la recta $y = 2$ y la curva cuya ecuación es $y = \sqrt{x - 2}$.

16. Hallar el área del recinto plano delimitado por las rectas $y = x$ e $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

17. Determinar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 2x$ y $g(x) = x^2$ cuando solo se consideran valores positivos de x.

18. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = |x|$ e $y = x^2 - 1$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

19. Representar la región del plano limitada por $y = \ln x$, su recta tangente en $x = e$ y el eje OX. Calcular su área.

20. Encontrar el área del recinto limitado por las curvas $y = |x - 2|$ e $y = x^2 - 4x - 2$.

21. Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = 2x - x^2$ e $y = -x + 2$.

22. La curva $y = \frac{4}{x+4}$, los ejes de coordenadas y la recta $x = 4$ limitan una superficie S. (a) Calcular el área de S (b) Determinar el volumen de la figura generada por S al dar una vuelta completa alrededor del eje OX.

23. Considérese la figura plana encerrada entre las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ cuando $0 \leq x \leq 1$. Hallar el volumen que genera esta figura cuando da una vuelta completa alrededor del eje OX.

24. Se considera la función

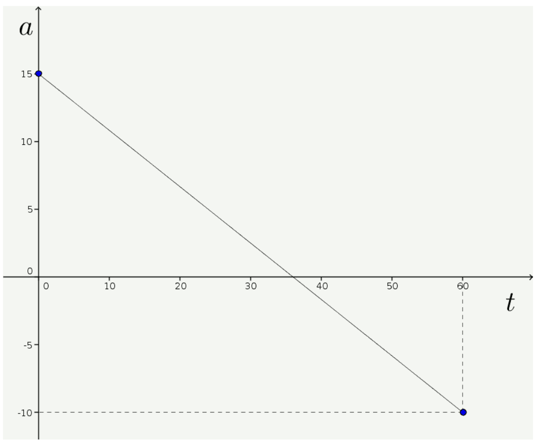
$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$$

Calcular a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(-2, -6)$ y admita en dicho punto una tangente horizontal. Calcular también el área limitada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$.

25. Si la integral definida de una función en el intervalo $[1,2]$ verifica que $\int_1^2 f(x)\,dx \geq 1$, ¿es cierto que para todos los puntos $x \in [1,2]$ se tiene que $f(x) \geq 0$?
26. Sabiendo que la función f es derivable en todos sus puntos y su derivada verifica $f'(x) \geq 1$ para cualquier valor de x y que $f(0) = 3$, demuestra que $f(2) \geq 5$.
27. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en $(0,0)$ y que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$, calcula a, b, c y d.
28. Hallar el valor de a sabiendo que el área limitada por la gráfica de la parábola $y = x^2 - ax$ y el eje OX es de $\frac{32}{3}$.
29. Dos constructores tienen una parcela que han de repartirse en partes iguales para la construcción de un centro comercial. La parcela es la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$. Si deciden dividir la parcela mediante una recta $y = a$ paralela a la recta $y = 1$, hallar el valor de a.
30. Determinar el valor del parámetro a para que el área limitada por las gráficas de $f(x) = \sqrt{ax}$ y $g(x) = \frac{x^2}{a}$, en el primer cuadrante, sea igual a 3 unidades cuadradas.
31. Sea $y = x^2 + a$. Calcular el valor de a para que las tangentes cuya abscisa tenga valor absoluto 1, pasen por el origen de coordenadas. Hallar el área del recinto limitado por la curva y las dos tangentes.
32. Se considera la función $y = xe^{ax}$, donde a es una constante no nula. Calcular el valor de a si sabemos que el área limitada por la curva $y = xe^{ax}$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$, y $x = 1$ es igual a $\frac{1}{a^2}$.
33. Determina el valor de a sabiendo que el área comprendida entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ es 36.
34. Con ayuda de la calculadora representar y calcular el área encerrada por las curvas $y = \cos 2x$ e $y = \ln(x-1)$.
35. Lo mismo para las curvas $y = \cos\frac{x}{2}$ e $y = \cos 2x$ para $x \in [0, 2\pi]$.
36. Lo mismo para las curvas $y = 2\operatorname{sen} x$ e $y = e^{\frac{x}{2}-4} + 1$.
37. Representar el área encerrada por la curva $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, su tangente en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$ y el eje OX.

Soluciones: (1) $\frac{4}{3}$ (2) $c = \sqrt{3}$ (3) 2 (4) $F(2) = 2\ln 2 - 1$, $F(10) = 10\ln 10 - 9$ (máximo y mínimo absoluto) (5) $\frac{64}{3}$ (6) $\frac{1}{6}$ (7) $\frac{125}{24}$ (8) $\frac{32}{3}$ (9) $\frac{3}{2}$ (10) $\frac{4}{3}$ (11) $\ln 2$ (12) $2 - \sqrt{2}$ (13) 1 (14) 1 (15) $\frac{20}{3}$ (16) $\frac{7}{6}$ (17) $\frac{8}{3}$ (18) $\frac{7}{3}$ (19) $\frac{e}{2} - 1$ (20) 27 (21) $\frac{1}{30}\pi$ (22) $4\ln 2, 2\pi$ (23) $\frac{9}{70}\pi$ (24) $2, 2{,}5 + 8\ln 2$ (25) no (26) Aplicar el teorema del valor medio del cálculo diferencial (27) $-1, 0, 3, 0$ (28) 4 y -4 (29) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ (30) 3 (31) $1, \frac{2}{3}$ (32) 1 (33) 5 y -7 (34) 0,668 (35) 3,63 (36) 10,1 (37) 1,30

16. Problemas de cinemática



1. Un avión vuela horizontalmente en línea recta durante un minuto, comenzando en el tiempo $t = 0$, donde t se mide en segundos. La aceleración a, medida en m s^{-2} está dada en la gráfica.
   (a) Calcular una expresión de la aceleración en función del tiempo.
   (b) Suponiendo que en $t = 0$ la velocidad es de 125 m s^{-1}, calcular la velocidad máxima durante el minuto que sigue.
   (c) Suponiendo que el avión supera la barrera del sonido a 295 m s^{-1}, calcular durante cuánto tiempo el avión vuela a una velocidad superior a esta velocidad.

2. Un paracaidista se lanza desde un globo a 2000 m de altura. Su velocidad en m s^{-1}, t segundos después de saltar, está dada por $v = 50\left(1 - e^{-0,2t}\right)$.
   (a) Calcular la aceleración 10 segundos después de saltar.
   (b) ¿A qué altura se encuentra en ese momento?

3. Un cuerpo se mueve en un líquido de forma que su aceleración en m s^{-2} es:

$$a = -\frac{v^2}{200} - 32$$

   donde v es la velocidad del cuerpo en m s^{-1}. La velocidad inicial del cuerpo es de 40 m s^{-1}.
   (a) Demostrar que el tiempo que necesita el cuerpo para frenarse hasta la velocidad V está dado por:

$$T = 200 \int_V^{40} \frac{1}{v^2 + 80^2}\, \mathrm{d}v$$

   (b) Explicar por qué la aceleración puede expresarse como

$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

   y, a partir de este resultado, hallar una integral similar a la del apartado a) para la distancia S recorrida por el cuerpo hasta que se frena a la velocidad V.
   (c) Calcular la distancia recorrida y el tiempo empleado hasta que el cuerpo queda momentáneamente en reposo.

4. La aceleración en m s^{-2} de una partícula que se mueve en línea recta en el tiempo $t \geq 0$ está dada por la función:

$$a = -\frac{1}{2}\,v$$

   Cuando $t = 0$ la velocidad es de 40 m s^{-1}. Calcular una expresión de v en función de t.

5. La aceleración de un cuerpo en función del desplazamiento s es:

$$a = \frac{2s}{s^2 + 1}$$

   a) Hallar una fórmula de la velocidad en función del desplazamiento sabiendo que cuando $s = 1$ m, $v = 2 \text{ m s}^{-1}$.
   b) A partir de esa fórmula calcular la velocidad cuando el cuerpo ha recorrido 5 metros.

Soluciones:

(1) (a) $a = -\frac{5}{12}t + 15$ (b) 139 m s^{-1} (c) 43,8 s

(2) (a) $1{,}35 \text{ m s}^{-2}$ (b) 1810 m

(3) (a) $*$ (b) $S = 100 \int_V^{40} \frac{2v\, \mathrm{d}v}{v^2 + 80^2}$ (c) 1,16 s, 22,3 m

(4) $v = 40e^{-\frac{1}{2}t}$

(5) (a) $v^2 = 4 + 2\ln\frac{s^2+1}{2}$ (b) $3{,}02 \text{ m s}^{-1}$

17. Distribuciones de probabilidad

1. Una variable aleatoria continua tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$\mathrm{p}\,(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(6x^2+4x+1) & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

   Hallar la media y la varianza de X.

2. Una variable aleatoria continua tiene como función de densidad de probabilidad la siguiente:

$$\mathrm{p}\,(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ k & \text{si } 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

   (*a*) Demostrar que $k = \frac{2}{3}$.
   (*b*) Calcular $\mathrm{E}(x)$ y $\mathrm{Var}(x)$.
   (*c*) Demostrar que la mediana es $\frac{1}{36}$ mayor que la media.
   (*d*) Hallar el valor de la constante a para que $\mathrm{p}\,(X > \mathrm{E}(X) - a) = 0{,}95$.

3. Sea

$$\mathrm{p}\,(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   (*a*) Comprobar que $k = \frac{3}{8}$.
   (*b*) Calcular $\mathrm{E}(X)$ y la mediana de X.

4. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X se define como:

$$\mathrm{p}\,(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}\,x & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ \dfrac{27}{8x^2} & \text{si } 3 < x \le r \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   (*a*) Calcular el valor de r.
   (*b*) Calcular la media y la desviación típica.

5. Una variable aleatoria continua tiene una función de densidad de probabilidad dada por:

$$\mathrm{p}\,(x) = \begin{cases} k(2x-x^2) & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   (*a*) Hallar el valor de k.
   (*b*) Calcular $\mathrm{p}\,(0{,}25 < X < 0{,}5)$.

6. La función de probabilidad de una variable aleatoria continua es:

$$\mathrm{p}\,(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\,x(4-x^2) & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   Calcular el valor de la mediana de X.

7. La función de probabilidad de una variable aleatoria continua X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{4-x^2} & \text{para } \dfrac{-2}{3} \le x \le \sqrt{2} \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

(a) Hallar el valor exacto de la constante c.
(b) Dibujar aproximadamente la gráfica de $f(x)$ y, a partir de ella, obtener la moda de la distribución.
(c) Hallar el valor exacto de $\mathrm{E}(x)$.

8. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(4+x^2)} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Hallar la moda de X y el valor exacto de $\mathrm{E}(x)$.

9. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Hallar la probabilidad de que X se encuentre entre la media y la moda.

Soluciones:

(1) $\frac{2}{3}$, $\frac{14}{225}$
(2) (a) $*$ (b) $\mathrm{E}(X) = \frac{11}{9}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{37}{162}$ (c) La mediana es $\frac{5}{4}$ (d) 0,835
(3) (a) $*$ (b) $\mathrm{E}(X) = \frac{3}{2}$, mediana $= \sqrt[3]{4}$
(4) (a) $r = \frac{54}{11}$ (b) $\mathrm{E}(X) = \frac{9}{8} + \frac{27}{8} \ln \frac{18}{11}, \sigma \simeq 1{,}10$
(5) (a) $k = \frac{3}{4}$ (b) $p \simeq 0{,}113$
(6) mediana $\simeq 1{,}08$
(7) (a) $c = \frac{4}{\ln(6+4\sqrt{2})}$ (b) La moda es $\sqrt{2}$ (c) $c \ln \frac{4}{3}$
(8) moda $= 0$, media $= \frac{2}{\pi} \ln 2$
(9) $p \simeq 0{,}117$

18. Problemas de selectividad. Cálculo.

1. Se considera la ecuación $x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1$. Utilizando el teorema de Bolzano de los valores intermedios:

   a) Probar que si $\lambda > 2$, la ecuación admite alguna solución menor que 1.
   b) Probar que si $\lambda < 2$, la ecuación admite alguna solución mayor que 1.

2. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 \text{ si } x \leq 0 \\ x^2 + x \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Contestar razonadamente a las siguientes preguntas:

   a) ¿Es continua en el punto $x = 0$?
   b) ¿Es derivable en el punto $x = 0$?
   c) ¿Alcanza algún extremo?

3. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Estúdiese si $f(x)$ es continua en $x = 2$.
b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 3$.
c) Calcúlense sus asíntotas oblicuas.

4. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad.
b) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, 1)$.

5. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

a) Encontrar los puntos de discontinuidad de f. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.
b) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical.

6. Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos(3x)}{\ln \cos(2x)}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$.

7. Sea la función:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide:

a) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto.
b) Dibujar la gráfica de f en el intervalo dado.
c) Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/3} f(x)\, \mathrm{d}x$

8. Calcular la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

9. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

a) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.
b) Calcular $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\, \mathrm{d}x$

10. Sabiendo que la función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x-4)^2(x^2 - 8x + 7)$$

a) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
b) Hallar los máximos y mínimos relativos de f.
c) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f? Justificar razonadamente la respuesta.

11. Sea $f(x)$ una función derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$ tal que $f(1) = 0$ y

$$\int_0^1 2xf'(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

12. Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:

 a) Tiene un máximo relativo en $x = 1$.

 b) Tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0,1)$.

 c) Se verifica:

$$\int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{4}.$$

13. Dada la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

se pide:

 a) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.

 b) Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado anterior con los dos ejes coordenados.

 c) Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.

14. *a*) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

 b) Demostrar que la sucesión $a_n = \frac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.

 c) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(a_{n+1} - a_n\right)$

15. Calcular:

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x}$$

16. *a*) Calcular los valores de a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

 sea continua para todo valor de x.

 b) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

17. Dada la función $f(x) = xe^{2x}$ se pide:

 a) Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

 b) Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \leq x \leq 1$.

18. *a*) Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

b) Determinar la función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0) = 4$.

19. Sea g una función continua y derivable de la que se conoce la siguiente información:

a) $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, mientras $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$.

b) $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

c) $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 3$.

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

a) Analizar razonadamente la posible existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) Dibujar de manera sistemática la gráfica de $g(x)$.

c) Si $G(x) = \int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t$, encontrar un valor x_0 tal que $G'(x_0) = 0$.

20. Estudiar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(e^x - x^2\right)$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

21. Obtener los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x\,(\ln x)^2$$

siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x.

22. *a*) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1,$$

el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

b) Hallar el valor de c pare el cual el área calculada en el apartado anterior es mínima.

23. Dada la función

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide:

a) Dibujar la gráfica de f estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

b) Calcular $\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$.

24. *a*) Calcular $\displaystyle\int x^3 \ln x\, \mathrm{d}x$

b) Utilizar el cambio de variable $x = e^t - e^{-t}$ para calcular:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}\, \mathrm{d}x$$

Indicación: Para deshacer el cambio de variable, utilizar:

$$t = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

25. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{x+1}$$

según los valores del parámetro α.

26. Calcular la integral

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t}\ \mathrm{d}t$$

27. Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5)$$

obtener:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
b) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.
c) La función f sabiendo que $f(0) = 0$.

28. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si } 1 + ax > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Hallar los valores de los parámetros a y b para los que la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.
b) Para $a = b = 1$ estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

29. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.
b) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.
c) Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.
d) Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$.

30. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbb{R}$.
b) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
c) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto del abscisa $x = 1$.

31. Hallar :

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+4x^3\right)^{\frac{2}{x^3}}$

32. Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$, se pide:

a) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

33. Dadas las funciones:

$$y = 9 - x^2 \ ; \qquad y = 2x + 1$$

se pide:

a) Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.

b) Calcular el área de dicho recinto acotado.

c) Hallar el volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

34. Obtener el valor de a para que:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2+3} \right)^{ax^2} = 4$$

35. Hallar:

a) $\displaystyle\int_{14}^{16} (x-15)^8 \, \mathrm{d}x$ *b*) $\displaystyle\int_{9}^{11} (x-10)^{19}(x-9) \, \mathrm{d}x$

36. Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x^2+5x-20}{x+5}$$

se pide:

a) Estudiar y obtener las asíntotas.

b) Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.

c) Representar gráficamente la función.

37. Calcular los límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{artg} x)^{a/x}$ *b*) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2e^x}{7x+5e^x}$

38. Calcular:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \, \mathrm{d}x$ *b*) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x \, \mathrm{d}x$

39. *a*) Calcular la integral $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2} \, \mathrm{d}x$

b) Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$.

40. *a*) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

b) Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ solo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

41. Dada la función:

$$f(x) = \frac{ax^4+1}{x^3}$$

a) Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para ese valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.

b) Obtener las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.

c) Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.

42. Hallar el valor de λ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

sea continua. Razonar la respuesta.

43. Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

   - ⋄ El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -\frac{1}{3}$, $x = -1$.
   - ⋄ La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0; P(0))$ sea $y = x + 3$.

44. Sabiendo que la función $F(x)$ tiene derivada $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[2; 5]$ y, además, que:

   $F(2) = 1$; $F(3) = 2$; $F(4) = 6$; $F(5) = 3$; $f(3) = 3$ y $f(4) = -1$;

   hallar:

   - ⋄ $\displaystyle\int_2^5 f(x)\, \mathrm{d}x$
   - ⋄ $\displaystyle\int_2^3 (5f(x) - 7)\, \mathrm{d}x$
   - ⋄ $\displaystyle\int_2^4 f(x)F(x)\, \mathrm{d}x$

45. Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

   (*a*) $\displaystyle\int_0^\pi e^{2x} \cos x\, \mathrm{d}x$ (*b*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^2 2x}\, \mathrm{d}x$

46. Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}}\ ; \quad g(x) = (\ln x)^x\ ; \quad h(x) = \operatorname{sen}(\pi - x)$$

   se pide:

   (*a*) Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

   (*b*) Calcular $g'(e)$.

   (*c*) Calcular, en el intervalo $[0, 2\pi]$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y los extremos relativos de $h(x)$.

47. Hallar a, b y c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

48. Dada la función $f(x) = \cos^2 x$, se pide:

   (*a*) Calcular los extremos relativos de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

   (*b*) Calcular los puntos de inflexión de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

   (*c*) Hallar la primitiva $g(x)$ de $f(x)$ tal que $g(\pi/4) = 0$.

49. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$$

se pide:

(a) Hallar $\lim_{x\to 3^+} f(x)$, y $\lim_{x\to -3^-} f(x)$

(b) Hallar $\lim_{x\to \infty} f(x)$, y $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

50. (a) Sea $f(x)$ una función continua tal que

$$\int_1^8 f(u)\, du = 3$$

hallar:

$$\int_1^2 f(x^3)x^2 \,\mathrm{d}x$$

(b) Hallar el dominio de definición y las abscisas de los puntos donde la función:

$$F(x) = -\sqrt{(x-3)(9-x^2)^2}$$

alcanza sus máximos y mínimos relativos.

51. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & x \le 3 \\ -4 + 10x - x^2 & x > 3 \end{cases}$$

se pide:

a) Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?

b) Hallar los puntos en que $f'(x) = 0$.

c) Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.

52. Dada la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$, se pide:

a) Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

b) Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.

c) Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

53. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+3x}{x-1} & x < 0 \\ a & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.

b) Para ese valor de a estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.

c) Hallar si las tiene las asíntotas de la gráfica de $f(x)$.

54. a) Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ y el eje OX entre las abscisas $x = \frac{1}{e}$ y $x = e$.

b) Calcular el área de dicho recinto.
c) Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX.

55. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$$

se pide:

a) Hallar las asíntotas de su gráfica.
b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

56. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}\,\mathrm{d}x$

57. Dada la función $f(x) = 2\cos^2 x$, se pide:

a) Determinar los extremos absolutos en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
b) Determinar los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
c) Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$

58. Dada la función:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$$

se pide:

a) Hallar las asíntotas de su gráfica.
b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.
c) Esbozar la gráfica de la función.

59. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

se pide:

(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$.
(b) Calcular $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$.

60. Dada la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, se pide:

a) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
b) Esbozar la gráfica de $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

61. a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar:

$$f(-2), \quad f'(-2), \quad f''(-2)$$

b) determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $G(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX.

62. Calcular justificadamente:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-2x-e^x+\operatorname{sen}(3x)}{x^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}$

63. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} a - \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

c) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

64. Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4}$$

se pide:

a) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de f.

c) Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

65. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5\operatorname{sen} x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ xe^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.

b) Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a.

c) Calcular la integral:

$$\int_1^{\ln 5} f(x)\,\mathrm{d}x$$

66. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

se pide:

(*a*) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

(*b*) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

(*c*) Calcular $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

67. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x < 0 \\ xe^x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

(a) Estudiar la continuidad de f.
(b) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.
(c) Calcular $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

68. (a) Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.
(b) Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

69. (a) Calcular la integral definida

$$\int_1^4 (1-x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

(b) Calcular los límites:

$$\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^{-x}\ ; \qquad \lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{-x}$$

70. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} a + x\ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 e^x & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

se pide:
(a) Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.
(b) Calcular $f'(x)$ donde sea posible.
(c) Calcular $\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$

71. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} & x < 0 \\ xe^{-x} & x \ge 0 \end{cases}$$

donde ln denota el logaritmo neperiano, se pide:
(a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ y calcular $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
(b) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en $x = 2$.
(c) Calcular $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

72. (a) Determine el polinomio $f(x)$ sabiendo que $f'''(x) = 12$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y además verifica: $f(1) = 3$, $f'(1) = 1$ y $f''(1) = 4$.
(b) Determine el polinomio $g(x)$, sabiendo que $g''(x) = 6$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y que además verifica:

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 5\ ; \qquad \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 14$$

73. Estudie la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ y en $x = 1$ de:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ |x\ln x| & x > 0 \end{cases}$$

donde ln denota el logaritmo neperiano.

Soluciones:

(1) Sea $F(x) = x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1$ continua, $F(1) = \lambda - 2$. Para $\lambda > 2$, $F(1) > 0$ y $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ significa que $F(x)$ tiene un cero menor que 1. Razonar igual para $\lambda < 2$.

(2) (a) si (b) si (c) no

(3) (a) no (b) $y - \frac{21}{5} = \frac{59}{25}(x-3)$ (c) $y = 3x - 8$ en $+\infty$

(4) (a) Continua y no derivable en $x = 2$ (b) $y - 1 = \frac{1}{3}(x-3)$

(5) (a) evitable en $x = 1$, infinito en $x = -1$ (b) $x = -1$

(6) (a) $\frac{9}{4}$ (b) $\frac{1}{8}$

(7) (a) máximos en $-\frac{5\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{3}$, mínimos en $-\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$ (b) (c) $\ln\frac{3}{2}$

(8) La base es $\frac{8}{3}$ y la altura $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (triángulo equilátero)

(9) (a) (b) $y = 1$ máximo en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, mínimo en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ (c) $\frac{2-\ln 5}{2}$

(10) (a) creciente en $(-\infty, 1) \cup (7, \infty)$ decreciente en $(1, 7)$ (b) máximo en $x = 1$, mínimo en $x = 7$ (c) sí

(11) $-\frac{1}{2}$

(12) $a = -\frac{1}{5}$, $b = 0$, $c = \frac{3}{5}$, $d = 1$

(13) (a) $y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$ (b) $(2a, 0)$ y $\left(0, \frac{2}{a}\right)$ (c) $a = 1$

(14) (a) $\mathbb{R} - \{1\}$, siempre creciente, $y = 2$, $x = -1$ (b) si es creciente para todo x también lo es para todo n (c) 2

(15) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

(16) (a) $a = 1$, $b = -2$ (b) derivable en $x = \pi$, no derivable en $x = 0$

(17) (a) dominio $\mathbb{R}$, asíntota $y = 0$ en $-\infty$, decreciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, creciente en $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$, convexa en $(-\infty, -1)$, cóncava en $(-1, \infty)$, mínimo en $x = -\frac{1}{2}$, punto de inflexión en $x = -1$ (b) $\frac{1}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4e^2}$

(18) (a) mínimo en $x = -1$, máximo en $x = 1$, puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$ (b) $3x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4$

(19) (a) no hay asíntota vertical, $y = 3$ es asíntota horizontal en $+\infty$, puede haber una asíntota oblicua en $-\infty$ (b) (c) $x = -1$

(20) (a) ∞ (b) 0

(21) máximo en $x = e^{-2}$, mínimo en $x = 1$, punto de inflexión en $x = e^{-1}$

(22) (a) $S = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$ (b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$

(23) (a) siempre decreciente, puntos de inflexión en $x = 1$ (tangente horizontal) y $x = 3$ (b) $3 - 6e^{-1}$

(24) (a) $\frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$ (b) $\ln\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} + C$

(25) El límite es 1 si $\alpha \neq 0$ y $e^{\frac{1}{4}}$ si $\alpha = 0$

(26) $F(x) = 2 - (2 + 2x + x^2)e^{-x}$

(27) (a) creciente en $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$, decreciente en $(1, 5)$ (b) máximo en $x = 1$, mínimo en $x = 5$, punto de inflexión en $x = 4$ (c) $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^4(x-5) - \frac{(x-3)^5}{20} + \frac{6}{5}$

(28) (a) $a = b = -1$, $a = b = 1$ (b) $f'(0) = \frac{1}{3}$

(29) (a) creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, \infty)$ (b) $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $y = 1$ (d) $3 - \frac{\pi}{4}$

(30) (a) 0 (b) $(0, 0)$, $(1, 0)$ (c) $y = \frac{1}{4}(x-1)$

(31) (a) -1 (b) e^2

(32) (a) $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$ (b) decreciente en $(-\infty, -5)$, creciente en $(1, \infty)$

(33) (a) (b) 36 (c) $\frac{1296\pi}{5}$

(34) $-\frac{1}{3}\ln 2$

(35) (a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{2}{21}$

(36) (a) $x = -5$, $y = 3x - 10$ (b) convexa en $(\infty, -5)$, cóncava en $(-5, \infty)$

(37) (a) e^a (b) $\frac{2}{5}$

(38) (a) $2 - \sqrt{3}$ (b) -2

(39) (a) $\frac{316}{15}$ (b) $0, \sqrt{12}$

(40) (a) 1

(41) (a) 3, -1 (b) $x = 0$, $y = x$

(42) 6

(43) 2, 1 y 3

(44) $(a)\ 2\ (b)\ -2\ (c)\ \frac{35}{2}$

(45) $(a)\ -\frac{2}{5}\left(1+e^{2\pi}\right)\ (b)\ \frac{\pi}{4}$

(46) $(a)\ (3,\infty),\ 3\ (b)\ 1\ (c)\ 0,\pi,2\pi,\ \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

(47) $-9,15,-5$

(48) $(a)\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2}\ (b)\ \pm\frac{\pi}{4},\ \pm\frac{3\pi}{4}\ (c)\ \frac{1}{2}(x+\operatorname{sen} x\cos x)-\frac{\pi+2}{8}$

(49) $(a)\ 0,\ -\infty\ (b)\ 1,\ -1$

(50) $(a)\ 1\ (b)\ x\geq 3,\ x=3$

(51) (a) $A=8$, no (b) $x=5$ (c) máximo en $(5,20)$, mínimo en $(8,12)$

(52) (a) no (b) $-4+\pi^2$ (c) $y=\frac{1}{\pi^2}(x-\pi)$

(53) (a) 0, no (b) $y=2x+5,\ y=1$

(54) $(a)\ \ (b)\ 2-\frac{2}{2}\ (c)\ \pi\left(e-\frac{5}{e}\right)$

(55) $(a)\ x=3,\ y=x+6\ (b)\ y-8=28(x-2)$

(56) $(a)\ \frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\operatorname{artg}\frac{x}{3}+C\ (b)\ \frac{21}{8}-\ln 2$

(57) $(a)\ x=0,\ x=\pm\frac{\pi}{2}\ (b)\ x=\pm\frac{\pi}{4}\ (c)\ \frac{\pi}{2}$

(58) (a) $x=4,\ x=-1,\ y=0$ (b) siempre decreciente, $x=2$

(59) $(a)\ y=x\ (b)\ 1-\frac{\pi}{4}$

(60) (a) $\lim_{x\to\infty} f=1$, $\lim_{x\to-\infty} f=1$, $\lim_{x\to 0^-} f=0$, $\lim_{x\to 0^+} f=\infty$ (b) siempre decreciente, asíntotas $x=0,\ y=1$

(61) $(a)\ -16,\ 16,\ 0\ (b)\ \frac{256}{5}$

(62) $(a)\ -\frac{1}{2}\ (b)\ \frac{5}{2}$

(63) (a) $0,\ -\infty$ (b) $a=0$ (c) no derivable en $x=0$

(64) (a) $\mathbb{R}-\{-1,-4\}$, $x=-1$, $x=-4$, $y=1$ (b) máximo en $x=-2$, mínimo en $x=2$ (c) $1+9\ln 2-4\ln 5$

(65) (a) $a=3$ (b) no (c) $8\ln 5-8$

(66) $(a)\ x=-1,\ x=2,\ y=0\ (b)\ y=\frac{3}{4}x\ (c)\ \frac{1}{2}\ln(x^2-4)+\frac{(\ln(x+1))^2}{2}+C$

(67) (a) continua para todo x (b) no es derivable en $x=0$, $f'(x)$ es igual a $\frac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{x^2}$ si $x<0$ y $e^x(x+1)$ si $x>0$ (c) $2+2e^3$

(68) (a) siempre creciente (b) Tiene un cero en $(-1,0)$, no tiene ninguno más porque es continua y creciente

(69) $(a)\ 4e^{-4}-e^{-1}\ (b)\ 0,\ \infty$

(70) (a) $a=0$ (b) $f'(x)=1+\ln x$ si $x>0$ y $f'(x)=e^x(x^2+2x)$ si $x<0$. No es derivable en $x=0$ (c) $2-\frac{5}{e}$

(71) (a) continua en $\mathbb{R}$, 0 (b) $y=e^{-2}(4-x)$ (c) $\frac{(\ln 2)^2}{2}+1-\frac{2}{e}$

(72) $(a)\ f(x)=2x^3-4x^2+3x+2\ (b)\ g(x)=3x^2-2x+5$

(73) Continua en $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}-\{0,1\}$

19. Matrices y determinantes

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

hallar las matrices: (a) $2A + 3B$ (b) AB (c) BA (d) A^2

2. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

calcular: $a)$ AB $b)$ BA $c)$ BB^t $d)$ AB^2

3. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

comprobar que $(BA)^t = A^t B^t$.

4. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$, ¿qué relación deben guardar las constantes a y b para que se verifique que $A^2 = A$?

5. ¿Qué matrices conmutan con la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

6. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3X + Y = A \\ X - 2Y = 2B \end{cases}$$

7. Calcular la matriz $A^{250} + A^{20}$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

   $a)$ Calcular A^2 y A^3.

   $b)$ Hallar una regla general para calcular A^n.

9. Se consideran las matrices:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   $a)$ Determinar x e y para que $MN = NM$.

   $b)$ Calcular M^{1995} y M^{1996}.

10. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

calcular B^3 y A^3. (Sugerencia $A = B + I$).

11. Probar que $A^n = 2^{n-1}A$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

12. Hallar la inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ aplicando la definición.

13. (a) Calcular todas las matrices diagonales de orden 2 que coinciden con su inversa.
    (b) Si A es una de estas matrices, calcular su cuadrado.

14. Si A y B son matrices diagonales de orden 2 demostrar que $AB = BA$.

15. (a) Demostrar que la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ verifica una ecuación del tipo $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, determinando α y β (I denota la matriz identidad).
    (b) Utilizar el apartado anterior para calcular la inversa de A.

16. Calcular los siguientes determinantes de orden 2:

$$a)\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -25 \end{vmatrix} \qquad d)\ \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

17. Calcular los siguientes determinantes de orden 3:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} \qquad d)\ \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

18. Calcular los siguientes determinantes de orden 4:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 6 & 9 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

19. Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b-1 & c & d+1 \\ a+1 & b & c-1 & d \\ a & b+1 & c & d-1 \\ a-1 & b & c+1 & d \end{vmatrix}$$

20. Sean A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2x & 2 & 3+x \\ 2 & x & 5 \\ 10 & 6 & x+5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 4 \\ 5 & 6 & x \end{bmatrix}$$

sabiendo que el determinante de B vale 7, utilizar las propiedades de los determinantes para calcular el valor del determinante de A.

21. Sea A una matriz cuadrada de orden 2 que verifica $2A^2 = A$. Calcular razonadamente los posibles valores del determinante de A.

22. Si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

tiene determinante 1, averiguar el valor del determinante de las siguientes matrices:

$$B = \begin{bmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{bmatrix}$$

23. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

24. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

25. Calcular el rango de:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

26. Calcular la inversa de las siguientes matrices:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ *c*) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

27. Calcular los parámetros a, b y c para los cuales:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ -1 & 1 \\ -3 & c \end{bmatrix} \qquad \text{rango}(B) = 1$$

28. Encontrar, en función de los valores del parámetro a, el rango de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{bmatrix}$$

29. Estudiar según los valores de x, el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{bmatrix}$$

30. Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

31. *a*) Demostrar que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & b-1 \\ 1 & a & -1 \end{bmatrix}$, tiene inversa si y solo si los parámetros a y b son no nulos.

b) Calcula A^{-1} cuando $a = b = 1$.

32. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Discutir en función de los valores que pueda tomar el parámetro real k, si la matriz AB tiene inversa.

b) Discutir, en función de los valores de k, si la matriz BA tiene inversa.

33. *a*) Demostrar que $A^2 - A - 2I = 0$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Calcular A^{-1} utilizando el apartado anterior o de cualquier otra forma

34. Calcular la matriz A sabiendo que se verifica la igualdad:

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

35. Encontrar la matriz A que verifique la ecuación $AX + B = C$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

36. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hallar la matriz X dada por $AXA^{-1} = B$.

37. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determinar si A y B son invertibles y, si lo son, calcula la matriz inversa.

b) Resolver la ecuación matricial $BA - A^2 = AB - X$.

38. Resolver la ecuación matricial $B(2A + I) = AXA + B$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

39. Hallar las matrices simétricas de orden 2 tales que $A^2 = A$.

40. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

41. Calcular A^n siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

42. Se considera la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Probar que $B = I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

43. *a*) Averiguar para qué valores del parámetro t, la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{bmatrix}$ no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $t = 2$.

44. Sin desarrollar el determinante probar la igualdad:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^2$$

45. Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

46. Hallar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

47. Calcular el valor del parámetro k para que el rango de la matriz A sea igual a 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

48. *a*) Averiguar para qué valores del parámetro k admite inversa la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{bmatrix}$$

b) Hallar la inversa de A para $k = 1$.

49. *a*) Hallar los valores del parámetro p para los que la matriz A tiene inversa:

$$A = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{bmatrix}$$

b) Halla la inversa para $p = 2$.

Soluciones:

(1) (a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -9 & 23 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -4 & 23 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -14 & 18 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$

(2) (a) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 10 \\ -8 & -20 & -2 \end{pmatrix}$ (b) no existe (c) $\begin{pmatrix} 40 & -24 & 0 \\ -24 & 20 & -14 \\ 0 & -14 & 35 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -14 & 42 & -42 \\ -10 & 30 & -30 \end{pmatrix}$

(3) $*$

(4) $a = 0$ y $b = 1$ ó $a = 1$ y $b = 0$

(5) $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$

(6) $X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $Y = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 17 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$

(7) $A^{250} + A^{20} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 270 & 2 \end{pmatrix}$

(8) (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(9) (a) $x = 0$, $y = 1$ (b) $M^{1995} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^{1996} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(11) $*$

(12) $\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(14) El producto de matrices diagonales es una matriz diagonal

(15) $*$

(16) (a) -7 (b) -4 (c) 0 (d) 0

(17) (a) -15 (b) -28 (c) 60 (d) 0

(18) (a) 39 (b) -14

(19) 0

(20) 14

(21) 0 y $\frac{1}{4}$

(22) $|B| = 36$, $|C| = -1$

(23) $x = -1$

(24) rango $A = 3$, rango $B = 3$

(25) rango $C = 3$, rango $D = 4$

(26) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

(27) $a = -1$, $b = -2$, $c = 3$

(28) Para $a \neq \pm 1$ el rango es 3. Para $a = -1$ es 2 y para $a = 1$ es igual a 1

(29) Para $x \neq \pm 1$ el rango es 4. Para $x = \pm 1$ es 3

(30) Para $a = -4$ el rango es 2. Para los demás valores es 3

(31) (a) El determinante es igual a $-ab$ (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(32) (a) AB no tiene inversa para ningún valor de k (b) BA tiene inversa para cualquier valor de k

(33) (a) $*$ (b) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(34) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(35) $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(36) $X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}$

(37) (a) No existe la inversa de B. La inversa de A es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ (b) $X = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 3 \\ -18 & 12 & -8 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

(38) $X = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -6 & -18 & 12 \\ 4 & 14 & 10 \end{pmatrix}$

(39) Si $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, debe cumplirse que $x + z = 1$ y $xz - y^2 = 0$. también son soluciones $A = I$ y $A = 0$

(40) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$

(41) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(42) $*$

(43) (a) No tiene inversa para $t = 1$ y $t = 3$ (b) $\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(44) $*$

(45) $81 - 54x^2 + 24x^3 - 3x^4$

(46) Para $\neq \pm 1$ el rango es 3. Para $a = 1$ el rango es 1 y para $a = -1$ el rango es 2

(47) $k = -1$

(48) (a) Todos menos $-\frac{5}{4}$ (b) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(49) (a) Todos menos 0, -1 y 1 (b) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

20. Problemas de selectividad: Matrices y Sistemas.

1. Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

2. Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

   (a) Discutir el sistema según los valores de a.

   (b) Resolver el sistema para $a = -1$.

   (c) Resolver el sistema para $a = 2$.

4. Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real λ:

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

   (a) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.
   (b) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.
   (c) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

5. Para cada valor del parámetro real a se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : \ x + y + az = -2 \ ; \qquad \pi_2 : \ x + ay + z = --1 \ ; \qquad \pi_3 \ ; ax + y + z = 3$$

   Se pide:

   (a) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.
   (b) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

6. Sea A una matriz real cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n. Se pide:

   (a) Calcular A^{-1} en términos de A.
   (b) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n.
   (c) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

7. Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$$

   Se pide:

   (a) Resolverlo para $m = 1$.
   (b) Discutirlo para los distintos valores de m.

8. Comprobar aplicando las propiedades de los determinantes la propiedad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

9. Encontrar un número real $\lambda \neq 0$ y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula) tales que:

$$B \cdot \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

10. Se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 9 \\ mx + 2y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

   Se pide:

(a) Determinar los valores de m para que el sistema tenga solución única.

(b) Resolverlo para $m = 1$.

11. (a) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la igualdad $A + B = AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:

$$(I - B)^{-1} = -B^{-1}A$$

donde I denota la matriz identidad.

(b) Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

hallar la matriz B para la cual se verifica $A + B = AB$.

12. Dado el sistema:

$$\begin{cases} (1-a)x - 2y + 4z = 0 \\ x - (1+a)y + z = 0 \\ -x + ay - z = 0 \end{cases}$$

(a) Estudiar la compatibilidad según los valores del parámetro real a.

(b) Resolver el sistema lineal anterior en el caso en que sea compatible indeterminado.

13. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se pide:

(a) Hallar A^{-1}.

(b) Hallar la matriz X tal que:

$$AXA^t = B$$

donde A^t significa la traspuesta de A.

14. (a) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

escribir una tercera ecuación de la forma $ax + by = c$, distinta de las anteriores, de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

(b) Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ distinta de las dos anteriores, de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante sea compatible indeterminado.

15. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Determinar la matriz inversa de B.

(b) Determinar una matriz X tal que $A = BX$.

16. (a) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A?

    (b) Calcular un número k tal que:

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17. (a) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

    (b) Resolverlo para $\lambda = 2$.

18. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m-1)x + y + z = 3 \\ mx + (m-1)y + 3z = 2m - 1 \\ x + 2y + (m-2)z = 4 \end{cases}$$

    (a) Discutirlo según los valores de m.

    (b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

19. (a) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$$

    (b) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación

$$5x + y + \alpha z = \beta$$

    el sistema resultante sea compatible determinado.

20. Hallar una matriz X tal que

$$A^{-1}XA = B$$

    siendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

21. Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos:

$$\begin{cases} \pi_1 : \ x + z = \lambda \\ \pi_2 : \ 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2 \\ \pi_3 : \ 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda \end{cases}$$

22. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

    (a) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.

    (b) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

(c) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)(A+X)=A^2-X^2$.

23. Dadas las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}0&k&t\\0&0&k\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&k&t\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(a) Hallar A^{10}.

(b) Hallar la matriz inversa de B.

(c) En el caso particular $k=0$, hallar B^{10}.

24. Dado el sistema homogéneo:

$$\begin{cases}x+ky-z=0\\kx-y+z=0\\(k+1)x+y=0\end{cases}$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x=y=z=0$. Resolverlo en esos casos.

25. Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$, encontrar todas las matrices:

$$P=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

tales que $AP=PA$.

26. Dada la matriz:

$$M=\begin{bmatrix}2&1&-a\\2a&1&-1\\2&a&1\end{bmatrix}$$

(a) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

(b) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a=2$.

27. Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix}3&1\\-8&3\end{bmatrix}\qquad \text{y} \qquad I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

(a) Comprobar que $\det A^2=(\det A)^2$ y que $\det(A+I)=\det A+\det I$.

(b) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que $\det M^2=(\det M)^2$?. Justifica la respuesta.

(c) Encontrar todas las matrices cuadradas M de orden 2 que verifican $\det(M+I)=\det M+\det I$.

28. (a) Hallar todas las matrices $A=\begin{bmatrix}a&a\\0&b\end{bmatrix}$ distintas de $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ tales que $A^2=A$.

(b) Para una cualquiera de las matrices calculadas en el apartado anterior calcular:

$$A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}$$

29. (a) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}x+y-3z=0\\2x+3y-z=5\end{cases}$$

(b) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

30. Estudiar el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{bmatrix}$$

según los valores del parámetro m.

31. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$.

32. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB = BA$.

(b) Para $a = b = c = 1$ calcular A^{10}.

33. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$$

se pide:

(a) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

(b) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

34. Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $XA^2 + BA = A^2$. siendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

35. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

se pide:

(a) Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax + y + bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.

(b) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

36. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{cases}$$

se pide:

(a) Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.

(b) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que $y = 2$.

37. Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 9 \end{bmatrix}$$

se pide:

(a) Calcular el determinante de la matriz A_2.

(b) Calcular el determinante de la matriz A_3.

(c) Calcular el determinante de la matriz A_5.

38. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$$

se pide:

(a) Calcular el rango de A según los valores del parámetro A.

(b) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

39. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3u = -4 \\ x + 2y + z + 3u = 4 \\ 2x - 4y + 2z - 6u = -8 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}$$

40. El cajero automático de una cierta entidad bancaria solo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositados, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

41. Dado el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 4\lambda y + 2z = 2\lambda \\ \lambda x + y - \lambda z = \lambda \\ 4\lambda x + 4\lambda y + \lambda z = 9 \end{cases}$$

se pide:

(a) Discutir el sistema según los valores de λ.

(b) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

42. Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

se pide:

(a) Discutir el sistema según los valores del parámetro.
(b) Resolver el sistema cuando sea posible.

43. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

se pide:

(a) Estudiar el rango de la matriz según los valores del parámetro a.
(b) Obtener la inversa de A para $a = -1$.

44. Dada la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

se pide:

(a) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible.
(b) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.
(c) Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M.

45. Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{cases}$$

se pide:

(a) Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.
(b) Resolver el sistema para $\lambda = 5$.

46. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$.

47. Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + kz = 0 \end{cases}$$

se pide:

(a) Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.
(b) Resolverlo para el caso $k = 3$.

48. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se pide:

(*a*) Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2 = aA + bI$.

(*b*) Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.

49. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ay - z = a \\ ax + 2z = -2 \\ x + z = -2 \end{cases}$$

se pide:

(*a*) Discutirlo según los valores del parámetro a.

(*b*) Resolverlo en el caso $a = 0$.

50. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{bmatrix}$$

se pide:

(*a*) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m.

(*b*) En el caso $m = 0$, resolver el sistema

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

51. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

(*a*) Estudiar la compatibilidad del sistema.

(*b*) Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.

(*c*) Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

52. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{bmatrix}$$

se pide:

(*a*) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a.

(*b*) Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1}? Calcular A^{-1} para $a = 1$.

53. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix} \quad ; \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{bmatrix}$$

se pide:

(a) Estudiar el rango de la matriz B en función de a.

(b) Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.

54. Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

55. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

se pide:

(a) Hallar el rango de A en función de los valores de k.

(b) Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = B$.

(c) para $k = 1$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = C$.

56. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

calcular los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

57. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + 2y + (a-1)z &= 1 \\ -x + ay + z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 3 \end{cases}$$

se pide:

(a) Discutir las soluciones según los valores de a.

(b) Hallar la solución del sistema para $a = 1$

58. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + ay + 4z &= 6 \\ x + (a+1)y + z &= 3 \\ (a-1)x - ay - 3z &= -3 \end{cases}$$

se pide:

(a) Discutir el sistema según los valores de a.

(b) Resolverlo para $a = -1$.

59. Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$, vectores columna. Si

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = -1, \qquad \det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) = 3, \qquad \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = -2$$

calcular razonadamente el determinante de la siguientes matrices:

(a) $\det(\vec{a}, 3\vec{d}, \vec{b})$.

(b) $\det(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}, -\vec{d})$.

(c) $\det(\vec{d} + 3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d})$.

60. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x \quad - 2z = 2 \\ ax - y + z = -8 \\ 2x \quad + az = 4 \end{cases}$$

se pide:

(a) Discutir el sistema según los valores de a.

(b) Resolverlo para $a = -5$.

61. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

se pide:

(a) Discutirlo según los valores de a.

(b) Resolverlo en el caso $a = 4$.

(c) Resolverlo en el caso $a = 2$.

62. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

se pide:

(a) Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial $XA = B$ tiene solución única.

(b) Calcular la matriz X para $\lambda = 4$. Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de λ.

63. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix} \quad ; \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \quad ; \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se pide:

(a) Calcular el determinante de A. Calcular el rango de A según los valores de a.

(b) Resolver el sistema homogéneo $AX = 0$ en el caso $a = 1$.

(c) Resolver el sistema homogéneo $AX = 0$ cuando $a = -1$.

64. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + \lambda y + \lambda z = 1 - \lambda \\ x + y + (\lambda - 1)z = -2\lambda \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda - 1 \end{cases}$$

se pide:

(a) Discutirlo según los valores del parámetro λ.

(b) Resolverlo para el caso $\lambda = 1$.

(c) Resolverlo para el caso $\lambda = -1$.

65. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad ; \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) Calcular α, β, γ, para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución de $AX = B$.

(b) Si $\beta = \gamma = 1$ ¿qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema homogéneo $AX = 0$ sea compatible determinado?

(c) Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$, resolver el sistema $AX = B$.

66. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.

(b) Calcular la matriz inversa A^{-1} de A, en el caso $a = 2$.

67. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -mx + my + z = 0 \\ x - my + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

se pide:

(a) Discutirlo según los valores del parámetro m.

(b) Resolverlo en el caso $m = 0$.

(c) Resolverlo en el caso $m = 2$.

68. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

(a)
$$\begin{vmatrix} 2a - 2b & c & 5b \\ 2d - 2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

(b)
$$\begin{vmatrix} a - 1 & b - 2 & 2c - 6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$$

69. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A, es decir que cumplen $AB = BA$.

70. (*a*) Discutir según los valores de m, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 4x+3y+(m-1)z=0 \\ x-2y+mz=1 \\ 5x+my+z=1 \end{cases}$$

(*b*) Resolver el sistema anterior para el caso $m=1$.

71. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

(*a*) Calcular A^{15} y B^{20}.

(*b*) Resolver la ecuación matricial $6X=B-3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

72. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

(*a*) Hallar el rango de A en función de t.

(*b*) Calcular t para que $\det(A-tI)=0$.

73. (*a*) Despeje X en la ecuación matricial $X(CD)^{-1}=A+X(D^{-1}C^{-1}-B)$, siendo A, B, C y D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.

(*b*) Para

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

determine la matriz fin tal que $YB=A$.

74. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x+y+mx=1 \\ x-y+2z=-2 \\ 5x+(m+1)y+2z=4 \end{cases}$$

se pide:

(*a*) Discutirlo según los valores del parámetro m.

(*b*) Resolverlo en el caso $m=0$.

(*c*) Resolverlo en el caso $m=2$.

Soluciones: (obtenidas con Maple)

(1) 62, 36 y 16

(2) Para $a=-4$ el rango es 2. Para los demás valores es 3

(3) (*a*) Para $a\neq 0$ y $a\neq -1$ es compatible determinado. Para $a=0$ es incompatible y para $a=-1$ es compatible indeterminado (*b*) $x=2+\lambda$, $y=\lambda$, $z=1$ (*c*) $x=1$, $y=-1$, $z=-\frac{1}{2}$

(4) (*a*) Es compatible indeterminado para $\lambda=0$ y $\lambda=1$. Para los demás valores es incompatible (*b*) Para $\lambda=0$, $x=-t, y=t, z=t$. Para $\lambda=1$, $x=-2t, y=1+t, z=t$ (*c*) Se cortan en rectas paralelas

(5) (*a*) $a=-2$ (*b*) $x=-\frac{5}{3}+\lambda$, $y=-\frac{1}{3}+\lambda$, $z=\lambda$

(6) (a) $A^{-1} = A$ (b) $A^n = A$ (n impar), $A^n = I$ (n par) (c) $a = -1$

(7) (a) $x = \frac{3}{2}$, $y = 1$, $z = \frac{3}{2}$ (b) Es compatible determinado salvo para $m = 0$ y $m = -1$ que es incompatible

(8) $*$

(9) $x = 3$, matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $b = d = 0$

(10) (a) $m \neq 1$ (b) $x = -1 - \lambda$, $y = 3$, $z = \lambda$

(11) (a) $*$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(12) (a) Es compatible determinado (solución trivial) salvo para $a = -3$ que es compatible indeterminado (b) $x = -\lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$

(13) (a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

(14) (a) Cualquier combinación lineal de las anteriores, por ejemplo $4x+y = 3$ (b) Cualquier combinación de las anteriores que tal que el término independiente sea 1, por ejemplo $3x + 3y - 4z = 1$

(15) (a) $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -11 \\ -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(16) (a) 0 (b) $k = -1$

(17) (a) Salvo para $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$ el sistema es compatible determinado. Para $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$ es compatible indeter (b) $x = 1 + 4t$, $y = -3t$, $z = t$

(18) (a) Salvo para 2, 4 y -1 el sistema es compatible determinado. Para $m = 4$ es compatible indeterminado. Para los otros dos valores es incompatible. (b) $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{9}{5} - \lambda$, $z = \lambda$

(19) (a) $x = 1 + \frac{5}{3}\lambda$, $y = -\frac{7}{3}\lambda$, $z = \lambda$ (b) Cualquier $\alpha \neq -6$, por ejemplo $\alpha = 0$. Para este valor de α, $\beta = \frac{7}{5}$

(20) $X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$

(21) Para $a \neq \frac{8}{3}$ y $a \neq 2$ se cortan en un punto. Para $a = \frac{8}{3}$ se cortan en rectas paralelas. Para $a = 2$ hay dos planos paralelos y otro que los corta.

(22) (a) $\alpha = 2$, $\beta = -1$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(23) (a) $A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(24) Tiene soluciones distintas de la trivial para $k = 2$ y $k = -1$. Para $k = 2$ la solución es $\left(-\frac{1}{5}\lambda, \frac{3}{5}\lambda, \lambda\right)$. Para $k = -1$ la solución es $(\lambda, 0, \lambda)$

(25) Matrices del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

(26) (a) El rango es 3 salvo para $a = 0$ y $a = \pm 1$ que vale 2 (b) Existe la inversa salvo para $a = 0$ y $a = \pm 1$. $M^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 6 & -6 & 6 \\ -6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(27) (a) $*$ (b) Sí, porque el determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de sus determinantes (c) Son las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 0$

(28) (a) $a = 1, b = 0$ o $a = 0, b = 1$ (b) $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

(29) (a) $x = -5 + 8\lambda$, $y = 5 - 5\lambda$, $z = \lambda$ (b) $x = 3$, $y = 0$, $z = 1$

(30) El rango es 3 excepto para $m = 0$ y $m = 2$ que vale 2

(31) Matrices de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ \frac{2}{3}x & y \end{pmatrix}$

(32) (a) $a = b = c$ (b) $\begin{pmatrix} 141267149 & 141208100 & 0 \\ 141208100 & 141267149 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(33) (a) El sistema es compatible determinado salvo para $k = \frac{1}{2}$ que es incompatible y para $k = 2$ que es compatible indeterminado (b) $x = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\lambda$, $y = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\lambda$, $z = \lambda$

(34) $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(35) (a) Cualquier combinación lineal de las dos ecuaciones, por ejemplo $3x+5y-2z=8$ (b) $x=\frac{17}{3}$, $y=-\frac{7}{3}$, $z=\frac{2}{3}$

(36) (a) Para $a\neq\pm1$ el sistema es compatible determinado. Para $a=-1$ el sistema es incompatible y para $a=1$ es compatible indeterminado; $x=\frac{a+2}{a+1}$, $y=\frac{-1}{a+2}$ (b) $a=1$, $a=-\frac{3}{2}$

(37) (a) 10 (b) 100 (c) 10000

(38) (a) El rango es 3 salvo para $a=-1$ y $a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ que vale 2 (b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$

(39) $x=-\lambda$, $y=2-\frac{3}{2}\mu$, $z=\lambda$, $u=\mu$

(40) 100, 75 y 50

(41) (a) El sistema es incompatible para $\lambda=0$, $\lambda=1$ y $\lambda=\frac{1}{5}$. Para los demás valores es compatible determinado (b) $x=-1$, $y=-1$, $z=-1$

(42) (a) El sistema es incompatible salvo para $a=2$ y $a=6$ que es compatible determinado (b) Para $a=2$, $x=0$, $y=-2$. Para $a=6$, $x=-4$, $y=-14$

(43) (a) El rango es 3 excepto para $a=-2$ que vale 2 y para $a=1$ que vale 1 (b) $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

(44) (a) Todos salvo $m=0$ y $m=1$ (b) Los mismos (c) $M^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 4\\ 1 & -1 & 4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

(45) (a) $\lambda=1$, $\lambda=5$ (b) $x=-\frac{1}{3}\lambda$, $y=\frac{1}{3}\lambda$, $z=\lambda$

(46) $X=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$

(47) (a) Para $k=3$ y $k=-\frac{5}{2}$ (b) $x=-\frac{5}{7}\lambda$, $y=\frac{4}{7}\lambda$, $z=\lambda$

(48) (a) $a=-1$, $b=3$ (b) $*$

(49) (a) incompatible para $a=2$, compatible indeterminado para $a=0$, compatible determinado para los demás valores (b) $x=-1$, $y=\lambda$, $z=-1$

(50) (a) El rango es 3 salvo para $m=-1$ que vale 2 y para $m=2$ que vale 1 (b) $x=-\lambda$, $y=-\lambda$, $z=\lambda$, $t=0$

(51) (a) Compatible indeterminado (b) $x=0$ (independiente de las dos anteriores) (c) $x+2y-z=1$ (contradictoria con la primera)

(52) (a) El rango es 3 salvo para $a=0$ y $a=2$ que vale 2 (b) Existe salvo para $a=0$ y $a=2$. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

(53) (a) El rango es 3 salvo para $a=1$ que vale 2 (b) $X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 1 & 9\\ 2 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

(54) $(x-1)^3$

(55) (a) El rango es 3 salvo para $k=0,1,-1$ que vale 2 (b) $x=\frac{2}{3}$, $y=0$, $z=\frac{8}{3}$ (c) $x=\frac{9}{4}-\lambda$, $y=\frac{3}{4}$, $z=\lambda$

(56) (a) -6 (b) 3

(57) (a) Para $a=-2$ y para $a=-\frac{1}{2}$ es incompatible. Para los demás valores es compatible determinado (b) $x=-\frac{1}{3}$, $y=1$, $z=-\frac{4}{3}$

(58) (a) Para $a=-1$ es compatible indeterminado, para $a=-\frac{5}{3}$ es incompatible. Para los demás valores es compatible determinado (b) $x=3-\lambda$, $y=3+\lambda$, $z=\lambda$

(59) (a) 3 (b) -5 (c) 4

(60) (a) Para $a\neq-4$ es compatible determinado, para $a=-4$ es compatible indeterminado (b) $x=2$, $y=-2$, $z=0$

(61) (a) Para $a\neq2$ y $a\neq-1$ el sistema es compatible determinado. Para $a=2$ es compatible indeterminado y para $a=-1$ es incompatible (b) $x=2$, $y=1$, $z=-3$ (c) $x=7+\lambda$, $y=-2-\lambda$, $z=\lambda$

(62) (a) $\lambda\neq3$ (b) $X=\begin{pmatrix}2 & -2 & 5\\ -4 & 5 & -11\\ -5 & 7 & -14\end{pmatrix}$, $-\lambda^2+6\lambda-9$

(63) (a) Para $a\neq\pm1$ el rango es 4. Para $a=-1$ es 3 y para $a=1$ es 1 (b) $(-\lambda-\mu-\nu,\lambda,\mu,\nu)$ (c) $(0,\lambda,0,\lambda)$

(64) (a) Para $\lambda\neq-1$ y $\lambda\neq2$ es compatible determinado, para $\lambda=-1$ y para $\lambda=2$ es compatible indeterminado (b) $x=0$, $y=-2$, $z=2$ (c) $x=\frac{4}{3}+\lambda$, $y=\frac{2}{3}+\lambda$, $z=\lambda$

(65) (a) $\alpha=1$, $\beta=\frac{9}{2}$, $c=-3$ (b) $\alpha\neq0$ y $\alpha\neq1$ (c) $x=0$, $y=1$, $z=0$

(66) (a) Todos excepto $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ (b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & -3 & 6\\ 3 & -1 & 4\\ 6 & -2 & 5\end{pmatrix}$

(67) (a) Para $m \neq 1$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado, para $m = 2$ es compatible indeterminado y para $m = 1$ es incompatible (b) $x = 4$, $y = 4$, $z = 0$ (c) $x = -4 + 4\lambda$, $y = -4 + \frac{7}{2}\lambda$, $z = \lambda$

(68) (a) -30 (b) -12

(69) Matrices de la forma $\begin{pmatrix} 3y+t & y \\ y & t \end{pmatrix}$

(70) (a) Para $\neq 1$ y $m \neq 7$ el sistema es compatible determinado, para $m = 1$ es compatible indeterminado y para $m = 7$ es incompatible (b) $x = \frac{3}{11} - \frac{3}{11}\lambda$, $y = -\frac{4}{11} + \frac{4}{11}\lambda$, $z = \lambda$

(71) (a) $a^{15} = A$, $B^{20} = 3^{20}I$ (b) $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(72) (a) El rango es 3 salvo para $t = 2$ y $t = 7$ que vale 2 (b) $t = 7$

(73) (a) $X = AB^{-1}$ (b) $Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

(74) (a) $m \neq -2, 2$ compatible determinado, $m = 2$ compatible indeterminado, $m = -2$ incompatible (b) $x = -2$, $y = 7$, $z = \frac{7}{2}$ (c) $x = -\frac{1}{4} - \lambda$, $y = \frac{7}{4} + \lambda$, $z = \lambda$

21. Geometría

1. Para cada uno de los siguientes casos, calcular las coordenadas del vector de origen el punto A y de extremo el punto B:

   a) $A(3, 0, -2)$, $B(1, -3, 5)$.
   b) $A\left(\frac{1}{2}, -2, 1\right)$, $B\left(-1, \frac{3}{5}, 2\right)$.

2. Del vector $\overrightarrow{PQ} = (-2, 0, 3)$ se sabe que el origen tiene coordenadas $P(1, -2, 3)$. Calcular las coordenadas del extremo Q.

3. Del vector $\overrightarrow{PQ} = (4, -1, 2)$ se sabe que el extremo tiene coordenadas $Q(2, -3, -4)$. Calcular las coordenadas de P.

4. Calcular las coordenadas de los puntos A y B que dividen el segmento de extremos $P(2, 2, -1)$ y $Q(5, -4, -7)$ en tres segmentos iguales.

5. Calcular las coordenadas de tres puntos A, B y C que dividen el segmento de extremos

$$P\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right), \qquad Q\left(-3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$$

   en cuatro segmentos de igual longitud.

6. Escribir las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano:

   a) Que pasa por el punto $A(-1, 3, 1)$ y lleva la dirección de los vectores $\overrightarrow{u} = (1, -1, 3)$ y $\overrightarrow{v} = (-1, -1, 4)$.
   b) Que pasa por los puntos $A(1, -1, 2)$, $B(2, 0, -1)$ y $C(-3, 1, 0)$.
   c) Que contiene el triángulo de vértices $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

7. Calcular dos puntos de cada uno de los siguientes planos:

$$\pi\colon \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 + 2\lambda - \mu \\ z = 3 - 3\lambda - 2\mu \end{cases} \quad ; \quad \rho\colon 2x + y - 3z = 1$$

8. Calcular un punto, dos vectores directores linealmente independientes y un vector normal de cada uno de los siguientes planos.

$$\pi\colon \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3\lambda - 2\mu \\ z = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases} \quad ; \quad \rho\colon 3x - y - 2z = 0$$

9. Escribir unas ecuaciones paramétricas para el plano de ecuación implícita $\pi\colon x - 2y + 3z = 1$.

10. Escribir las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por $A(1, 3, -2)$ y tiene como vector normal $\overrightarrow{n} = (1, -2, 0)$.

11. Escribir la ecuación implícita del plano de ecuaciones paramétricas:

$$\pi\colon \begin{cases} x = -2 - 2\lambda + 3\mu \\ y = 1 - 2\lambda - 2\mu \\ z = 1 + 2\lambda - 2\mu \end{cases}$$

12. Comprueba se los puntos $P(-1, 3, 5)$ y $Q(2, -1, -1)$ pertenecen o no a los siguientes planos:

$$\pi\colon \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = 2 - 3\lambda - \mu \\ z = 1 + 2\lambda + 3\mu \end{cases} \qquad \rho\colon x - 2y + 3z = 1$$

13. Escribir las ecuaciones paramétricas, la ecuación continua y las ecuaciones implícitas de la recta:

    a) Que pasa por los puntos $A(1,-2,0)$, y $B(2,-3,-1)$.

    b) Que pasa por el punto $A(-2,-2,0)$ y tiene la dirección del vector $\overrightarrow{u}=(-1,-1,4)$.

14. Dados los puntos $A(1,-1,2)$ y $B(-1,-2,0)$, calcular las ecuaciones implícitas para la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene la dirección de $\overrightarrow{AB}$.

15. Calcular dos puntos de cada una de las siguientes rectas:

$$a)\ r\colon \begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \qquad b)\ s\colon \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-2} \qquad c)\ t\colon \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$$

16. Calcular un punto y un vector de dirección de cada una de las siguientes rectas:

$$a)\ r\colon \begin{cases} x=-3\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=1-4\lambda \end{cases} \qquad b)\ s\colon \frac{x}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{3} \qquad c)\ t\colon \begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x-z=1 \end{cases}$$

17. Calcular la ecuación en forma continua y las ecuaciones implícitas de la recta de ecuaciones paramétricas:

$$r\colon \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3-3\lambda \end{cases}$$

18. Calcular las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta de ecuaciones implícitas:

$$r\colon \begin{cases} 3x-y-z-1=0 \\ x+y-z-3=0 \end{cases}$$

19. Escribir las ecuaciones de los ejes y los planos coordenados.

20. Escribir las ecuaciones en forma continua de las rectas que se dan a continuación:

$$r\colon \frac{x}{2}=\frac{2y-2}{3}=\frac{z-1}{-3}; \qquad s\colon \frac{-x+1}{3}=\frac{2y-4}{2}=\frac{3z-2}{-4}$$

21. Se considera la recta que pasa por el punto $A(-1,2,-3)$ y tiene como dirección la del vector $\overrightarrow{u}=(2,-1,2)$:

    a) Escribir las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones continuas de la recta.

    b) Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta y cuáles no:

$$P(5,-1,3); \quad Q(-3,3,-4); \quad R\left(0,\frac{3}{2},-2\right)$$

22. Escribir la ecuación del haz de planos paralelos, tal que uno de ellos pase por los puntos $A(-2,1,1)$, $B(3,0,-3)$ y $C(-2,1,4)$.

23. Escribir la ecuación del haz de planos secantes en las rectas:

$$r\colon \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}; \qquad s\colon \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{3}; \qquad t\colon \begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 2x-2y+z=1 \end{cases}$$

24. Calcular el valor de a para que los puntos $A(2,0,-1)$, $B(1,2,-2)$ y $C(1,a,a)$ pertenezcan a una misma recta.

25. Calcular todos los valores de m que hacen que los puntos del espacio $A(0,2,2)$, $B(1,1,m^2-1)$ y $C(2,0,2m)$ pertenezcan a una misma recta. Escribir las ecuaciones implícitas de esta recta.

26. Calcular el valor de m para que los puntos $A(0,1,2)$, $B(1,0,3)$, $C(1,m,1)$ y $D(m,-1,2m)$ pertenezcan a un mismo plano.

27. Dado el plano $\pi\colon 6x+4y-3z-d=0$:

    a) Calcular el valor de d para que el plano pase por el punto $P(2,0,0)$.

    b) Calcular las coordenadas de A, B y C, puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano π.

    c) Calcular las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices A, B y C.

28. Calcular el valor de a para que los puntos $A(3,0,2)$, $B(0,a,a)$, $C(1,2,2)$ y $D(-1,-1,0)$ sean coplanarios. Para este valor hallado, calcular la ecuación del plano que contiene a los cuatro puntos.

29. Escribir la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(3,1,-1)$ y $B(2,-1,4)$ y es paralelo a la recta de ecuaciones:

$$r\colon \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{4}$$

30. Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-2,-3,2)$ y es paralelo a las rectas:

$$r\colon \frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-4}; \qquad s\colon \begin{cases} x=2+3t \\ y=t \\ z=-1-t \end{cases}$$

31. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,-3,0)$ y es paralela a la recta determinada por la intersección de los planos:

$$\pi\colon 2x-3y+z=0; \qquad \pi'\colon \begin{cases} x=1+t+s \\ y=t-s \\ z=2+2t+s \end{cases}$$

32. Determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,-1,1)$ y $B(0,3,-2)$ y es paralelo al eje Z.

33. Determinar la ecuación del plano paralelo a los ejes de coordenadas X e Y, y que pasa por el punto de intersección de la recta r y el plano π, siendo:

$$r\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3t \end{cases}; \qquad \pi\colon x-2y-2z+3=0$$

34. Dadas las rectas:

$$r\colon \begin{cases} x-kz=2 \\ y-z=-3 \end{cases}; \qquad s\colon \frac{x-1}{2}=y+1=z$$

    ¿Existe algún valor de k que haga que estas rectas sean secantes?

35. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1,2,3)$ y que toca a los ejes de coordenadas X y Z.

36. Se considera la recta r que pasa por el punto $A(3,0,0)$ y que tiene como dirección la del vector $\overrightarrow{u}=(1,1,-1)$. Se consideran también los planos paralelos de ecuaciones $\pi\colon 2x+y=0$ y $\pi'\colon 2x+y+3=0$. La recta r corta a los planos en los puntos P y Q. Calcular las coordenadas del punto medio de PQ.

37. Estudiar la posición relativa del plano $\pi\colon x - y + 2z = 1$ y las rectas siguientes:

$a)\ r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases} \quad b)\ s\colon \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{1} \end{cases} \quad c)\ t\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4t \\ z = t \end{cases}$

38. Estudiar la posición relativa de los planos π y π' en los siguientes casos:

   a) $\pi\colon 2x - y + z = 0, \quad \pi'\colon -2x + y + z = 0$
   b) $\pi\colon 2x - y + z = 0, \quad \pi'\colon -4x + 2y - 2z = 3$
   c) $\pi\colon 2x - y + z = 0, \quad \pi'\colon -4x + 2y - 2z = 0$

39. Estudiar la posición relativa de los planos π, π' y π'' en los siguientes casos:

   a) $\pi\colon 2x - y + z = 0, \quad \pi'\colon 3x + y + 4z = 0, \quad \pi''\colon x + y - z = 3$
   b) $\pi\colon 2x - y + z = 0, \quad \pi'\colon x - 2y + 3z = 1, \quad \pi''\colon 3x - 3y + 4z = 1$
   c) $\pi\colon 2x + y + z = 0, \quad \pi'\colon x + y - z = 0, \quad \pi''\colon x + 2z = 1$

40. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r\colon \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}; \qquad s\colon \frac{x+2}{1} = \frac{y+8}{2} = z + 5$$

41. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r\colon \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}; \qquad s\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = -2t \\ z = -3t \end{cases}$$

42. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r\colon x = -y = z \qquad s\colon \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

43. Dadas las rectas:

$$r\colon \begin{cases} x + y - z = -6 \\ 2x - z = -2 \end{cases} \quad ; \qquad s\colon \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+1}{2}$$

Estudiar sus posiciones relativas según los valores de m.

44. Estudiar la posición relativa de las rectas r y s y obtén, si es posible, el ángulo que forman siendo:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 2\lambda + 2 \end{cases} \quad ; \qquad s\colon \begin{cases} x = 1 \\ z = y + 2 \end{cases}$$

45. Se considera las rectas:

$$r\colon \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad ; \qquad s\colon \frac{x+1}{2} = y + 1 = \frac{z+d}{-2}$$

Hallar el valor de d para que las rectas sean secantes. Para ese valor de d determina el ángulo que forman r y s.

46. Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r_1\colon \begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases} \quad ; \qquad r_2\colon \begin{cases} 2x+y-z-1=0 \\ x-y-2z+1=0 \end{cases}$$

47. Estudiar la posición relativa de las rectas r y s y calcular el ángulo que forman:

$$r\colon \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}; \qquad s\colon \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=4+3\lambda \end{cases}$$

48. Hallar el ángulo que forman los planos π_1 y π_2, donde π_1 es el plano determinado por los puntos $(0,0,8)$, $(-5,1,2)$ y $(0,-2,0)$ y π_2 es el plano perpendicular a la recta

$$nx-1=y-2=\frac{z}{6}$$

que pasa por el punto $(0,0,1)$.

49. Hallar el ángulo que forman el plano determinado por las rectas:

$$r\colon x=\frac{y}{3}=\frac{3-z}{2}; \qquad s\colon \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda-1 \\ z=3-\lambda \end{cases}$$

con el plano de ecuación $2x-y+z=1$.

50. Hallar el ángulo que forman la recta r de ecuación

$$r\colon \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}$$

con el plano que contiene la recta

$$s\colon -x=y-2=1-z$$

y el punto $A(3,1,6)$.

51. Calcular la proyección ortogonal del punto $P(0,0,0)$ sobre el plano $\pi\colon x+y+z=1$.

52. Dados la recta:

$$r\colon \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$$

y el plano $\pi\colon x+y+z-4=0$, halla la ecuación de la recta s, proyección ortogonal de r sobre π.

53. Hallar la ecuación continua de la proyección ortogonal de la recta $(x,y,z)=(2,1,1)+t(-1,0,2)$ sobre el plano $2x+y-z=0$.

54. Hallar el punto del plano $\pi\colon x+y+z=1$ que equidista de los puntos $A(1,-1,2)$, $B(3,1,2)$ y $C(1,1,0)$.

55. Determinar la distancia que hay desde el origen de coordenadas al plano que contiene las rectas:

$$r\colon \frac{x-1}{2}=2-y=\frac{2z-6}{4}; \qquad s\colon \begin{cases} x=3-2y \\ z=2y-2 \end{cases}$$

56. Calcular los puntos de la recta

$$r\colon \begin{cases} x - z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

que equidistan de los planos:

$$\alpha\colon 2x + y - 2z = 0; \qquad \beta\colon x - 2y + 2z - 1 = 0$$

57. Calcular la distancia del punto $P(1,0,3)$ a la recta:

$$r\colon \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

58. En cada caso, estudia si las rectas dadas se cruzan y, en caso afirmativo, calcular su distancia:

$a)$ $r_1\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$; $r_2\colon \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$

$b)$ $r_1\colon \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases}$; $r_2\colon \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$

59. Determinar la perpendicular común a las rectas:

$$r\colon \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

60. Demostrar que las rectas:

$$r\colon \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x - ay = 0 \\ z = 5 \end{cases}$$

se cruzan, cualquiera que sea el valor del parámetro a. Calcular la recta perpendicular común a r y s.

61. Determinar el plano π que pasa por los puntos de coordenadas $A(0,0,3)$, $B(2,0,-3)$ y $C(2,-2,0)$. Calcular el área del triángulo que forman los puntos en que el plano π corta a los tres ejes de coordenadas.

62. Sean $A(-3,4,0)$, $B(3,6,3)$ y $C(-1,2,1)$ los tres vértices de un triángulo. Se pide:

    $a)$ Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo.

    $b)$ Calcular el coseno de cada uno de los tres ángulos del triángulo.

    $c)$ Calcular el área del triángulo.

63. Los planos $\pi\colon x + y + z = 4$, $\pi'\colon x - z = 0$ y $\pi''\colon x + y = 3$, tienen un único punto en común. Se pide:

    $a)$ Determinarlo.

    $b)$ Hallar las ecuaciones de las rectas en que cada uno de los planos corta al plano $x = 0$.

    $c)$ Volumen del tetraedro limitado por cada uno de esos tres planos y el plano $x = 0$.

64. Considera un cuadrado cuyo centro es el punto $P(1,1,-1)$ y tiene uno de sus lados en la recta:

$$r\colon \begin{cases} x - 2 = y - 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

a) Calcular la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado.

b) Calcular la longitud del lado del cuadrado.

65. Hallar el punto P' simétrico de $P(3,4,0)$ respecto al plano $\pi\colon x+y+z=0$.

66. Hallar las coordenadas del punto simétrico de $P(-2,-2,3)$ respecto del plano de ecuación general $2x+y+z-3=0$.

67. Se consideran las rectas de ecuaciones:

$$r\colon \begin{cases} x-1=0 \\ 2y+z-1=0 \end{cases} \quad ; \quad s\colon \begin{cases} x-z-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$$

y el plano π que pasa por los puntos $A(1,0,2)$, $B(2,1,2)$ y $C(1,0,1)$.

a) Calcular la ecuación general o implícita de π.

b) Una de las dos rectas corta a π. Determinarla y halla el punto de corte con π.

c) Calcular el seno del ángulo que forman dicha recta y el plano π.

d) Comprueba que la otra recta es paralela a π y calcular la ecuación general del plano que la contiene y es paralelo a π.

68. *a*) Demostrar que los planos $\pi\colon 2x+3y-4z=6$ y $\pi'\colon -3x+4y-2z=-2$ no son paralelos y calcular sus planos bisectores.

b) Calcular el ángulo que forman entre sí ambos planos bisectores.

69. Sean los puntos $P_1(1,2,1)$, $P_2(2,3,1)$, $P_3(-1,4,3)$ y $P_4(0,5,3)$.

a) Demostrar que los cuatro puntos están en el mismo plano.

b) Verifica que el polígono que tiene como vértices esos cuatro puntos es un rectángulo.

c) Calcular el área de ese rectángulo.

70. Considérese la recta r de vector director $(1,1,0)$ que pasa por el origen. escriba las ecuaciones paramétricas de todas las rectas que pasan por el origen, que están contenidas en el plano $x-y=0$ y que forman, además, un ángulo de 60^{o} con r.

71. Calcular la distancia entre las rectas r y s siendo:

$$r\colon \begin{cases} \dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{2} \\ x=0 \end{cases} \qquad s\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$$

Obtén la ecuación de la perpendicular común a ambas.

72. Sea el plano π de ecuación $x+2y+3z=5$.

a) Encontrar la ecuación de un plano paralelo a π y cuya distancia al origen sea 3. ¿Cuántas soluciones hay?

b) Calcular el punto P del plano π que está más próximo del origen.

c) Sea Q el punto $(1,1,1)$. Se sabe que los segmentos OP y OQ son dos lados de un paralelogramo. Hallar los vértices y el área de dicho paralelogramo.

Soluciones:

(1) (*a*) $(-2,-3,7)$ (*b*) $\left(-\frac{3}{2},\frac{13}{5},1\right)$

(2) $(-1,-2,6)$

(3) $(-2,-2,-6)$

(4) $A(3,0,-3)$, $B(4,-2,-5)$

(5) $A\left(0,\frac{3}{4},-\frac{1}{3}\right)$, $B(-1,1,0)$, $C\left(-2,\frac{5}{4},\frac{1}{3}\right)$

(6) (a) $x+7y+2z-22=0$ (b) $2x+7y+3z-1=0$ (c) $x+y+z-1=0$

(7) (a) $(1,2,3)$, $(0,4,0)$ (b) $(0,1,0)$, $(0,4,1)$

(8) (a) $P(-1,0,1)$, $\vec{u}(-1,3,-2)$, $\vec{v}(0,-2,-1)$, $\vec{n}(7,1,-2)$ (b) $O(0,0,0)$, $\vec{u}(1,3,0)$, $\vec{v}(0,-2,1)$, $\vec{n}(3,-1,-2)$

(9) $x=1+2\lambda-3\mu,\ y=\lambda,\ z=\mu$

(10) $x=-5+2\lambda,\ y=\lambda,\ z=\mu$

(11) $4x+y+5z+2=0$

(12) (a) $P\in\pi,\ Q\notin\pi$ (b) $P\notin\rho,\ Q\in\rho$

(13) (a) $x=1+t,\ y=-2-t,\ z=-t;\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-1};\ x+y+1=0,\ x+z-1=0$ (b) $x=-2-t,\ y=-2-t,\ z=4t;\ \frac{x+2}{-1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{4};\ x-y=0,\ 4x+z+8=0$

(14) $x-2y=0,\ x-z=0$

(15) (a) $A(-2,-1,-1)$, $B(0,0,1)$ (b) $A(1,-2,0)$ $B(0,0,-2)$ (c) $A(0,0,0)$ (d) $1,1,1$

(16) (a) $P(0,-2,1)$ $\vec{v}(-3,3,-4)$ (b) $P(0,2,-2)$ $\vec{v}(-2,1,3)$ (c) $P(0,3,-1)$ $\vec{v}(1,-2,2)$

(17) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-3}$, $2x+y-4=0,\ 3x-z=0$

(18) $x=t,\ y=1+t,\ z=-2+2t,\ \frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{2}$

(19) $y=0,\ z=0$, $x=0,\ z=0$, $x=0,\ y=0$, $x=0$, $y=0$,$z=0$

(20) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{\frac{3}{2}}=\frac{z-1}{-3},\ \frac{x-1}{-3}\,\frac{y-2}{1}=\frac{z-\frac{2}{3}}{-\frac{4}{3}}$

(21) (a) $x=-1+2t,\ y=2-t,\ z=-3+2t$ (b) P sí, Q no, R sí

(22) $x+5y+D=0$

(23) (a) $\lambda(x+y+1)+\mu(2x-z-1)=0$ (b) $\lambda(x+2y+3)+\mu(3x-2z-3)=0$ (c) $\lambda(2x+y-3z-3)+\mu(2x-2y+z-1)=0$

(24) No tiene solución.

(25) (a) $m=2$, $m=-1$ (b) $x+y=2$, $2x+z=2$

(26) $m=2$, $m=-2$

(27) (a) $d=12$ (b) $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,-4)$ (c) $G\left(\frac{2}{3},1,-\frac{4}{3}\right)$

(28) (a) $a=\frac{4}{3}$ (b) $2x+2y-5z+3=0$

(29) $8x-4y+z-19=0$

(30) $x-13y-10z-17=0$

(31) $x=2+5\lambda, y=-3+7\lambda, z=11\lambda$

(32) $4x+y-3=0$

(33) $z=3$

(34) No

(35) $x=\lambda, y=2\lambda, z=3\lambda$

(36) $\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$

(37) (a) Se cortan (b) Recta paralela al plano (c) Recta contenida en el plano

(38) (a) Se cortan (b) Paralelos (c) Coincidentes

(39) (a) Se cortan en un punto (b) Se cortan en una recta (c) Forman un prisma

(40) Secantes

(41) Paralelas

(42) Coincidentes

(43) $m=-14$ se cortan, $m\neq-14$ se cruzan

(44) Secantes, 60^{o}

(45) $d=1$, 45^{o}

(46) Se cruzan

(47) Secantes, $6^{\text{o}}58'57''$

(48) 90^{o}

(49) 60^{o}

(50) 60^{o}

(51) $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

(52) $y-z+1=0,\ x+y+z-4=0$

(53) $x=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{4}$

(54) $P(4,-2,-1)$

(55) Las rectas no son coplanarias.

(56) $P\left(\frac{11}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$, $Q\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

(57) $\frac{\sqrt{66}}{6}$

(58) (a) Se cruzan, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (b) Se cruzan, $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(59) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-\frac{8}{5}}{0}$

(60) La p.c. es el eje OZ, es decir $x = 0,\ y = 0$

(61) $6x + 3y + 2z - 6 = 0,\ \frac{7}{2}$

(62) $(a)\ x - 2z + 3 = 0\ (b)\ \frac{11}{21}, \frac{19}{21}, -\frac{1}{9}\ (c)\ 4\sqrt{5}$

(63) $(a)\ P(1,2,1)\ (b)\ r : x = 0, y = \lambda, z = 4 - \lambda;\ s : x = 0, y = \lambda, z = 0;\ t : x = 0, y = 3, z = \lambda\ (c)\ \frac{1}{6}$

(64) $(a)\ 2x - 2y - z - 1 = 0\ (b)\ 3\sqrt{2}$

(65) $Q\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{14}{3}\right)$

(66) $P'(2,0,5)$

(67) $(a)\ x - y - 1 = 0\ (b)\ x = 1, y = -\lambda, z = 1 + 2\lambda,\ (1,0,1)\ (c)\ 18^{o}26'6''\ (d)\ x - y = 0$

(68) $(a)\ 5x - y - 2z - 8 = 0,\ -x + 7y - 6z - 4 = 0\ (b)\ 90^{o}$

(69) $(a)\ x - y + 2z - 1 = 0\ (b)\ \ (c)\ 2\sqrt{6}$

(70) $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{\sqrt{6}},\ \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-\sqrt{6}}$

(71) $(a)\ \frac{2}{\sqrt{30}}\ (b)\ x - 2y + z + 5 = 0,\ 5x - 16y - 7z - 21 = 0$

(72) $(a)\ x + 2y + 3z + k = 0,\ k = \pm 3\sqrt{14}\ (b)\ P\left(\frac{5}{14}, \frac{10}{14}, \frac{15}{14}\right)\ (c)\ \frac{5\sqrt{6}}{14}$

22. Paralelismo y perpendicularidad

1. Calcular la ecuación de la recta perpendicular al plano $2x-3y+5z-2=0$ por el punto $P(1,2,-3)$.

2. Calcular la ecuación del plano perpendicular a la recta
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z}{-1}$$
por el punto $P(3,-1,5)$.

3. Calcular la ecuación del plano perpendicular a la recta:
$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 2 = 0 \\ x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$
por el punto $P(1,-1,2)$.

4. Calcular la ecuación del plano que contiene al punto $P(1,1,1)$ y a la recta:
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{7} = \frac{z+4}{2}$$

5. Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta:
$$\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$
y pasa por el punto $P(1,3,-1)$.

6. Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,1,1)$ y es paralelo a $2x-3y+6z-7=0$.

7. Calcular la ecuación de la recta paralela a
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$$
por el punto $P(1,-1,2)$.

8. Calcular la ecuación de la recta paralela a:
$$\begin{cases} x+y-z+3=0 \\ 2x+3y-z+7=0 \end{cases}$$
por el punto $P(0,1,2)$.

9. Calcular la ecuación de la recta paralela a los planos:
$$\pi:\ 2x+y-z-3=0\ ; \qquad \pi':\ x+y+2z-1=0$$
que pasa por el punto $P(-1,2,0)$.

10. Calcular la ecuación del plano paralelo a las rectas:
$$r:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{-1}\ ; \qquad r':\ \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=4+2t \end{cases}$$
que pasa por el punto $P(0,1,0)$.

11. Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta:
$$r:\ \begin{cases} x=1-t \\ y=3t \\ z=3+2t \end{cases}$$
y es paralelo a:
$$r':\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+5}{3}$$

12. Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $P(3,2,1)$ y es perpendicular a los planos:
$$\pi:\ x-y+2z-3=0\ ; \qquad \pi':\ 2x-3y+z-1=0$$

13. Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta:
$$\frac{x+3}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{2}$$
y es perpendicular a $x+y-2z=0$.

14. Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $P(3,1,2)$, es paralelo a la recta:
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{-1}$$
y perpendicular al plano $3x-y+z-1=0$.

Soluciones:

(1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{5}$
(2) $3x+2y-z-2=0$
(3) $x+9y+5z-2=0$
(4) $7x-3y-4=0$
(5) $7x+y-z-11=0$
(6) $2x-3y+6z-5=0$
(7) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$
(8) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}$
(9) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z}{1}$
(10) $x-y-z+1=0$
(11) $11x+7y-5z+4=0$
(12) $5x+3y-z-20=0$
(13) $2x+z+5=0$
(14) $-2x-5y+z+9=0$

23. Problemas de selectividad: Geometría.

1. Hallar una ecuación cartesiana de plano que contiene a la recta r :

   $$x = 1 + t \ ; \qquad y = 1 + 2t \ ; \qquad z = t$$

   y es perpendicular al plano π:

   $$2x + y - z = 2$$

2. Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$ y $C(1, 3, 3)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

   a) Calcular las coordenadas del cuarto vértice y el área del paralelogramo.
   b) Clasificar el paralelogramo por sus lados y sus ángulos.

3. Se consideran las rectas:

   $$r \ : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} \ ; \qquad s \ : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

   a) Calcular la distancia entre r y s.
   b) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.
   c) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y pasa por $P(1, 0, 0)$.

4. Para cada valor del parámetro real a se consideran los planos siguientes:

   $$\pi_1 \ : x + y + az = -2 \ ; \quad \pi_2 \ : x + ay + z = -1 \ ; \quad \pi_3 \ : ax + y + z = 3$$

   Se pide:

   a) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.
   b) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

5. Dadas las rectas en el espacio:

   $$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \ ; \qquad s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

   a) Hallar la distancia entre las dos rectas.
   b) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s

6. Dados el plano:

   $$\pi \equiv x + 3y - z = 1$$

   y la recta

   $$r \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

   se pide:

   a) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.
   b) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π'.

7. Dados los puntos $A(1, 0, 1)$ y $B(0, 2, 0)$, y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.

8. Dadas las rectas

   $$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1} \ ; \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$$

a) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

9. Dado el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$, y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$, se pide:

   a) Calcular el punto Q en que se cortan el plano π y la recta r.

   b) Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

10. Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \quad ; \quad \pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0 \; ; \quad \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

   Se pide:

   a) Determinar la posición relativa de la recta respecto a cada uno de los planos.

   b) Determinar la posición relativa de los planos.

   c) Calcular la distancia de r a π_2.

11. a) Determinar la posición relativa de los siguientes planos según los valores del parámetro k:

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv 2x + 3y + kz = 3 \\ \pi_2 &\equiv x + ky - z = -1 \\ \pi_3 &\equiv 3x + y - 3z = -k \end{aligned}$$

   b) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

12. Sea el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$:

   a) Hallar el punto simétrico de $(0, 0, 0)$ respecto de π.

   b) Hallar el plano perpendicular a π que contiene al eje OZ.

   c) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes coordenados.

13. a) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.

   b) Describir dicho conjunto.

14. El plano $\pi \equiv 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

   a) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.

   b) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene dicha altura.

   c) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π.

15. Dado el punto $P(1, 3, -1)$, se pide:

   a) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.

   b) Calcular los puntos de la recta:

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$$

   cuya distancia a P sea igual a 3.

16. Dadas las rectas:

$$r\ :\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}\ :\qquad s\ :\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$$

   a) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y el perpendicular a ambas.
   b) Calcular la mínima distancia entre r y s.

17. Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos:

$$\pi_1 : x+z=\lambda$$
$$\pi_2 : 4x+(\lambda-2)y+(\lambda+2)z=\lambda+2$$
$$\pi_3 : 2(\lambda+1)x-(\lambda+6)y=-\lambda$$

18. Se consideran las rectas:

$$r\ :\begin{cases} x-y=3\\ x+y-z=0\end{cases}\qquad s\ :\begin{cases} x-z=4\\ 2x-y=7\end{cases}$$

   a) Hallar la recta t, perpendicular a r y a s, que pasa por el origen.
   b) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado anterior.

19. Se considera la familia de planos:

$$mx+(m-2)y+3(m+1)z+(m+1)=0$$

siendo m un parámetro real:

   a) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.
   b) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1,1,0)$.
   c) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$r\ :\begin{cases} x-2z+1=0\\ -y+z+1=0\end{cases}$$

20. Sean las rectas:

$$r:\ \frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-4}\qquad s:\ \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{1}$$

   a) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.
   b) Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s.

21. Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\vec{v}=(4,3,1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi : z=0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

22. Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r:\ \frac{x+4}{-3}=\frac{y-7}{4}=\frac{z}{1}\qquad s:\begin{cases} x+2y-5z-5=0\\ 2x+y+2z-4=0\end{cases}$$

23. Se consideran los puntos $A(0,1,0)$ y $B(1,0,1)$. se pide:

   a) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ que equidistan de A y B.
   b) Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a A es igual que la distancia de A a B.

c) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x, y, z)$ del plano $x + y + z = 3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

24. Un plano corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, \lambda, 0)$, $C(0, 0, 4)$. se pide:

    a) Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro $OABC$ (donde O es el origen) sea 2.

    b) Para el valor de λ obtenido en el apartado anterior, calcular la longitud de la altura del tetraedro $OABC$ correspondiente al vértice O.

25. Dados el punto $A(1, -2, -3)$, la recta $r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi :\ x - 2y - 3z + 1 = 0$, se pide:

    a) Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

    b) Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.

26. Sean los puntos $A(\lambda, 2, \lambda)$, $B(2, -\lambda, 0)$, $C(\lambda, 0, \lambda + 2)$.

    a) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C estén alineados?

    b) Comprobar que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

    c) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor de $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.

27. Hallar los puntos de la recta $r :\ \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{-1}$ cuya distancia al plano $\pi :\ 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1.

28. Se consideran las rectas:

$$r : \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

    Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

29. Sean las rectas:

$$r :\ \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \qquad s : \begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ x - 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

    a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

    b) Calcular la distancia entre el plano π y la recta s.

30. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

    se pide:

    a) Discutir la posición relativa de las dos rectas según los valores del parámetro a.

    b) Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las rectas r y s.

31. Dados los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(1, 2, 0)$, se pide:

    a) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.

    b) Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

    c) Hallar la distancia del punto D a plano π.

32. Dados los puntos $P(1,1,3)$, $Q(0,1,0)$, se pide:

    a) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.

    b) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican

    $$\text{dist}(P,S) = 2 \cdot \text{dist}(Q,S)$$

    donde "dist" significa distancia.

33. Dadas las rectas:

    $$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}\,; \qquad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

    hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

34. Dados el plano:

    $$\pi_1 \equiv x + y + z = 1$$

    y la recta:

    $$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

    se pide:

    a) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1.

    b) Hallar un plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1 y π_2 tenga una longitud de $\sqrt{29}$ unidades.

35. Dado el plano $\pi :\ x + 3y + z = 4$, se pide:

    a) Calcular el punto simétrico P del punto $O(0,0,0)$ respecto del plano π.

    b) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $x = 0$.

    c) Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

36. Dadas las rectas:

    $$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}\,; \qquad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$$

    se pide:

    a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

    b) Determinar la distancia entre las rectas r y s.

    c) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s.

37. Dadas las rectas:

    $$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}\,; \qquad s \equiv \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

    determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales las rectas r, s se cortan perpendicularmente.

38. Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$, hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π.

39. Dada la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi :\ x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π.

40. Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}\ ; \qquad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

se pide:

a) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

b) Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s.

41. Dadas las rectas:

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}\ ; \qquad s \equiv \begin{cases} y + z = 3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

se pide:

a) Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s.

b) Hallar la distancia desde el punto $A(0, 1, -1)$ a la recta s.

42. Sea π el plano que contiene a los puntos $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$ y $R(0, 0, 3)$. Se pide:

a) Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P, Q y R.

b) Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

43. Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2y es perpendicular a ambas.

b) Hallar la mínima distancia entre r_1 y r_2.

44. Dados el plano

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$$

y el plano π_2 determinado por el punto $P(0, 2, 4)$ y los vectores $\vec{u_1} = (0, 2, 6)$ y $\vec{u_2} = (1, 0, b)$, se pide:

a) Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2.

c) Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2.

45. Los puntos $P(1, 2, 1)$, $Q(2, 1, 1)$ y $A(a, 0, 0)$ con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

46. *a*) Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas:

$$r_1 \equiv x = y = z \ , \quad r_2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad , \quad r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

b) Hallar la recta r que corta perpendicularmente a las rectas:

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2} \ ; \qquad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

47. Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1 \ , \qquad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$$

se pide:

a) Estudiar su posición relativa.

b) En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos; en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

48. *a*) Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,1)$.

b) Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1,2,3)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(-2,1,1)$.

c) Hallar el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P.

49. Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0 \ , \qquad \pi_2 \equiv 2x + y - 3z - 1 = 0$$

y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{2}$$

se pide:

a) El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2.

b) El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY, XZ e YZ.

c) La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2.

50. Dado el punto $P(0,1,1)$ y las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1} \ , \qquad s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

b) Determinar la recta que pasa por el punto P, tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s.

Solución del segundo apartado:

(I) Plano perpendicular a r por P:

$$2x + 1(y-1) - 1(z-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x + y - z = 0$$

(II) Plano que contiene a s y P: el haz de planos de s es:

$$\lambda x + \mu y = 0$$

Si el plano debe pasar por $P(0, 1, 1)$:

$$\lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu = 0$$

El plano buscado es $x = 0$.

(III) La recta que nos piden es la intersección de los dos planos, es decir:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

51. Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

    a) Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

    b) Hallar el valor de a para que el tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 tenga volumen igual a 7.

    c) Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

52. Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}\ ; \qquad s \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 \end{cases}$$

se pide:

    a) Estudiar su posición relativa.

    b) Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2.

53. *a*) Dados los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 0, 2)$ y la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

determinar los puntos de r que equidistan de P y Q.

    b) Determinar la ecuación del plano π que pasa por el punto Q y es perpendicular a r.

54. Una de las caras del paralelepípedo H tiene vértices en los puntos $A(4, 2, 8)$, $B(6, 4, 12)$, $C(6, 0, 10)$ y $D(8, 2, 14)$.

    a) Si el punto $E(6, 8, 28)$ es otro de los vértices, hallar el volumen de H.

    b) Hallar el punto E' simétrico de E respecto del plano que contiene a la cara $ABCD$.

55. Dadas la recta r y la familia de rectas s, mediante:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y = -3 \\ z = 1 \end{cases} \quad ; \qquad s \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = a \\ x + z = 0 \end{cases}$$

se pide:

    a) Hallar el valor de a para que ambas rectas se corten. Calcular el punto de corte.

    b) Hallar la ecuación del plano determinado por ambas rectas cuando ambas se cortan.

56. Se dan la recta r y el plano π, mediante:

$$r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}\ , \qquad \pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$$

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a 1.

57. Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}\ , \qquad s \equiv \begin{cases} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{cases}$$

se pide:

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2,3,4)$ y es paralelo a las rectas r y s.

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4,-1,2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

58. Dado el punto $P(2,1,-1)$ se pide:

a) Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto $Q(3,0,2)$.

b) Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r \equiv x-1 = y-1 = z$.

c) Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x+y+z=3$.

59. Dado el punto $P(-1,0,2)$ y las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3 \end{cases}$$

se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y s.

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s.

c) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s

60. *a*) Hallar los puntos de corte de la recta de dirección $(2,1,1)$ y que pasa por el punto $P(4,6,2)$, con la superficie esférica de centro $C(1,2,-1)$ y radio $\sqrt{26}$.

b) Hallar la distancia del punto $Q(-2,1,0)$ a la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z-3}{2}$$

61. Dados el punto $P(1,0,-1)$, el plano $\pi \equiv 2x-y+z+1=0$, y la recta:

$$r \equiv \begin{cases} -2x+y-1=0 \\ 3x-z-3=0 \end{cases}$$

se pide:

a) Determinar la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π.

b) Hallar el ángulo entre r y π.

62. Dados los puntos $A(2,-2,1)$, $B(0,1,-2)$, $C(-2,0,-4)$, $D(2,-6,2)$, se pide:

(*a*) Probar que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.

(*b*) Hallar el área del triángulo ABC.

63. Dados el punto $P(1,2,-1)$ y el plano $\pi \equiv x+2y-2z+2=0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en un punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:

(*a*) Hallar el punto de tangencia P'.

(*b*) Hallar la ecuación de S.

64. Sean r_A la recta con vector de dirección $(1, \lambda, 2)$ que pasa por el punto $A(1, 2, 1)$, r_B la recta con vector de dirección $(1, 1, 1)$ Que pasa por $B(1, -2, 3)$, y r_C la recta con vector de dirección $(1, 1, -2)$ que pasa por $C(4, 1, -3)$. Se pide:
   (a) Hallar λ para que r_A y r_B se corten.
   (b) Hallar λ para que la recta r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C.
   (c) Hallar el ángulo que forman r_B y r_C.

65. La recta r pasa por $P(2, -1, 0)$ y tiene vector director $(1, \lambda, -2)$; la recta s pasa por $Q(1, 0, -1)$ y tiene vector director $(2, 4, 2)$.
   (a) Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre r y s sea $\dfrac{9}{\sqrt{59}}$.
   (b) Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y por Q.

66. Dados los puntos $P(-1, -1, 1)$, $Q(1, 0, 2)$ y los planos:

$$\pi_1 \equiv x - z = 0, \qquad \pi_2 \equiv my - 6z = 0, \qquad \pi_3 \equiv x + y - mz = 0,$$

   se pide:
   (a) Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta.
   (b) Para $m = 3$ hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2.
   (c) Hallar la distancia entre los puntos Q y P', siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano π_1.

67. (a) Dados los vectores $\vec{u} = (2, 3, 4)$, $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ y $\vec{w} = (-1, \lambda, -5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 6.
   (b) Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\vec{u} = (2, -1, 4)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

68. Dados el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.

69. Dados el punto $P(-4, 6, 6)$, el origen de coordenadas O y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

   se pide:
   (a) Determinar un punto Q de la recta r, de modo que su proyección Q' sobre OP sea el punto medio de este segmento.
   (b) Determinar la distancia de P a r.
   (c) ¿Existe algún punto R de la recta r, de modo que los puntos O, P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto o los puntos con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

70. Dados los planos $\pi_1 : ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 : x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a, para cada uno de los siguientes supuestos:
   (a) Que π_1 y π_2 sean paralelos.
   (b) Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.
   (c) Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $x = y$.

71. Dado el punto $P(2, 1, -1)$, determine el punto simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0, 2, -1)$, $B(1, -3, 0)$ y $C(2, 1, 1)$.

72. Se consideran los puntos $A(0, 5, 3)$, $B(0, 6, 4)$, $C(2, 4, 2)$ y $D(2, 3, 1)$ se pide:

(a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo.

(b) Calcular el área de dicho paralelogramo.

(c) Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio de dicho paralelogramo.

Soluciones:

(1) $x - y + z = 0$

(2) (a) $D(0,2,2)$ (b) rombo

(3) (a) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (b) $4x + y - z + 2 = 0,\ 2x - 3y + 3z - 1 = 0$ (c) $8x + 5y + z - 8 = 0,\ x - 2y + z - 1 = 0$

(4) (a) $a = -2$ (b) $x + y - 2z + 2 = 0,\ x - 2y + z + 1 = 0$

(5) (a) $\frac{22}{\sqrt{26}}$ (b) $x - 3y - 9z + 1 = 0,\ 7x - 8y - 11z + 2 = 0$

(6) (a) $5x - 7y - 16z + 17 = 0$ (b) $x = -2 + 5\lambda,\ y = 1 - \lambda,\ z = 2\lambda$

(7) $2x + y - 2 = 0$

(8) (a) $k = 4$ (b) $x + 2y - z + 5 = 0$

(9) (a) $Q(1,0,-1)$ (b) $3x + 3y + 3z - 10 = 0,\ 3x + 3y + 3z + 10 = 0$

(10) (a) se corta perpendicularmente con $\pi 1$, paralela a π_2 (b) se cortan (c) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

(11) (a) $k = \frac{1}{3}$ dos paralelos y otro que los corta, $k = -2$ se cortan en una recta, demás casos: se cortan en un punto (b) $\vec{u} = (1,0,1)$

(12) (a) $O'\left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$ (b) $2x - y = 0$ (c) 6

(13) (a) $2x - y + 2z + 5 = 0,\ z = 0,\ 2x - y + 2z - 13 = 0,\ z = 0$ (b) son dos rectas paralelas

(14) (a) $\frac{2}{3}$ (b) $x = 2t,\ y = -2t,\ z = t$ (c) $\frac{3}{2}$

(15) (a) $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$ (b) $(0,1,1)$, $(3,2,-3)$

(16) (a) $3x - 10y + 6z + 1 = 0;\ x + 5y + 2z - 9 = 0$ (b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

(17) $\lambda \neq 2,\ \lambda \neq 4$: los planos se cortan en un punto; $\lambda = 2$: dos planos paralelos y otro que los corta; $\lambda = 4$: los planos se cortan en rectas paralelas.

(18) (a) $x = -3t,\ y = t,\ z = t$ (b) $(3,-1,-1)$

(19) (a) $-2y + 3z + 1 = 0,\ x - y + 6z + 2 = 0$ (b) $x - 5y + 12z + 4 = 0$ (c) $x + 13y - 15z - 5 = 0$

(20) (a) $4x + 2y - z = 0,\ x - 8y + 5z = 0$ (b) $7x + 5y - z - 3 = 0,\ x + 15y - 18z - 23 = 0$

(21) $\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$

(22) paralelas

(23) (a) $2x - 2y + 2z - 1 = 0$ (b) $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$ (c) $x = 1 - t,\ y = 2,\ z = t$

(24) (a) $\lambda = 3$ (también -3) (b) $\frac{12}{13}$

(25) (a) $3x + 3y - z = 0$ (b) $x + y + 1 = 0,\ x - 2y - 3z - 14 = 0$

(26) (a) no (b) (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(27) $(6,8,-4),\ (0,2,2)$

(28) $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$

(29) (a) $-3x + 5y + 4z - 13 = 0$ (b) $\frac{32}{5\sqrt{2}}$

(30) (a) (b) $a = 0$ se cortan, $a \neq 0$ se cruzan (c) $\sqrt{2}$

(31) (a) $2x + 3y + z - 1 = 0$ (b) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

(32) (a) plano mediador $x + 3z - 5 = 0$ (b) $(-1,1,-3)$, $(\frac{1}{3},1,1)$

(33) $4x + y - 2z + 2 = 0,\ 11x + 2y - 7z - 2 = 0$

(34) (a) $(3,2,-4)$ (b) $x + y + z = 0,\ x + y + z - 2 = 0$

(35) (a) $\left(\frac{8}{11}, \frac{24}{11}, \frac{8}{11}\right)$ (b) $\frac{1}{\sqrt{11}}$ (c) $\frac{32}{9}$

(36) (a) $x - 2z - 1 = 0$ (b) $\frac{7}{\sqrt{5}}$ (c) no

(37) $a = 1,\ b = -1$

(38) $2x - y + 2z - 8 = 0,\ 2x - y + 2z + 10 = 0$

(39) $\frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$

(40) (a) $12x+11y+57z+217=0,\ 35x+53y-22z=0$ (b) $\frac{5}{\sqrt{251}}$

(41) (a) $2x-y+1=0$ (b) 3

(42) (a) 1 (b) $\left(\frac{72}{49},\frac{36}{49},\frac{24}{49}\right)$

(43) (a) $y+z-4=0,\ x=0$ (b) $\sqrt{2}$

(44) (a) $b=-2,\ a\neq 2$ (si $a=2$ son coincidentes) (b) $x=\frac{3}{2},\ y=t,\ z=-2+3t$ (c) $2x-3y+z-3=0$

(45) $a=\frac{9}{2}$

(46) (a) 32 (b) $8x+7y+11z-16=0,\ 3x+y+9z-8=0$

(47) (a) se cortan (b) $P\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0\right),\ \vec{u}=(0,2,1)$

(48) (a) $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$ (b) $-2x+y+z-3=0$ (c) $\frac{4}{3}$

(49) (a) $P_1\,(3,0,0),\ P_2\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{4},-\frac{5}{2}\right)$ (b) $\frac{1}{36}$ (c) $\frac{x-13}{6}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-10}{5}$ o bien $x-2y-3=0,\ 2x+y-3z-1=0$

(50) (a) $\left(\frac{4}{3},-\frac{10}{3},-\frac{2}{3}\right)$ (b) $2x+y-z=0,\ x=0$

(51) (a) $a=\frac{4}{3}$ (b) $a=\frac{10}{3},\ a=-\frac{2}{3}$ (c) $4y+10z-31=0$

(52) (a) se cruzan (b) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

(53) (a) $\left(15,-\frac{11}{2},3\right)$ (b) $2x-y-2=0$

(54) (a) 112 (b) $(18,12,20)$

(55) (a) $a=-3$ (b) $x+2y+3=0$

(56) $\left(\frac{14}{3},\frac{2}{3},3\right),\ \left(\frac{2}{3},\frac{8}{3},-3\right)$

(57) (a) $3x-y+2z-11=0$ (b) $\frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{2}$

(58) (a) $(4,-1,5)$ (b) $(0,1,1)$ (c) $\left(-\frac{8}{3},\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$

(59) (a) se cruzan (b) $-x+4y-3z+5=0,\ -x+y+2z-5=0$ (c) $x+y-2z=0,\ z-3=0$

(60) (a) $(-4,2,-2),\ \left(\frac{10}{3},\frac{17}{3},\frac{5}{3}\right)$ (b) $3\sqrt{2}$

(61) (a) $x+y-z-2=0$ (b) arsen $\frac{3}{2\sqrt{21}}$

(62) (a) Los vectores $\vec{AB}=(-2,3,-3)$ y $\vec{CD}=(4,-6,6)$) son paralelos. $\sqrt{149/22}$ (b) $\frac{\sqrt{149}}{2}$

(63) (a) $P'(0,0,1)$ (b) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{9}{4}$

(64) (a) $\lambda=-1$ (b) $\lambda=1$ (c) $\frac{\pi}{2}$

(65) (a) $\lambda=3$ (b) $\lambda=-1$

(66) (a) $m=-2,\ m=3$ (b) $x+2y+z+2=0$ (c) $\sqrt{2}$

(67) $x-2y+2z-12=0,\ x-2y+2z+6=0$

(68) (a) 0 y 6 (b) $x=1+t,\ y=1+2t,\ z=0$

(69) (a) $a=-1$ (b) $a=\frac{1}{2}$ (c) $a=1$

(70) (a) $a=-1$ (b) $a=\frac{1}{2}$ (c) $a=1$

(71) $P'(0,1,1)$

(72) (a) * (b) $2\sqrt{2}$ (c) $x=1\,;y=9/2+\lambda\,;z=5/2-\lambda$