Bachillerato Internacional
Matemáticas I
Problemas

Jesús García de Jalón de la Fuente

Curso 2017-2018

Índice

1. Radicales

Simplificar:

1. $\sqrt[3]{128a^3b^7c^2}$
2. $\sqrt[4]{81a^6b^5c^8}$
3. $\sqrt[5]{1024a^{10}b^5c^3}$
4. $\sqrt[6]{729a^7b^{12}c^6}$
5. $\sqrt{a^2+2ax+x^2}$
6. $\sqrt{a^2x+2ax^2+x^3}$
7. $\sqrt{ab^2-6ab+9a}$
8. $\sqrt{16x^2+24x+9}$
9. $\sqrt{4+\sqrt{16x^2+8x^3+x^4}}$
10. $\sqrt{9a^2+\sqrt{36a^2+12a+1}}$
11. $\sqrt{\dfrac{a^2x-2ax^2+x^3}{a^2-2ax+x^2}}$

Calcular:

12. $4\sqrt{4}-2\sqrt{9}+3\sqrt{25}-5\sqrt{49}$
13. $3\sqrt{8}+5\sqrt{72}+8\sqrt{50}-4\sqrt{18}+4\sqrt{2}$
14. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}+\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$
15. $2\sqrt{12}-3\sqrt{75}+5\sqrt{27}-3\sqrt{48}+4\sqrt{3}+\sqrt{243}$
16. $\dfrac{\sqrt{20}}{3}+\dfrac{\sqrt{45}}{2}-\dfrac{5\sqrt{80}}{6}+\dfrac{\sqrt{125}}{3}$
17. $3\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{54}$
18. $2\sqrt{8a^3}-\sqrt{288a^3}+3\sqrt{128a^3}-\sqrt{72a^3}-2\sqrt{32a^3}+4\sqrt{128a^3}$
19. $\sqrt{\dfrac{2}{15}}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{14}}\cdot\sqrt{\dfrac{5}{48}}\cdot\sqrt{63}\cdot\sqrt{\dfrac{192}{9}}$
20. $3\sqrt[3]{12}\cdot 5\sqrt[3]{4}$
21. $\sqrt[3]{13+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt[3]{13-2\sqrt{11}}$
22. $\sqrt[3]{2x+2\sqrt{x^2-2}}\cdot\sqrt[3]{2x-2\sqrt{x^2-2}}$
23. $\left(3\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{24}-3\sqrt[3]{192}\right)\sqrt[3]{2}$
24. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{1/2}\cdot\sqrt[3]{1/5}$
25. $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}$
26. $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[9]{a^5}\cdot\sqrt[9]{a^7}$
27. $2\sqrt{a^3}\cdot 3\sqrt[4]{a^5}\cdot 5\sqrt[8]{a^3}$
28. $\sqrt[6]{2a^3b}\cdot\sqrt[9]{2^5a^7b^4}\cdot\sqrt[3]{2^2a^2b}\cdot\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[9]{2a^5b^5}$
29. $2\sqrt{ab}\cdot\dfrac{3\sqrt[3]{2^2a^2b}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt[6]{2^5ab^3}}{5}\cdot\dfrac{5\sqrt[5]{a^2b^2}}{3}\cdot\sqrt[30]{2^{15}a^8b^8}$
30. $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$
31. $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)+\left(5-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$
32. $\left(1+\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)$
33. $\left(\sqrt{72}-\sqrt{20}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+2\sqrt{8}-7\sqrt{2}\right)$
34. $\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{8}-3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{20}-\sqrt{72}\right)$
35. $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)\left(4-\sqrt{2}\right)$
36. $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)$

37. $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$

38. $\dfrac{3\sqrt{36}}{\sqrt{4}}+\dfrac{2\sqrt{54}}{\sqrt{6}}-\dfrac{3\sqrt{98}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$

39. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

40. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

41. $\dfrac{3\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

42. $\dfrac{3}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

43. $\dfrac{30\sqrt[3]{6}}{3\sqrt[3]{12}}$

44. $\dfrac{6\sqrt{63}}{2\sqrt{7}}$

45. $\dfrac{3\sqrt[3]{500ab^3}}{\sqrt[3]{4a}}$

46. $\dfrac{\sqrt[6]{a^{25}}}{\sqrt[3]{a^5}}$

47. $\dfrac{\sqrt[6]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b^3}}$

48. $\dfrac{6\sqrt[6]{5^7a^7}}{3\sqrt[3]{5^2a^2}}$

49. $\dfrac{8\sqrt[3]{2^2a^2b^3}}{2\sqrt[4]{2^2a^2b^4}}$

50. $\dfrac{\sqrt[4]{a^7}\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a^3}}$

51. $\dfrac{12\sqrt{8}+3\sqrt{32}-5\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$

52. $\left(2-\sqrt{3}\right)^2\left(3-\sqrt{3}\right)^2$

53. $\sqrt{6-\sqrt{11}}\sqrt{6+\sqrt{11}}$

54. $\sqrt{9+\sqrt{17}}\sqrt{9-\sqrt{17}}$

55. $\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{9}}}$

56. $\sqrt{ab\sqrt{a^2b^3\sqrt{a^8b^6}}}$

57. $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{16x^3}}\right)^4$

58. $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{16x^2}}}\right)^8$

59. $3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^6}}}}$

60. $2\sqrt{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}}$

61. $3\sqrt{\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}}}}}$

62. $\sqrt{ab\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^6b^9\sqrt[5]{a^{10}b^{10}}}}}$

63. $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}\sqrt{a\sqrt{a}}\sqrt[6]{a^5\sqrt{a^3}}$

64. $\sqrt{\sqrt[3]{a^5}}\sqrt[3]{\sqrt{a}}\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^7}}\sqrt[6]{\sqrt{a^{11}}}$

65. $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}\sqrt[3]{a\sqrt{a^3}}\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}\sqrt[3]{a^2\sqrt{a\sqrt{a}}}$

Racionalizar

66. $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

67. $\dfrac{\sqrt{6}-3}{\sqrt{6}-2}$

68. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

69. $\dfrac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$

70. $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

71. $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$

72. $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[6]{8}}$

73. $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$

74. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{0{,}008}}$

75. $\dfrac{2\sqrt[6]{27}}{\sqrt[4]{9}}$

76. $\dfrac{\sqrt{5\sqrt[3]{5^2}}}{\sqrt[3]{5^2\sqrt{5}}}$

77. $4\sqrt{\dfrac{2}{3}}+3\sqrt{\dfrac{3}{2}}+2\sqrt{6}-\sqrt{150}$

78. $7\sqrt{\dfrac{3}{5}}+2\sqrt{\dfrac{5}{3}}-3\sqrt{15}+2\sqrt{60}$

79. $\dfrac{12}{3+\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$

Soluciones: (1) $4ab\sqrt[3]{2bc^2}$ (2) $3abc^2\sqrt[4]{a^2b}$ (3) $4a^2b\sqrt[5]{c^3}$ (4) $3ab^2\sqrt[6]{a}$ (5) $a+x$ (6) $(a+x)\sqrt{x}$ (7) $(b+3)\sqrt{a}$ (8) $4x+3$ (9) $x+2$ (10) $3a+1$ (11) $\sqrt{x}$ (12) -18 (13) $68\sqrt{2}$ (14) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ (15) $-5\sqrt{3}$ (16) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ (17) $13\sqrt[3]{2}$ (18) $34a\sqrt{2a}$ (19) 2 (20) $30\sqrt[3]{6}$ (21) 5 (22) 2 (23) $\sqrt[3]{6}$ (24) $\sqrt[4]{4}$ (25) $a^2\sqrt[4]{a^3}$ (26) a^3 (27) $30a^3\sqrt[8]{a}$ (28) $4a^3b^2$ (29) $4ab\sqrt[5]{a^3b^3}$ (30) $\sqrt{6}-4$ (31) $9+5\sqrt{2}$ (32) $2\sqrt{2}-9$ (33) $11\sqrt{10}-40$ (34) $46+25\sqrt{10}$ (35) 14 (36) -2 (37) 2 (38) -11 (39) -4 (40) $4\sqrt{2}$ (41) $2\sqrt{3}+1$ (42) $\frac{5\sqrt{3}-1}{2}$ (43) $5\sqrt[3]{4}$ (44) 9 (45) $15b$ (46) $a^2\sqrt{a}$ (47) $\sqrt[6]{ab}$ (48) $2\sqrt{5a}$ (49) $4\sqrt[6]{2a}$ (50) a^2 (51) -4 (52) $156-90\sqrt{3}$ (53) 5 (54) 8 (55) 3 (56) a^2b^2 (57) $2x\sqrt[3]{2}$ (58) $16x^2$ (59) $3\sqrt[9]{3^5}$ (60) $\sqrt[16]{2}$ (61) $\sqrt[16]{3}$ (62) $a\sqrt[24]{a^{23}}$ (63) $a^2\sqrt[3]{a^2}$ (64) $a^2\sqrt{a}$ (65) $a^3\sqrt[6]{a}$ (66) $3+\sqrt{2}$ (67) $3-\frac{3}{2}\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}$ (68) $5+2\sqrt{6}$ (69) $\sqrt{a}$ (70) $\sqrt{ab}$ (71) $\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$ (72) 1 (73) $\sqrt[3]{18}$ (74) 5 (75) 2 (76) 1 (77) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ (78) $\frac{46\sqrt{15}}{15}$ (79) $1-\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}$

2. Logaritmos

80. Calcular los siguientes logaritmos:
a) $\log_3 9$ *b*) $\log_5 125$ *c*) $\log_7 49$ *d*) $\log_2 16$ *e*) $\log_2 64$

81. Calcular los siguientes logaritmos:
a) $\log_3 81$ *b*) $\log_3 729$ *c*) $\log_5 1$ *d*) $\log_3 \dfrac{1}{3}$ *e*) $\log_3 \dfrac{1}{9}$

82. Calcular los siguientes logaritmos:
a) $\log_2 \dfrac{1}{32}$ *b*) $\log_5 \dfrac{1}{25}$ *c*) $\log_5(-5)$ *d*) $\log_3 \sqrt{3}$ *e*) $\log_2 \sqrt[3]{2}$

83. Calcular los siguientes logaritmos:
a) $\log_8 2$ *b*) $\log_5 \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ *c*) $\log_7 \dfrac{1}{\sqrt[3]{49}}$ *d*) $\log_6 \dfrac{-1}{\sqrt{6}}$ *e*) $\log_{49} 7$

84. Despejar x en las siguientes igualdades:
a) $2^x = 10$ *c*) $3^{2x} = 6$ *e*) $3^{x^2} = 6$
b) $5^x = 100$ *d*) $7^{-3x} = 15$ *f*) $3^{-5x^2} = 1$

85. Despejar x en las siguientes igualdades:
a) $\log_2 x = 3$ *c*) $\log_3 x = 6$ *e*) $\log_4 x^2 = 6$
b) $\log_5 x = 2$ *d*) $\log_7 x = \frac{1}{2}$ *f*) $\log_{16} x = \frac{1}{4}$

86. Hallar el valor de y cuando en la función $y = x \ln x$ hacemos $x = 1$.

87. Siendo $\log 2 = 0{,}3010$, calcular $\log 4$.

88. Siendo $\log 2 = 0{,}3010$, calcular $\log 0{,}8$ y $\log \sqrt{781{,}25}$.

89. Calcular el valor de $\log \sqrt[4]{781{,}25}$ conocido $\log 2 = 0{,}3010$.

90. Calcular los logaritmos decimales de los números 8; 1,25; $(0{,}64)^3$. Dato $\log 2 = 0{,}3010$.

91. Conocido $\log 5 = 0{,}6990$, hallar $\log 2$; $\log 2{,}5$; $\log 625$; $\log 12{,}5$; $\log 0{,}032$.

92. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$ y $\log 3 = 0{,}4771$, calcular $\log 10{,}8$; $\log 56{,}25$.

93. Siendo $\log 2 = 0{,}3010$, $\log 3 = 0{,}4771$ y $\log e = 0{,}4343$, calcular el logaritmo neperiano de 648.

94. Hallar el logaritmo en base 5 de 125; 1/25; 0,008.

95. Hallar el logaritmo de 256 en el sistema de base 4.

96. Averiguar la base de los logaritmos para que suceda $\log 2 = 2$.

97. Hallar la parte entera del logaritmo de 725 en el sistema de base 6.

98. Hallar la parte entera del logaritmo de 714 en el sistema de base 5.

99. Expresar la superficie S de una esfera en función de su volumen. Aplicar logaritmos a la fórmula obtenida.

100. Calcular los siguientes logaritmos:
a) $\log_8 \sqrt{2}$ *b*) $\log_{81} \sqrt[3]{9}$ *c*) $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt{7}$ *d*) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3$ *e*) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8}$

Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

101. $3^{2x+5} = 3^7$

102. $5^{x+3} = 25$

103. $2^{1+x} = 4^{2-x}$

104. $2^{x^2-1} = 8$

105. $5^{x^2-5x+6} = 1$

106. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7$

107. $2 \cdot 2^x + 2^{2x} = 80$

108. $3^{x^2-1} \cdot 3^{2x-4} \cdot 3^5 = 6561$

109. $7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$

110. $2^{2x+4} - 5 \cdot 2^{x+1} + 1 = 0$

111. $2^{x-1} + \dfrac{1}{2^{x-3}} = 5$

112. $3^x + \dfrac{1}{3^{x-1}} = 4$

Resolver:

113. $\begin{cases} 2^{x+2y} = 32 \\ 2^{3x-5y} = 16 \end{cases}$

114. $\begin{cases} 3^x = 3^y \\ 4^x 4^y = 256 \end{cases}$

115. $\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases}$

116. $\begin{cases} 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \\ 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \end{cases}$

117. $\begin{cases} 2^{x+y} = 4^{x-y} \\ 3^{xy} = 531441 \end{cases}$

Resolver:

118. $\log x + \log 2 = 1$

119. $\log(2x-3) + \log(5-x) = \log 5$

120. $\log(x^2+3x+2) - \log(x^2-1) = \log 2$

121. $\log(7x-9)^2 + \log(3x-4)^2 = 2$

122. $2\log x - \log 4 = \log 9$

123. $2\log x + \log(x^2+15) = \log 16$

124. $2\log x = \log 192 + \log 3 - \log 4$

125. $5\log x = 3\log x + 2\log 6$

126. $2\log x - \log 5x = \log 2$

127. $5\log x - \log 288 = 3\log\frac{3}{2}$

128. $\log(65-x^3) = 3\log(5-x)$

129. $\log x = 2 + (\log 18 + \log 8 - 2\log 25) : 2$

130. $\log\sqrt[3]{x} - \log\sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}$

131. $\log 3x = \log b + 2\log x$

132. $\dfrac{100^{\log x}+1}{10^{\log x}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

133. $\log 8^{\log x} - \log 2^{\log x} = \log x^x$

134. Calcular x sabiendo que el doble de su logaritmo decimal excede en una unidad al logaritmo de $x + \frac{11}{10}$.

135. Calcular el valor de a sabiendo que la ecuación:

$$\frac{\log(x^3-a)}{\log(x-2)} - 2\log 5 = \log 40$$

tiene dos raíces, cuyo producto es -15.

Resolver:

136. $\begin{cases} x - y = 3 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$

137. $\begin{cases} 2x - 9y = 1100 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

138. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 626 \\ \log x + \log y + \log 2 = 1 \end{cases}$

139. $\begin{cases} \log x^2 + \log y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 15 \end{cases}$

140. $\begin{cases} a^{xy} = a^4 \\ \log(x+y) + \log(x-y) = \log 15 \end{cases}$

141. Formar la ecuación de segundo grado cuyas raíces son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \log_x 25 = \log_y 4 \\ xy = 10000 \end{cases}$$

Soluciones: (80) (a) 2 (b) 3 (c) 2 (d) 4 (e) 6 (81) (a) 4 (b) 6 (c) 0 (d) -1 (e) -2 (82) (a) -5 (b) -2 (c) no existe (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{3}$ (83) (a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{2}{3}$ (d) no existe (e) $\frac{1}{2}$ (84) (a) $x = \log_2 10$ (b) $x = \log_5 100$ (c) $x = \frac{1}{2}\log_3 6$ (d) $x = -\frac{1}{3}\log 715$ (e) $x = \pm\sqrt{\log_3 6}$ (f) $x = 0$ (85) (a) $x = 9$ (b) $x = 25$ (c) $x = 216$ (d) $x = \sqrt{7}$ (e) $x = \pm 36$ (f) $x = 2$ (86) $y = 0$ (87) 0,6020 (88) $-0{,}0970$, 1,4465 (89) 0,72325 (90) 0,9030, 0,0970, $-0{,}5820$ (91) 0,3010, 0,3980, 2,7960, 1,0970, $-1{,}4950$ (92) 1,0333, 1,7502 (93) 6,4774 (94) 3, -2, -3 (95) 4 (96) $\sqrt{2}$ (97) 3 (98) 4 (99) $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$, $\ln S = \frac{1}{3}(\ln 36 + \ln \pi + 2\ln V)$ (100) (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) -2 (e) $-\frac{3}{2}$ (101) $x = 1$ (102) $x = -1$ (103) $x = 1$ (104) $x = \pm 2$ (105) $x = 2$, $x = 3$ (106) $x = 2$ (107) $x = 3$ (108) $x = -4$, $x = 2$ (109) $x = -1$, $x = -2$ (110) $x = -1$, $x = -3$ (111) $x = 1$, $x = 3$ (112) $x = 0$, $x = 1$ (113) $(3,1)$ (114) $(2,2)$ (115) $(6,2)$ (116) $(3,2)$ (117) $(6,2)$, $(-6,-2)$ (118) $x = 5$ (119) $x = 4$, $x = \frac{5}{2}$ (120) $x = 4$ (121) $x = 2$, $x = \frac{13}{21}$ (122) $x = 6$ (123) $x = 1$ (124) $x = 12$ (125) $x = 6$ (126) $x = 10$ (127) $x = 3\sqrt[5]{4}$ (128) $x = 2$ (129) $x = 48$ (130) $x = 40$ (131) $x = \frac{3}{b}$ (132) $x = \sqrt{3}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (133) $x = 1$, $x = 2\log 2$ (134) $x = 11$ (135) $a = 98$ (136) $(5,2)$ (137) $(1000, 100)$ (138) $(1,5)$, $(5,1)$ (139) $(-2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, $(2\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $(-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ (140) $(4,1)$ (141) $x^2 - 641x + 10000 = 0$

3. Combinatoria

142. ¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse con los nueve primeros números, sin que se repitan las cifras.

143. Formar las variaciones de los elementos a, b, c, d, e, agrupados de tres en tres.

144. Formar todas las permutaciones posibles con las letras de la palabra *mano*.

145. Formar las combinaciones de los elementos a, b, c, d, e, f, agrupados de cuatro en cuatro.

146. Con los siete primeros números, ¿cuántas sumas diferentes de tres sumandos podremos formar?

147. ¿Cuántas pesadas diferentes podrán hacerse con ocho pesas distintas, tomándolas de tres en tres?

148. Con 1, 2, 3, 4, 6, ¿cuántos números de cinco cifras, no repetidas, pueden formarse que sean múltiplos de 4?

149. Una línea de autobuses consta de 15 puntos de parada, ¿cuántos billetes tendrán que imprimir, si cada uno lleva las estaciones de origen y llegada?

150. Para jugar al dominó siete fichas hacen un juego. Sabiendo que son 28 fichas, hallar cuántos juegos diferentes podrán obtenerse.

151. Si tienen 176 euros, en un billete de cien, otro de cincuenta, otro de veinte, otro de cinco y una moneda de un euro. ¿Cuántos pagos diferentes podrán hacerse con dos billetes o monedas y a cuánto ascenderá cada uno?

152. ¿De cuántas maneras podrán distribuirse ocho premios iguales entre 12 aspirantes? ¿Y si los premios fueran diferentes?

153. ¿Cuántos productos diferentes pueden formarse con los números 3, 5, 7 y 9?

154. ¿Cuántas señales diferentes podemos hacer con doce banderas de diferente color, agrupándolas de cuatro en cuatro? ¿Y agrupándolas de todas las formas posibles, o sea de 1 en 1; de 2 en 2; ... etc?

155. Una persona tiene dos sortijas diferentes. ¿De cuántas maneras puede ponérselas, ya en la mano derecha, ya en la izquierda, colocando una sola sortija en cada dedo y exceptuando el pulgar de cada mano?

156. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 4 personas en un banco? ¿Y alrededor de una mesa circular?

157. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 9 personas en un banco? ¿Y alrededor de una mesa circular?

158. ¿Cuántos números de cinco cifras, sin que se repita ninguna de ellas, se pueden formar con las 0, 1, 2, 3 y 4?

159. ¿En cuántos puntos se cortan cinco rectas de un plano, entre las cuales no existen paralelas entre sí, ni tampoco tres rectas concurrentes ?

160. Dados seis puntos en el espacio, tales que, cada cuatro no estén en un mismo plano, ¿cuántos planos quedarán determinados por esos seis puntos?

161. ¿Cuántos triángulos se obtienen uniendo cada tres vértices de un pentadecágono regular?

162. Con seis pesas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 gramos, ¿cuántas pesadas diferentes se pueden efectuar?

163. Con ocho campanas de tañidos distintos, ¿cuántos sonidos diferentes podremos obtener?

164. Con tres vocales y tres consonantes, ¿cuántas palabras de seis letras pueden formarse con la condición de que no figuren dos consonantes seguidas ni tres vocales seguidas?

165. Calcular el número de ordenaciones que pueden hacerse, conteniendo sin repetición, todas las letras de la palabra *NOVELA*, en las que no hay dos vocales ni dos consonantes juntas.

166. ¿Cuántos números de seis cifras sin repetir, pueden formarse con las nueve primeras cifras significativas y que sean menores que 650000?

167. ¿De cuántas maneras pueden repartirse cinco juguetes diferentes entre 4 niños, de modo que toque a cada uno un juguete por lo menos?

168. ¿Cuántas ordenaciones de letras pueden formarse con 20 consonantes y 5 vocales, de manera que cada ordenación contenga tres consonantes y dos vocales y las vocales sólo puedan ocupar el segundo y cuarto puesto y sean sin repetición?

169. ¿Cuántos números de cuatro cifras, no repetidas, pueden formarse con las 1, 2, 3, 4, 5 y 6. ¿En cuántos entrará la cifra 5?

170. ¿Cuántos números podríamos formar con las nueve cifras significativas, de manera que en cada número entren todas y no se repita ninguna? ¿Cuántos empiezan por 123?

171. ¿Cuántas ordenaciones diferentes pueden formarse con todas las letras de la palabra permutación? ¿Cuántas empiezan con m? ¿Cuántas por per?

172. Calcular la suma de los números representados por las permutaciones sin repetición de las cifras 2, 3, 4 y 5.

173. Calcular la suma de los números representados por las permutaciones sin repetición, de las cifras 1, 2, 3, 4 y 5.

174. Hallar la suma de todos los números de tres cifras sin repetición, tomadas de entre las 1, 2, 3, 7, 8 y 9.

175. Calcular el número y la suma de todos los números de cinco cifras sin repetir, que se pueden formar con los 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

176. Calcular la suma de todos los números de cinco cifras diferentes que se pueden escribir con sólo las cifras impares, sin repetir en cada número ninguna cifra.

177. Hallar cuántos números hay mayores que 1.000 y menores que 4000 que estén formados por cuatro cifras, sin repetir, entre las 8 primeras cifras significativas.

178. ¿Cuántas permutaciones ordinarias pueden formarse con todas las cifras, sin repetir, del número 54281? Calcular la suma de todos estos números.

179. Hallar cuántos números de cifras sin repetir hay en el sistema de base 6, mayores que 1000 y menores que 3000.

180. En cada uno de los vértices de un exágono hay luces de distinto color, ¿cuántas señales distintas se pueden hacer encendiendo menos de cuatro luces, definiendo señales distintas cuando hay cambio de color?

181. Con n rectas en un plano sin que exista ninguna paralela ni tres que concurran en un punto ¿Cuántos puntos de intersección habrá?

182. Un examen consta de 10 preguntas de las que hay que escoger 8.
    (a) ¿De cuántas maneras pueden escogerse las preguntas?
    (b) ¿De cuántas si las dos primeras son obligatorias?

183. Con las cifras 3, 4, 5, 8 y 9:
    (a) ¿Cuántos números de 3 cifras diferentes pueden formarse?
    (b) ¿Cuántos son mayores de 500?

184. En un juego se reparten simultáneamente 5 cartas (de una baraja de 40) a un jugador:
    (a) ¿De cuántas maneras pueden repartirse las cartas?
    (b) ¿De cuántas si sabemos que 2 son de oros y 3 de copas?

185. Con las 27 letras del alfabeto:
    (a) Cuántas palabras de 4 letras distintas se pueden formar?
    (b) Cuántas empiezan y terminan con vocal?

186. Tres chicos y tres chicas van al cine.
    (a) ¿De cuántas maneras diferentes pueden ocupar los seis asientos de una fila?
    (b) ¿De cuántas si los chicos y las chicas deben sentarse alternados?

187. Con las letras dela palabra ARBOL:
    (a) ¿Cuántas palabras de 5 letras distintas pueden formarse?
    (b) ¿En cuántas de ellas las vocales están separadas?

188. Con las cifras 1, 3, 5, 7 y 9,
    (a) ¿Cuántos productos de tres factores distintos se pueden realizar?
    (b) ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar?

189. Un equipo de balonmano está formado por 6 jugadores de campo y un portero. Si un entrenador dispone de 12 jugadores de campo y 2 porteros, ¿cuántas alineaciones distintas puede formar?

190. (a) Desarrollar $(1-2x)^5$
    (b) Calcular el coeficiente de x^6 en $(x-2)^{10}$

191. En un grupo de teatro hay 4 actores y 7 actrices. El director tiene que elegir a 5 de ellos para la próxima representación.
    (a) ¿De cuántas maneras podrá hacerlo?
    (b) ¿Y si necesita que 2 sean hombres y 3 mujeres?

192. Si se colocan en orden alfabético las palabras de 5 letras formadas con las letras de la palabra NEPAL, ¿cuál es la que ocupa el lugar 86º?

193. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 5 cartas de una baraja española de forma que haya al menos una carta de oros?

194. Con las cifras del 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de 3 cifras distintas pueden formarse que sean múltiplos de 3?

195. Hallar el coeficiente de x^3 en la expresión $(3-2x)^5$.

196. Escribir los tres primeros términos del desarrollo de $(1-2x)^5(1+x)^7$ en potencias crecientes de x.

197. El coeficiente de x en el desarrollo de:

$$\left(x+\frac{1}{ax^2}\right)^7$$

es $\frac{7}{3}$. Hallar el valor de a.

198. Hallar el término constante en los siguientes desarrollos:

$a)$ $\left(2x^2+\dfrac{3}{4x^6}\right)^{12}$ $\qquad b)$ $\left(3x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$

199. Sabiendo que:

$$(1+x)^5(1+ax)^6 = 1+bx+10x^2+\cdots$$

hallar los valores de $a, b \in \mathbb{Z}$.

200. Hallar el coeficiente de x^3 en el desarrollo de $\left(2-\dfrac{3x}{6}\right)^6$.

Soluciones: (142) 3024 (143) $*$ (144) $*$ (145) $*$ (146) 35 (147) 56 (148) 36 (149) 210 (150) 1184040 (151) 10 pagos de: 150, 120, 105, 101, 70, 55, 51, 25, 21, 6 (152) 495, 19958400 (153) 6 (154) 11880, 1302061344 (155) 56 (156) 6 (157) 362880, 40320 (158) 96 (159) 10 (160) 20 (161) 455 (162) 63 (163) 255 (164) 144 (165) 72 (166) 36960 (167) 240 (168) 136800 (169) 360, 240 (170) 362880, 720 (171) 3628800, 362880, 5040 (172) 93324 (173) 3999960 (174) 66600 (175) 111998880 (176) 6666600 (177) 630 (178) 5333280 (179) 196 (180) 41 (181) $\frac{n(n-1)}{2}$ (182) (a) 45 (b) 28 (183) (a) 60 (b) 36 (184) (a) 658008 (b) 5400 (185) (a) 421200 (b) 12000 (186) (a) 720 (b) 72 (187) (a) 120 (b) 72 (188) (a) 10 (b) 60 (189) 1848 (190) (a) $1-10x+40x^2-80x^3+80x^4-32x^5$ (b) 3360 (191) (a) 462 (b) 210 (192) NLAPE (193) 515502 (194) 24 (195) -720 (196) $1-3x-9x^2$ (197) $a=\pm 3$ (198) (a) 47520 (b) 2160 (199) $a=0,\ b=5,\ a=-2, b=-7$ (200) -20

4. Inducción matemática

201. Utilizar la inducción para demostrar que $2^{2n}-3n-1$ es divisible por 9 para $n=1,2,\ldots$.

202. Utilizando la inducción matemática demostrar que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

203. Supuesto que:

$$1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\ldots+\binom{n}{n}x^n = (1+x)^n \qquad n \in \mathbb{N}$$

$a)$ Hallar en función de n, la suma de:

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n}$$

b) Deducir si n es número par:

$$1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{n}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}$$

c) Hallar en términos de n y x la suma:

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\ldots+n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

204. *a*) Demostrar por inducción matemática que:

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(2r-1)(2r+1)}=\frac{n}{2n+1}, \qquad n\in\mathbb{N}$$

b) A partir de lo anterior comprobar que la suma de los $n+1$ términos de la serie:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\cdots=\frac{n+1}{2n+3}$$

205. *a*) Demostrar por inducción que para $n\in\mathbb{N}$ se verifica:

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

b) Hallar el valor de:

$$1+2+4+5+7+8+\ldots+(3n-2)+(3n-1)$$

206. Demostrar por inducción matemática que para $n\in\mathbb{N}$ se verifica:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

207. *a*) Demostrar por inducción matemática que para $n\in\mathbb{N}$ se verifica:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

b) Hallar el valor de n de modo que:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=3025$$

208. Demostrar por inducción que:

$$\sum_{i=1}^{n}3^i=\frac{3}{2}(3^n-1)$$

209. Demostrar por inducción que:

$$1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$$

Hallar el número mínimo de términos de la serie para el cual la suma sobrepasa 10^9.

210. Usar inducción matemática para demostrar que $n^2>7n+1$ para $n\geq 8$.

5. Más problemas de combinatoria

211. Se deben seleccionar 4 estudiantes para formar un equipo para un concurso de matemáticas. Se pueden elegir entre 4 chicos y 8 chicas:

   a) ¿De cuantas maneras puede elegirse el equipo?

   b) ¿De cuántas si el equipo debe incluir al menos un chico y una chica?

212. *a*) Cuántos números de 4 cifras pueden formarse con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6?

   b) ¿Cuántos de ellos son pares y múltiplos de 5?

   c) ¿Cuántos de éstos últimos no tienen cifras repetidas?

213. Demostrar que:

$$\frac{(2n+2)!(n!)^2}{[(n+1)!]^2(2n)!} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

214. Simplificar:

   a) $\dfrac{(n+1)!+n!}{(n-1)!}$ *b*) $\dfrac{n!-(n-1)!}{(n-2)!}$ *c*) $\dfrac{(n!)^2-1}{n!+1}$

215. Sabiendo que en el desarrollo de $(1+x)^n$ hay tres coeficientes a_{r-1}, a_r, a_{r+1} en progresión aritmética, demostrar que se cumple que:

$$n^2+4r^2-2-n(4r+1)=0$$

   A partir de esto, encontrar tres coeficientes consecutivos del desarrollo de $(1+x)^{14}$ que formen una progresión aritmética.

216. Cuatro parejas deben aparecer en una foto. ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse de modo que cada persona aparezca junto a su esposo o esposa?

217. Calcular el término independiente de x en el desarrollo de $\left(x^3-\dfrac{3}{x}\right)^8$.

218. Usar la fórmula de Newton para desarrollar

$$\left(2+\frac{x}{5}\right)^5$$

   A partir del desarrollo calcular $(2{,}01)^5$ con 4 decimales correctos.

Soluciones: (211) (*a*) 495 (*b*) 424 (212) (*a*) 2058 (*b*) 294 (*c*) 120 (213) $*$ (214) (*a*) n^2+2n (*b*) $(n-1)^2$ (*c*) $n!-1$ (215) 1001, 2002, 3003 (216) 384 (217) 20412 (218) 32,8080

6. Polinomios y ecuaciones

219. Hallar el valor de a para que el trinomio $4x^2-6x+a$ sea divisible por $x-3$.

220. Qué valor habrá que dar a n para que el polinomio $x^3-6x^2+2nx-1$ sea divisible por $x-6$.

221. Determinar m con la condición de que el polinomio $2x^4+5x^3+mx^2+4$, sea divisible por $x+4$.

222. Hallar el valor que ha de tomar m para que el polinomio x^5-4x^2-x+m sea divisible por $x+1$.

223. Determinar el valor de a con la condición de que el polinomio $2x^4+9x^3+2x^2-6x+3a$ de el resto 10 al dividirlo por $x+4$.

224. Determinar n para que en el polinomio $3x^4-4x^2+x-n$ de un resto 25 al dividirlo por $x-3$.

225. En el polinomio $5x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 4x + m$ determinar m para que al dividirlo por el binomio $x - 2$ de de resto 130.

226. Determinar n para que en el polinomio $3x^4 - 2x^3 + x - n$, de al dividirlo por $x - 1/2$, un resto igual a 1.

Factorizar:

227. $x^2 - 4x + 3$

228. $2x^2 - 2x - 4$

229. $3x^2 + 9x + 6$

230. $5x^2 + 10x - 15$

231. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

232. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

233. $3x^3 + 5x^2 - 4x - 4$

234. $2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$

235. $x^4 + x^3 - x^2 - x$

236. $x^4 - 5x^2 + 4$

237. $4x^4 - 17x^2 + 4$

238. $x^3 - 4x^2 + x + 6$.

239. $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$.

Simplificar:

240. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$

241. $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

242. $\dfrac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2}$

243. Dada la ecuación $4x^2 + 3x + c = 0$, hallar c sabiendo que una de sus raíces vale 4.

244. En la ecuación $x^2 - 23x + c = 0$, una de las raíces vale 8, calcular el valor de c y la otra raíz.

245. Calcular el valor que deberá tomar m en la ecuación $9x^2 - 18x + m = 0$ para que una de las raíces sea doble que la otra.

246. En la ecuación $x^2 - 72x + c = 0$, calcular el valor de c para que una raíz sea doble de la otra.

247. En la ecuación $x^2 - bx + 25 = 0$, hallar b con la condición de que las dos raíces sean iguales.

248. En la ecuación $x^2 - 16x + c = 0$, determinar el intervalo en que ha de variar c para que sus raíces sean imaginarias.

249. En la ecuación $x^2 - (m + 2)x + m + 5 = 0$, determinar el intervalo en que ha de variar m para que sus raíces sean imaginarias.

250. En la ecuación $8x^2-(m-1)x+m-7=0$, hallar los valores de m para que sus raíces sean a) iguales b) opuestas

251. En la ecuación $9x^2-18(m-1)x-8m+24=0$, hallar el valor que ha de tener m para que una raíz sea doble que la otra.

252. En la ecuación $mx^2+(m-1)x+m-1=0$, hallar el valor que ha de tener m para que una raíz sea doble que la otra.

253. En la ecuación $9x^2+bx+28=0$, determinar b con la condición de que la diferencia de las raíces de dicha ecuación sea igual a la unidad.

Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado:

254. $\dfrac{13-7x}{20}-\dfrac{26+x}{25}=\dfrac{2x+7}{5}-\dfrac{1-9x}{10}$

255. $\dfrac{3x+17}{8}-\dfrac{1-4x}{13}=\dfrac{1-x}{4}-\dfrac{9-x}{6}$

256. $\dfrac{23-x}{28}-\dfrac{2+6x}{14}=\dfrac{2-x}{7}-\dfrac{2x}{5}$

257. $\dfrac{3x-11}{20}-\dfrac{5x+1}{14}=\dfrac{x-7}{10}-\dfrac{5x-6}{21}$

258. $3(x-1)-\dfrac{2x-3}{4}+1+\dfrac{5}{6}=\dfrac{4x-1}{3}+x+\dfrac{1}{12}$

259. $\dfrac{44}{9}-\dfrac{7}{6}\left(\dfrac{x}{5}-\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{5}{6}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$

260. $\dfrac{x}{6}-\dfrac{2x-1}{6}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{x}{3}\right)=0$

261. $\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{x-9}{2}=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{x-5}{4}-\dfrac{14-2x}{6}\right)+\dfrac{43}{24}$

Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

262. $x^2-9=0$

263. $4x^2-9=0$

264. $5x^2-125=0$

265. $5x^2-3x=0$

266. $3x^2=2x$

267. $x^2-3x+2=0$

268. $5x^2+6x-8=0$

269. $3x^2+24x+21=0$

270. $3x^2-5x+2=0$

271. $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{32}{x^2-4}$

272. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{8}{x^2-1}$

273. $\dfrac{x+3}{x-5}+\dfrac{x-5}{x-3}=1$

274. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{x+1}$

275. $\dfrac{3-x}{1-x^2}-\dfrac{2+x}{1+x}=\dfrac{1}{1-x}$

276. $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{29}{10}$

Resolver las siguientes ecuaciones bicuadradas:

277. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

278. $x^4 - 8x^2 + 9 = 0$

279. $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

280. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

281. $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

282. $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

283. $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

284. $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

285. $144x^4 - 25x^2 + 1 = 0$

286. $(x^2 - 5)(x^2 - 3) = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones irracionales:

287. $\sqrt{3 - 2x} = 2$

288. $\sqrt{1 - x} = 1$

289. $\sqrt{x^2 - 1} = x - 1$

290. $\sqrt{x^2 - 7} = x - 5$

291. $\sqrt{x^2 + x - 1} = 2 - x$

292. $\sqrt{9x^2 + 2x - 3} = 3x - 2$

293. $\sqrt{x - 9} - \sqrt{x - 18} = 1$

294. $\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 14} = 1$

295. $\sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x}$

296. $\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 5} = 1$

297. $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 1} = 1$

298. $2\sqrt{x - 3} + \sqrt{4x - 1} = 1$

299. $\sqrt{x} + \sqrt{x + 3} = 3$

300. $\sqrt{x} + \sqrt{x - 2} = 2$

301. $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 6} = 5$

Resolver las siguientes ecuaciones factorizando previamente el polinomio:

302. $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$

303. $x^4 - 3x^3 - 10x^2 = 0$

304. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

305. $6x^3 - 13x^2 + 4 = 0$

306. $5x^3 + 19x^2 + 11x - 3 = 0$

307. $12x^3 + 49x^2 + 3x - 4 = 0$

308. $9x^4 - 31x^2 - 14x + 8 = 0$

309. $20x^4 - 71x^3 - 170x^2 + 119x + 30 = 0$

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

310. $\begin{cases} x + y^2 = 59 \\ x^2 + y^2 = 149 \end{cases}$

311. $\begin{cases} x^2 - xy = 21 \\ xy - y^2 = 12 \end{cases}$

312. $\begin{cases} x + y = 5 \\ (6 + x)(7 + y) = 80 \end{cases}$

313. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x^2 + y^2 = 74 \end{cases}$

314. $\begin{cases} (x - 3)(y - 1) = 6 \\ (x + 1)(y - 2) = 12 \end{cases}$

315. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 + 2xy \\ x^2 + 2xy + y^2 = 169 \end{cases}$

316. $\begin{cases} x + \dfrac{2}{y} = 1 \\ y + \dfrac{1}{x} = 6 \end{cases}$

317. $\begin{cases} y + \dfrac{x}{y} = \dfrac{21}{2} \\ x - \dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$

318. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 1 \end{cases}$

319. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 57 \\ x^2 - xy + y^2 = 43 \end{cases}$

320. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 180 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{20} \end{cases}$

321. $\begin{cases} y^2 = x^2 - 5 \\ 3y - x = 3 \end{cases}$

Resolver las siguientes inecuaciones de primer grado:

322. $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x-2}{12} + 3x < \dfrac{1}{4} + x$

323. $\dfrac{27-x}{2} > \dfrac{9}{2} + \dfrac{7x-54}{10}$

324. $\dfrac{3x+7}{4} - \dfrac{1-5x}{12} \leq 9 - x - \dfrac{4x-9}{3}$

325. $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{5x}{6} + \dfrac{2x}{5} - \dfrac{x}{3} \geq 11$

Resolver las siguientes inecuaciones:

326. $x^2 - 5x + 4 < 0$

327. $1 - x^2 > 0$

328. $x^2 - 4x - 5 \leq 0$

329. $12 + x - x^2 \geq 0$

330. $x^2 - x + 5 < 0$

331. $9x^2 - 3x + 1 \geq 0$

332. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 < 0$

333. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 > 0$

334. $x^3 - 3x + 2 \geq 0$

335. $3x^3 + 5x^2 - 4x - 4 \leq 0$

336. $\dfrac{x-1}{x+3} < 0$

337. $\dfrac{x^2-x}{x-5} \geq 0$

338. $\dfrac{x+3}{x-4} \leq 1$

339. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1} > 0$

Soluciones:

(219) $a = -18$
(220) $n = \frac{1}{12}$
(221) $m = -\frac{49}{4}$
(222) $m = 4$
(223) $a = 6$
(224) $n = 185$
(225) $m = 90$
(226) $n = -\frac{9}{16}$
(227) $(x-1)(x-3)$
(228) $2(x+1)(x-2)$
(229) $3(x+1)(x+2)$
(230) $5(x-1)(x+3)$
(231) $(x-1)(x-2)(x-3)$
(232) $x+1(x-2)(x+3)$
(233) $(x-1)(x+2)(3x+2)$
(234) $2(x-1)(x+1)(x+2)$
(235) $x(x-1)(x+1)^2$
(236) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

(237) $(x+2)(x-2)(2x+1)(2x-1)$

(238) $(x+1)(x-2)(x-3)$

(239) $(x-1)(x-2)(x+2)(x-3)$

(240) $\frac{x-1}{x+3}$

(241) $\frac{x+1}{x+2}$

(242) $\frac{x^2}{x^2+1}$

(243) $c=-76$

(244) $c=120, x=15$

(245) $m=8$

(246) $c=1152$

(247) $b=\pm 10$

(248) $c>64$

(249) $c \in (-4,4)$

(250) $m=25$ y $m=9$, $m=1$

(251) $m=-1$, $m=2$

(252) $m=-\frac{2}{7}$, $m=1$

(253) $b=33$, $b=-33$

(254) $x=-1$

(255) $x=-\frac{1029}{239}$

(256) $x=-5$

(257) $x=-3$

(258) $x=1$

(259) $x=5$

(260) $x=\frac{3}{5}$

(261) $x=9$

(262) $x=-3$, $x=3$

(263) $x=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{3}{2}$

(264) $x=0$, $x=25$

(265) $x=0$, $x=\frac{3}{5}$

(266) $x=0$, $x=\frac{2}{3}$

(267) $x=1$, $x=2$

(268) $x=\frac{4}{5}$, $x=-2$

(269) $x=-1$, $x=-7$

(270) $x=1$, $x=\frac{2}{3}$

(271) $x=6$, $x=-4$

(272) $x=2$, $x=-3$

(273) $x=1$

(274) $x=-3$, $x=2$

(275) $x=0$

(276) $x=-\frac{8}{3}$, $x=-\frac{1}{3}$

(277) $x=-2$, $x=2$, $x=-3$, $x=3$

(278) $x=\sqrt{4+\sqrt{7}}$, $x=-\sqrt{4+\sqrt{7}}$, $x=\sqrt{4-\sqrt{7}}$, $x=-\sqrt{4-\sqrt{7}}$

(279) $x=-1$, $x=1$, $x=-5$, $x=5$

(280) $x=-3$, $x=3$, $x=-4$, $x=4$

(281) $x=-2$, $x=2$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$

(282) $x=-1$, $x=1$, $x=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{3}{2}$

(283) $x=-\frac{2}{3}$, $x=\frac{2}{3}$

(284) no tiene solución

(285) $x=-\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{3}$, $x=-\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{4}$

(286) $x=-\sqrt{5}$, $x=\sqrt{5}$, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$

(287) $x = -\frac{1}{2}$
(288) $x = 0$
(289) $x = 1$
(290) no tiene solución
(291) $x = 1$
(292) no tiene solución
(293) $x = 34$
(294) $x = \frac{177}{4}$
(295) $x = 64$
(296) $x = 6$
(297) $x = 2$
(298) no tiene solución
(299) $x = 1$
(300) $x = \frac{9}{4}$
(301) $x = 10$
(302) $x = -1$, $x = 0$, $x = 4$
(303) $x = -2$, $x = 0$, $x = 5$
(304) $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$
(305) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$, $x = 2$
(306) $x = -3$, $x = -1$, $x = \frac{1}{5}$
(307) $x = -4$, $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{4}$
(308) $x = -\frac{4}{3}$, $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$, $x = 2$
(309) $x = -2$, $x = -\frac{1}{5}$, $x = \frac{3}{4}$, $x = 5$
(310) $(10, 7)$, $(10, -7)$
(311) $(7, 4)$, $(-7, -4)$
(312) $(4, 1)$, $(2, 3)$
(313) $(-7, 5)$, $(7, 5)$, $(-7, -5)$, $(7, -5)$
(314) $(-9, \frac{1}{2})$, $(5, 4)$
(315) $(-9, -4)$, $(4, 9)$, $(-4, -9)$, $(9, 4)$
(316) $(\frac{1}{3}, 3)$, $(\frac{1}{2}, 4)$
(317) $(\frac{27}{2}, \frac{3}{2})$, $(5, 10)$
(318) $(\frac{21}{5}, \frac{16}{5})$, $(3, 4)$
(319) $(7, 1)$, $(1, 7)$, $(-1, -7)$, $(-7, -1)$
(320) $(5, 4)$, $(4, 5)$, $\left(\frac{-9+\sqrt{161}}{2}, \frac{-9-\sqrt{161}}{2}\right), \left(\frac{-9-\sqrt{161}}{2}, \frac{-9+\sqrt{161}}{2}\right)$
(321) $(-\frac{9}{4}, \frac{1}{4})$, $(3, 2)$
(322) $(-\infty, \frac{1}{27})$
(323) $(-\infty, 12)$
(324) $\left(-\infty, \frac{62}{21}\right]$
(325) $[15, \infty)$
(326) $(1, 4)$
(327) $(-1, 1)$
(328) $[-1, 5]$
(329) $[-3, 4]$
(330) no hay solución
(331) $(-\infty, \infty)$
(332) $(-\infty, 1) \cup (2, 3)$
(333) $(-3, -1) \cup (2, \infty)$
(334) $[-2, \infty]$
(335) $[-2, -\frac{2}{3}] \cup [1, \infty)$
(336) $(-3, 1]$
(337) $[0, 1] \cup (5, \infty)$
(338) $(-\infty, 4)$
(339) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

7. Trigonometría

340. Calcular cuánto mide en grados, minutos y segundos un ángulo de un radián.

341. Completar la siguiente tabla:

φ	$\operatorname{sen}\varphi$	$\cos\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{cotg}\varphi$	$\sec\varphi$	$\operatorname{cosec}\varphi$
30º						
45º						
60º						

342. Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo conocidos dos de sus lados:

   a) $b = 3$, $c = 4$
   b) $b = 5$, $c = 12$
   c) $b = 7$, $a = 25$
   d) $c = 8$, $a = 17$

343. Calcular las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo dados un ángulo y un lado:

   a) $b = 5$, $C = 40^o$
   b) $b = 3$, $B = 10^o$
   c) $c = 8{,}21$, $B = 26^o31'$
   d) $a = 7$, $B = 64^o17'$

344. Calcular los elementos de un triángulo isósceles conocido:

   a) La base 5 m y el ángulo opuesto $43^o16'$
   b) La base 10,5 m y la altura 9,5 m
   c) El lado 45,6 m y un ángulo en la base $38^o42'$

345. Calcular el área de un trapecio isósceles cuya base menor es de 14 m; cuyos lados miden 5,3 m y el ángulo de éstos con la base menor es de $135^o28'$

346. Calcular la apotema, el lado y el área de un heptágono regular inscrito en una circunferencia de 3 m de radio.

347. Calcular el radio, la apotema y el área de un octógono regular de 1 m de lado.

348. Calcular el área del sector y del segmento circular menor correspondientes a una cuerda de un metro en un círculo de radio 0,75 m.

349. Una pirámide regular cuadrada tiene 3 m de arista básica y 6 m de arista lateral. Calcular: (*a*) la altura (*b*) la apotema (*c*) el volumen (*d*) la superficie total

350. Un cono tiene un ángulo en el vértice de 40º y una altura de 20 cm. Calcular: (*a*) el radio de la base (*b*) la generatriz (*c*) la superficie lateral y total (*d*) el volumen

351. Demostrar que el área lateral de un cono es igual al área de la base dividida por el coseno del ángulo que la generatriz forma con dicha base.

352. Resolver los triángulos dados por los siguientes elementos:

   a) $a = 32{,}45$ m, $A = 64^o6'$, $B = 48^o58'$
   b) $c = 34{,}69$ m, $A = 19^o19'$, $B = 20^o20'$
   c) $b = 50{,}01$ cm, $c = 66{,}60$ cm, $C = 57^o21'$

d) $a = 963{,}8$ m, $b = 1266$ m, $A = 18^o45'$

353. Desde dos puntos en línea recta con el pie de una torre se ve el extremo de ésta con ángulos de inclinación de $36^o30'$ y $23^o15'$. Si la distancia entre estos dos puntos es de 35 m hallar la altura de la torre.

354. Desde un aeroplano volando e línea recta entre dos puntos A y B que distan entre sí 3250 m, se ven dichos puntos con ángulos de depresión de $48^o20'$ y $37^o40'$ respectivamente. Calcular las distancias del aeroplano a cada punto y la altura de vuelo.

355. Resolver los triángulos dados por los siguientes elementos:

a) $b = 60$ cm, $c = 153$ cm, $A = 11^o59'$

b) $a = 15$ cm, $b = 20$ cm, $C = 63^o20'$

356. Calcular la resultante de dos fuerzas de 120 y 215 kg que forman entre sí un ángulo de $143^o30'$.

357. Un aeroplano parte de un lugar a las nueve de la mañana, a una velocidad de 250 km/h y rumbo NE. Otro parte del mismo lugar media hora después con velocidad de 300 km/h y rumbo SSO. ¿A qué distancia se hallan a las diez?.

358. Resolver los triángulos dados por los siguientes elementos:

a) $a = 291$ m, $b = 353$ m, $c = 264$ m

b) $a = 1235$ m, $b = 307$ m, $c = 1500$ m

359. Dos fuerzas de 14,5 y 23,1 newtons dan una resultante de 10,4 newtons. ¿Qué ángulos forman entre sí las dos fuerzas?

360. A cierta hora, cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50^o con la horizontal, la longitud de la sombra de un árbol es de 25 m. ¿Cuál es la altura del árbol?

361. Se observa una montaña desde una llanura. Desde un cierto punto se ve la cima con un ángulo de 45^o con la horizontal y alejándose 750 m, el ángulo es de 30^o. Calcular la altura de la montaña sobre la llanura.

362. Para medir la altura de una nube se han hecho simultáneamente dos observaciones desde los puntos A y B distantes 1 km entre sí. La inclinación de la visual desde A es $47^o15'$. Los ángulos que las proyecciones de las visuales desde A y B forman con la recta AB son, respectivamente, $38^o14'$ y $53^o20'$. Hallar la altura de la nube.

363. Calcular el ángulo que forma la diagonal de un cubo con las aristas contiguas.

364. Calcular el ángulo que forman dos caras de un tetraedro regular

365. Lo mismo, dos caras contiguas de un octaedro regular.

366. Completar el siguiente cuadro:

	30^o	45^o	60^o	0^o	90^o	180^o	270^o	360^o	-30^o	-45^o	-60^o
CUADRANTE											
SENO											
COSENO											
TANGENTE											

367. Completar:

	120º	135º	150º	210º	225º	240º	300º	315º	330º	−90º
CUADRANTE										
SENO										
COSENO										
TANGENTE										

368. Sin utilizar la calculadora, obtener todos los valores de x que cumplen que:

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ *b*) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *c*) $\operatorname{tg} x = 1$ *d*) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

e) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *f*) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *g*) $\cos x = \frac{1}{2}$ *h*) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

i) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ *j*) $\cos x = -\frac{1}{2}$ *k*) $\operatorname{tg} x = -1$ *l*) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$

m) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *n*) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *ñ*) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ *o*) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

p) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *q*) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

369. Obtener todos los valores de x que cumplen que:

a) $\operatorname{sen} x = 1$ *b*) $\cos x = 1$ *c*) $\operatorname{sen} x = 0$ *d*) $\cos x = 0$

e) $\operatorname{sen} x = -1$ *f*) $\cos x = -1$ *g*) $\operatorname{tg} x = 0$ *h*) $\operatorname{cotg} x = 0$

370. Con ayuda de la calculadora obtener todos los valores de x que cumplen:

a) $\operatorname{sen} x = 0{,}2326$ *b*) $\cos x = 0{,}5188$ *c*) $\operatorname{tg} x = 2{,}4637$ *d*) $\cos x = -0{,}3078$

e) $\operatorname{tg} x = -1{,}9365$ *f*) $\operatorname{sen} x = -0{,}3227$ *g*) $\sec x = 7{,}4512$ *h*) $\operatorname{cotg} = 2{,}8981$

371. Sabiendo que $\operatorname{sen} \varphi = 0{,}7375$ y que φ es un ángulo del segundo cuadrante, obtener $\cos \varphi$ y $\operatorname{tg} \varphi$:
   a) Calculando previamente el ángulo φ con ayuda de la calculadora.
   b) Sin necesidad de obtener previamente φ.

372. Sabiendo que $\cos x = 3/5$ y x es un ángulo del cuarto cuadrante, obtener $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{tg} x$:
   a) Calculando previamente el ángulo x con ayuda de la calculadora.
   b) Sin necesidad de obtener previamente x.

373. Sabiendo que $\operatorname{tg} x = -3$ y x es un ángulo del segundo cuadrante, obtener $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$:
   a) Calculando previamente el ángulo x con ayuda de la calculadora.
   b) Sin necesidad de obtener previamente x.

374. Utilizando los teoremas de adición, obtener sin calculadora los valores de seno, coseno y tangente de *a*) 15º *b*) 75º *c*) 105º *d*) 22º30′.

375. Obtener todos los valores del ángulo x que cumplen que:

a) $\operatorname{sen} 2x = \frac{-1}{2}$ b) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}$ d) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

376. Demostrar que la suma $a \operatorname{sen} x + b \cos x$ puede escribirse en la forma:

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = A \operatorname{sen}(x + \varphi)$$

y obtener los valores de A y φ en función de a y b. Aplicar el resultado obtenido para resolver la ecuación $3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x = 2$

377. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} x + \cos^2 x = \frac{5}{4}$ b) $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{5}{4}$

c) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$ d) $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$

378. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x = 0$ b) $\cos 2x = 2 \operatorname{sen} x$

c) $3 \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x - 2 = 0$ d) $2 + \cos x \operatorname{sen} x = 8 \operatorname{sen}^2 x$

379. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3 \cos 2x - 7 \cos x - 2 = 0$ b) $2 \operatorname{sen} 2x = \operatorname{tg} x$

c) $\operatorname{cosec}^2 x = 3 \operatorname{cotg} x - 1$ d) $\operatorname{cotg} x + 3 \operatorname{cotg} 2x - 1 = 0$

380. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3 \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{sen} x = 0$ b) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$

c) $\sec^2 x = 4 \operatorname{tg} x$ d) $3 \sec^2 x + 1 = 8 \operatorname{tg} x$

381. Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \alpha$ b) $\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{sen} 2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha} = 1 + \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha$ d) $\dfrac{1 - \operatorname{sen} 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$

382. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$ b) $\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \operatorname{cotg} \alpha$

c) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ d) $\cos^4 \alpha = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2} \cos 2\alpha + \dfrac{1}{8} \cos 4\alpha$

383. Resolver la siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$ b) $\operatorname{sen} x \cos x = 0$

c) $(\operatorname{tg} x - 1)(2 \operatorname{sen} x + 1) = 0$ d) $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$

384. Resolver las ecuaciones:

a) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$ b) $\cos x + \cos 2x = 0$

c) $2\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x = 0$

d) $2\cos x + \sec x = 3$

385. Resolver la siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $2\operatorname{sen} x + \operatorname{cosec} x = 3$

b) $\operatorname{sen} x + 1 = \cos x$

c) $\sec x - 1 = \operatorname{tg} x$

d) $2\cos x + 3\operatorname{sen} x = 2$

386. Resolver las ecuaciones:

a) $3\operatorname{sen} x + 5\cos x + 5 = 0$

b) $1 + \operatorname{sen} x = 2\cos x$

c) $3\operatorname{sen} x + 4\cos x = 1$

d) $\operatorname{sen} 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

387. Resolver la siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{tg} 3x = 1$

b) $\dfrac{\cos x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{\operatorname{cotg} x}{3} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\operatorname{sen} x \cos x = \dfrac{1}{2}$

388. Resolver las ecuaciones:

a) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{2} + \cos x = 1$

b) $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x = 0$

c) $\cos 2x + \cos 3x = 0$

d) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x = 2\operatorname{sen} 3x$

389. Resolver las ecuaciones:

a) $\cos 5x + \cos x = 2\cos 2x$

b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = \cos x + \cos 3x$

390. Desde la parte más alta de un edificio de 114 m de altura se ven las orillas de un río bajo ángulos de 75° y 19° respectivamente. Calcular la anchura del río.

391. El desarrollo plano de un cono es un sector circular de 15 cm de radio y ángulo φ. Calcular φ sabiendo que el ángulo que forma la generatriz del cono con la base mide 1,23 radianes.

392. Demostrar la identidad:

$$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 B$$

393. Demostrar las identidades:

$$\frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos A \cos B} = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B\ ; \qquad (\operatorname{sen} A + \cos A)(\operatorname{sen} B + \cos B) = \operatorname{sen}(A+B) + \cos(A-B)$$

394. *a*) Demostrar que:

$$\operatorname{artg}\left(\frac{1}{4}\right) + \operatorname{artg}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{\pi}{4}$$

b) De aquí, (o de otra manera) encontrar el valor de $\operatorname{artg}(4) + \operatorname{artg}\left(\frac{5}{3}\right)$.

395. Demostrar que $\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$.

396. Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ y $\cos\beta = \frac{7}{25}$, calcular los posibles valores de $\cos(\alpha+\beta)$.

397. La duración de los días en Wellington (Nueva Zelanda) varía entre un mínimo de 9,18 horas el 21 de junio y un máximo de 15,13 horas el 21 de diciembre. Suponiendo que la duración de los días sigue una función de la forma $f(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) + y_0$ calcular los valores de A, ω, φ e y_0. Mediante la función obtenida, calcular la duración del día 21 de marzo (80º día del año).

398. La tensión V de un generador de corriente alterna está dado por la función:

$$V(t) = 220\,\mathrm{sen}(100\pi t)$$

   a) Calcular los valores máximo y mínimo de la tensión. (Solución: 220 y -220)
   b) Calcular la amplitud de la función V. (Solución: 220)
   c) Calcular el período de la función V. (Solución: 1/50)
   d) Esbozar el gráfico de la función V sobre dos períodos comenzando en $t = 0$.

399. La altura de las mareas puede ser representada por una función del tipo:

$$h(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) + h_0$$

En la localidad de Blue Harbor en Sunny Island el tiempo transcurrido entre dos mareas altas es de 12 horas. La altura del agua durante la marea alta es 14,4 m y durante la marea baja es de 1,2 m.

En un día particular, la primera marea alta ocurre a las 8.15.

   a) Con esta información calcular los valores de A, ω, φ y h_0.
   b) Dibujar el gráfico de la función y obtener la hora de la primera marea baja.
   c) A un barco, solamente se le permite entrar en el puerto cuando cuando la altura del agua es al menos de 5 m. Calcular el intervalo de tiempo en el que un barco puede entrar o salir del puerto.

400. Escribir $\mathrm{sen}(\,\mathrm{arsen}\,a + \,\mathrm{arcos}\,b)$ en términos de a y b.

401. Calcular $\mathrm{sen}\left(\,\mathrm{artg}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cos\left(\,\mathrm{arsen}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

402. Demostrar que:

   a) $\mathrm{tg}\,(\,\mathrm{arsen}\,a) = \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$.
   b) $\cos\,(\,\mathrm{arsen}\,a + \,\mathrm{arcos}\,a) = 0$.
   c) $\mathrm{tg}\,(\,\mathrm{arcos}\,a) = \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

403. Resolver la ecuación $e^{\frac{x}{2}}\cos 2x = e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{sen}\,x$ para $0 \le x \le 2\pi$.

404. Suponiendo que $3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - \dfrac{14}{\cos\alpha} + 18 = 0$, calcular los posibles valores de $\sec\alpha$.

405. Resolver la ecuación $\mathrm{cosec}\,x + \mathrm{sen}\,x = 2$ para $-\pi \le x \le \pi$.

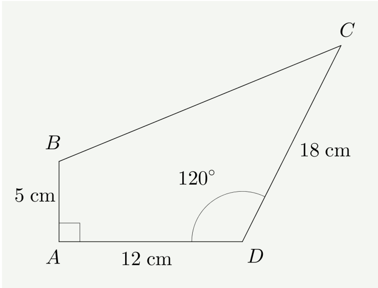
406. Sabiendo que

$$\frac{\mathrm{sen}\,x - 3\cos x}{\mathrm{sen}\,x - \cos x} = 7$$

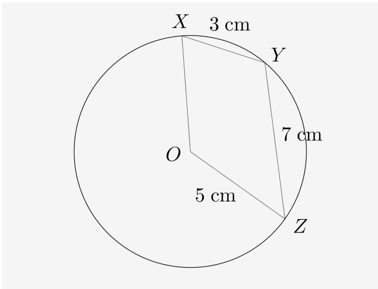
calcular el valor de $\mathrm{tg}\,x$. De aquí, calcular los valores de $\mathrm{tg}\,2x$ y $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$.

407. Con ayuda de la calculadora, obtener todas las soluciones de la ecuación $-5x^2\cos 8x = \mathrm{tg}\,x$ en el intervalo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

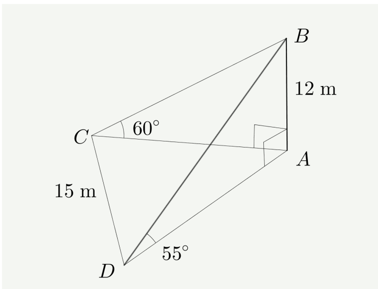
408. Calcular el área del cuadrilátero $ABCD$:



409. La figura muestra dos cuerdas XY e YZ sobre una circunferencia con centro O y radio 5 cm. Dados $XY = 3$ cm $YZ = 7$ cm, calcular el área del cuadrilátero $OXYZ$.

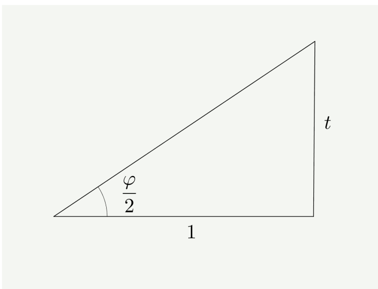


410. La figura muestra un mástil AB de longitud igual a 12 m. Los puntos C y D están sobre el suelo de tal forma que el ángulo de elevación de C a B es de 60º y el ángulo de elevación de D a B es de 55º. Sabiendo que la distancia entre C y D es de 15 m, calcular el ángulo CAD y el área del triángulo CAD.



411. Utilizar el triángulo de la figura para demostrar que si $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$, entonces

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \text{y} \qquad \cos \varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$



Con ayuda de este resultado, resolver la ecuación:

$$\sqrt{3} \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi = 1, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

412. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}$

b) $\dfrac{\cos(A-B)}{\cos A\cos B}=1+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B$

c) $\cos 3\alpha-\operatorname{sen}3\alpha=(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)(1-4\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)$

d) $2\operatorname{sen}2\alpha(1-2\operatorname{sen}^2\alpha)=\operatorname{sen}4\alpha$

e) $1+2\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=4\cos^2\alpha\cos 2\alpha$

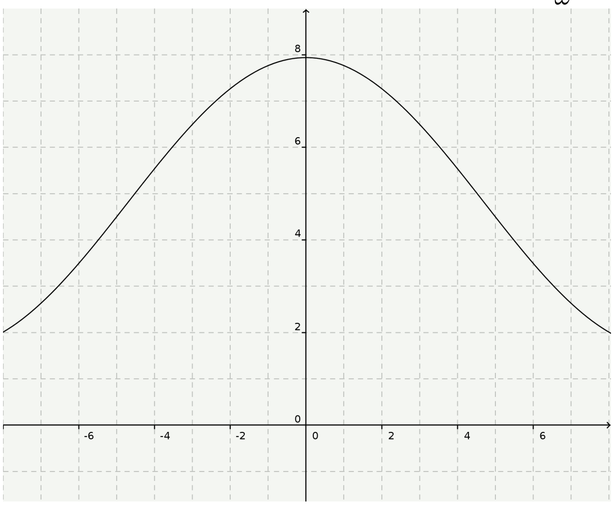
413. Calcular los siguientes números:

a) $\cos\left(\operatorname{arsen}\dfrac{3}{5}-\operatorname{arcos}\dfrac{1}{2}\right)$

b) $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arcos}\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right)$

c) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{artg}(-1)+\operatorname{arcos}\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right)$

414. La figura muestra la gráfica de la función $f(x)=A\cos\omega x+C$ para $-\dfrac{\pi}{\omega}\leq x\leq\dfrac{\pi}{\omega}$.



Sobre los mismos ejes dibujar la gráfica de:

$$g(x)=-\frac{A}{2}\cos(2\omega x)+C$$

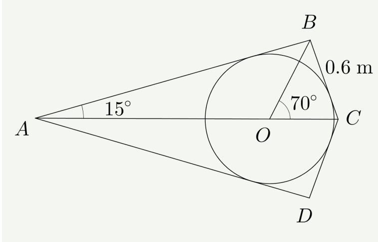
415. Suponiendo que $\operatorname{arsen}x$, $\operatorname{arcos}x$ y $\operatorname{arsen}(1-x)$ son ángulos agudos, demostrar que:

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arsen}x-\operatorname{arcos}x)=\operatorname{arsen}(1-x)\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1)$$

416. Usar la identidad $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ para demostrar que

$$2x+y=\frac{\pi}{4}\quad\Longrightarrow\quad\operatorname{tg}y=\frac{1-2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x}{1+2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x}$$

417. La figura muestra una circunferencia centrada en O inscrita en una cometa:



a) Calcular el ángulo ABC.

b) Calcular la longitud de AB.

c) Calcular el radio de la circunferencia.

Soluciones:

(340) $57^o17'41''$

(341) ∗

(342) (a) $B = 36^o52'12''$, $C = 53^o7'48''$ (b) $B = 22^o37'12'', C = 67^o22'48''$ (c) $B = 16^o15'37''$, $C = 73^o44'23''$ (d) $B = 61^o55'39''$, $C = 28^o4'21''$

(343) (a) $a = 6{,}53$ cm, $c = 4{,}20$ cm (b) $a = 17{,}28$ cm, $c = 17{,}02$ cm (c) $a = 9{,}18$ cm, $b = 4{,}10$ cm (d) $b = 6{,}31$ cm, $c = 3{,}04$ cm

(344) (a) $60^o22'$, 6,78 m, 6,30 m (b) $61^o4'25''$, 10,85 m, $57^o51'10''$ (c) $102^o36'$, 28,51 m, 71,18 m

(345) 42,04 m^2

(346) $a = 2{,}70$ m, $l = 2{,}60$ m, $S = 24{,}63$ m^2

(347) $r = 1{,}31$ m, $a = 1{,}21$ m, $S = 4{,}83$ m^2

(348) $S = 4104{,}72$ cm^2, $S' = 1309{,}63$ cm^2

(349) (a) $h = 5{,}29$ cm (b) $a = 5{,}66$ cm (c) $V = 28{,}22$ cm^3 (d) $S = 61{,}25$ cm^2

(350) (a) $r = 7{,}28$ cm (b) $g = 21{,}28$ cm (c) $S = 486{,}73$ cm^2 (d) $V = 1109{,}81$ cm^3

(351) ∗

(352) (a) $C = 66^o56'$, $b = 27{,}21$ cm, 33,19 cm (b) $C = 140^o21'$, $b = 18{,}89$ cm, $a = 17{,}98$ cm (c) $B = 39^o12'57''$, $A = 83^o26'3''$, $a = 78{,}58$ cm (d) dos soluciones: $B_1 = 24^o58'31''$, $C_1 = 136^o16'29''$, $c_1 = 2072{,}48$ cm, $B_2 = 155^o1'29''$, $C_2 = 6^o13'31''$, $c_2 = 325{,}14$ cm

(353) 35,86 m

(354) $h = 8015$ m, $l_1 = 10729$ m, $l_2 = 13117$ m

(355) (a) $a = 95{,}13$ cm, $B = 7^o31'30''$, $C = 63^o20'$ (b) $c = 18{,}86$ cm, $B = 71^o22'25''$, $A = 45^o17'35''$

(356) 138,37 newtons

(357) 392,80 km

(358) (a) $A = 53^o58'24''$, $B = 78^o49'44''$, $C = 47^o11'52''$ (b) $A = 27^o13'3''$, $B = 6^o31'42''$, $C = 146^o15'15''$

(359) $161^o36'47''$

(360) 29,79 m

(361) 1024,52 m

(362) 868,06 m

(363) $70^o31'44''$

(364) $70^o31'44''$

(365) $70^o31'44''$

(366) ∗

(367) ∗

(368) (a) 30^o, 150^o (b) 45^o, 315^o (c) 45^o, 225^o (d) 60^o, 240^o (e) 30^o, 330^o (f) 45^o, 135^o (g) 60^o, 300^o (h) 60^o, 120^o (i) 30^o, 210^o (j) 120^o, 240^o (k) 135^o, 315^o (l) 210^o, 330^o (m) 225^o, 315^o (n) 135^o, 225^o $(ñ)$ 150^o, 330^o (o) 120^o, 300^o (p) 150^o, 210^o (q) 30^o, 150^o

(369) (a) 90^o (b) 0^o (c) 0^o, 180^o (d) 90^o, 270^o (e) 270^o (f) 180^o (g) 0^o, 180^o (h) 90^o, 270^o

(370) (a) $13^o27'1''$. $166^o32'59''$ (b) $58^o44'54''$, $301^o15'6''$ (c) $67^o54'29''$, $247^o54'29''$ (d) $107^o55'36''$, $252^o4'24''$ (e) $117^o18'42''$, $297^o18'42''$ (f) $198^o49'35''$, $341^o10'25''$ (g) $82^o17'14''$, $277^o42'46''$ (h) $19^o2'14''$, $199^o2'14''$

(371) $x = 132^o28'52''$, $\cos x = -0{,}6753$, $\mathrm{tg}\, x = -1{,}0920$

(372) $x = 306^o52'11''$, $\mathrm{sen}\, x = -\frac{4}{5}$, $\mathrm{tg}\, x = -\frac{4}{3}$

(373) $x = 108^o26'6''$, $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{sen} x = \frac{3}{\sqrt{10}}$

(374) (a) $\operatorname{sen} 15^o = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg} 15^o = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ (b) $\operatorname{sen} 75^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 75^o = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg} 75^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ (c) $\operatorname{sen} 105^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 105^o = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $\operatorname{tg} 75^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$ (d) $\operatorname{sen} 22^o30' = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$, $\cos 22^o30' = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$, $\operatorname{tg} 22^o30' = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$

(375) (a) $x = 105^o \pm 180^oK$, $x = 165^o \pm 180^oK$ (b) $x = 22^o30'^o \pm 180^oK$, $x = 157^o30'^o \pm 180^oK$ (c) $x = 60^o \pm 180^oK$, $x = 150^o \pm 180^oK$ (d) $x = 50^o \pm 120^oK$, $x = 70^o \pm 120^oK$

(376) $x = 330^o26'53''$, $x = 103^o17'30''$

(377) (a) $x = 30^o$, $x = 150^o$ (b) $x = 72^o53'8''$, $17^o6'52''$ (c) $x = 135^o$, $x = 315^o$ (d) $x = 45^o$, $x = 225^o$

(378) (a) $x = 0$, $x = 120^o$, $x = 240^o$ (b) $x = 21^o28'15''$, $x = 158^o31'45''$, $x = 223^o4'46''$, $x = 316^o55'14''$ (c) $x = 19^o28'16''$, $x = 160^o31'44''$, $x = 270^o$ (d) $x = 33^o41'24''$, $x = 213^o41'24''$, $x = 153^o26'6''$, $X = 333^o26'6''$

(379) (a) $x = 120^o$, $x = 240^o$ (b) $x = 0^o$, $x = 180^o$, $x = 45^o$. $x = 225^o$, $x = 135^o$, $x = 225^o$ (c) $x = 45^o$, $x = 225^o$, $x = 26^o33'54''$, $x = 206^o33'54''$ (d) $x = 45^o$, $x = 225^o$, $x = 120^o57'50''$, $x = 300^o57'50''$

(380) (a) $x = 0^o$, $x = 180^o$, $x = 138^o35'25''$, $x = 221^o24'35''$ (b) $x = 0^o$, $x = {}^o80^o$, $x = 120^o$, $x = 240^o$ (c) $x = 73^o40'30''$, $x = 253^o40'30''$, $x = 30^o21'40''$, $x = 210^o21'40''$ (d) $x = 63^o26'6''$, $x = 243^o26'6''$, $x = 33^o41'24''$, $x = 213^o41'24''$

(381) $*$

(382) $*$

(383) (a) $x = 45^o$, $x = 315^o$, $x = 135^o$, $x = 225^o$ (b) $x = 0^o$, $x = 90^o$, $x = 180^o$, $x = 270^o$ (c) $x = 45^o$, $x = 225^o$, $x = 210^o$, $x = 330^o$ (d) $x = 90^o$, $x = 210^o$, $x = 330^o$

(384) (a) $x = 0^o$, $x = 180^o$, $x = 120^o$, $x = 240^o$ (b) $x = 60^o$, $x = 300^o$, $x = 180^o$ (c) $x = 0^o$, $x = 180^o$, $x = 30^o$, $x = 150^o$ (d) $x = 0^o$, $x = 60^o$, $x = 300^o$

(385) (a) $x = 90^o$, $x = 30^o$, $x = 150^o$ (b) $x = 0^o$, $x = 270^o$ (c) $x = 0^o$ (d) $x = 0^o$, $x = 67^o22'48''$

(386) (a) $x = 180^o$, $x = 241^o55'39''$ (b) $x = 270^o$, $x = 36^o52'12''$ (c) $x = 318^o24'24''$, $x = 115^o19'59''$ (d) $x = 120^o$, $x = 150^o$, $x = 300^o$, $x = 330^o$

(387) (a) $x = 15^o$, $x = 75^o$, $x = 135^o$, $x = 195^o$, $x = 255^o$, $x = 315^o$ (b) no tiene solución (c) $x = 150^o$, $x = 330^o$ (d) $x = 45^o$, $x = 225^o$

(388) (a) $x = 0^o$, $x = 53^o7'48''$ (b) $x = 0^o$, $x = 90^o$, $x = 180^o$, $x = 270^o$ (c) $x = 36^o$, $x = 108^o$, $x = 180^o$, $x = 252^o$, $x = 324^o$ (d) $x = 0^o$, $x = 60^o$, $x = 120^o$, $x = 180^o$, $x = 240^o$, $x = 300^o$

(389) (a) $x = 0^o$, $x = 45^o$, $x = 120^o$, $x = 135^o$, $x = 225^o$, $x = 240^o$, $x = 315^o$ (b) $x = 90^o$, $x = 270^o$, $x = 22^o30'$, $x = 112^o30'$, $x = 202^o30'$, $x = 292^o30'$

(390) 368 m

(391) 2,10 radianes

(392) $*$

(393) $*$

(394) $\frac{3\pi}{4}$

(395) $*$

(396) $\frac{4}{5}$, $-\frac{44}{125}$

(397) $A = 2{,}98$, $\omega = 0{,}0172$, $\varphi = -4{,}53$, $y_0 = 12{,}16$, $f(80) = 12{,}2$

(398) (a) 220 y -220 (b) 220 (c) $\frac{1}{50}$

(399) (a) $A = 6{,}6$, $\omega = \pi/6$, $\varphi = -2{,}75$, $h_0 = 7{,}80$ (b) 2h15m (c) (0h00m, 0h05m), (4h25m, 12h05m), (16h25m, 24h00m)

(400) $ab + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$

(401) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

(402) $*$

(403) 0,432, 2,68, 4,45, 5, 12

(404) $\frac{5}{3}$, 3

(405) $\frac{\pi}{2}$

(406) $\frac{2}{3}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

(407) 0, 0,294, 0,536, 1,02, 1, 32

(408) 146 cm^2

(409) 19,7 cm^2

(410) 156^o, 11,8 m^2

(411) 0, $\frac{2\pi}{3}$, 2π

(412) $*$

(413) (a) $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$ (b) $-\frac{24}{25}$ (c) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

(414) $*$

(415) $*$

(416) $*$

(417) (a) 110^o (b) 1,90 m (c) 0,428 m

8. Números complejos

418. Calcular:

a) $(3+2i)(2-i)-(1-i)(2-3i)$ *b*) $3+2i(-1+i)-(5-4i)$

c) $-2i-(4-i)5i$ *d*) $(4-3i)(4+3i)-(4-3i)^2$

419. Calcular en forma binómica:

a) $\dfrac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}$ *b*) $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}$

c) $\dfrac{2+5i}{3-2i}(1-i)$ *d*) $\dfrac{1+i}{2-i}+\dfrac{-3-2i}{1+3i}$

420. Calcular:

a) $(1-i)(4-2i)-2i(1+3i)$ *b*) $\dfrac{1+2i}{2-i}(2+i)+\dfrac{1-2i}{2+i}(2-i)$

c) $\dfrac{2-i}{3-i}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1+8i}{1+3i}\right)$ *d*) $\dfrac{(2+i)^2-(1-i)^2}{1-(3/2)i}$

e) $\dfrac{2-2i}{i}+\dfrac{3-5i}{2-i}$

421. Calcular: *a*) i^{37} *b*) i^{126} *c*) i^{87} *d*) i^{64} *e*) i^{-216}

422. Dado el número complejo:

$$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

probar que:

a) $1+z+z^2=0$

b) $\dfrac{1}{z}=z^2$

423. Calcular $m,n\in\mathbb{R}$ para que se verifique la igualdad:

$$(2+mi)+(n+5i)=7-2i$$

424. Determinar $k\in\mathbb{R}$ para que se verifique:

$$\frac{k+i}{1+i}=2-i$$

425. Calcular $a,b\in\mathbb{R}$ para que se cumpla:

$$(a+bi)^2=3+4i$$

426. Dados los complejos $2-ai$ y $3+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$, hallar a y b para que su producto sea igual a $8+4i$.

427. Calcular $a,b\in\mathbb{R}$ para que se cumpla:

$$a-3i=\frac{2+bi}{5-3i}$$

428. Hallar el valor de $b\in\mathbb{R}$ para que el producto $(3-6i)(4+bi)$ sea: *a*) Un número imaginario puro *b*) Un número real

429. Determinar $a\in\mathbb{R}$ para que $(a-2i)^2$ sea un número imaginario puro.

430. Calcular $x\in\mathbb{R}$ para que el producto $(x+2+ix)(x-i)$ sea un número real.

431. Expresar los siguientes números complejos en forma polar:

a) $1-i$ *b*) $-1+i$ *c*) $\sqrt{3}+i$ *d*) $-\sqrt{3}-i$

e) -4 *f*) $2i$ *g*) $-\frac{3}{4}i$ *h*) $2+2\sqrt{3}i$

432. Expresar en forma binómica:

a) $2_{45^{\circ}}$ *b*) $3_{\frac{\pi}{6}}$ *c*) $\sqrt{2}_{180^{\circ}}$ *d*) $17_{0^{\circ}}$

e) $1_{\frac{\pi}{2}}$ *f*) $5_{210^{\circ}}$ *g*) $1_{150^{\circ}}$ *h*) $4_{120^{\circ}}$

433. Expresar en forma polar:

a) $(-1-i)^5$ *b*) $\sqrt[4]{1-\sqrt{3}i}$ *c*) $\sqrt[6]{64}$

d) $\sqrt[3]{8i}$ *e*) $(-2\sqrt{3}+2i)^6$ *f*) $(3-4i)^3$

434. Calcular y representar gráficamente el resultado:

a) $\dfrac{i^7-i^{-7}}{2i}$ *b*) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$ *c*) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}}$

435. Calcular y representar las soluciones:

a) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}$ *b*) $\sqrt[4]{-16}$ *c*) $\sqrt[3]{8i}$

436. Calcular pasando previamente a la forma polar:

a) $(1+i\sqrt{3})^5$ *b*) $(-1-i\sqrt{3})^6(\sqrt{3}-i)$

c) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$ *d*) $\dfrac{8}{(1-i)^5}$

e) $\sqrt[6]{-64}$ *f*) $\sqrt{-1-i}$

g) $\sqrt[3]{-i}$ *h*) $\sqrt{\dfrac{2-2i}{-3+3i}}$

437. Calcular $m \in \mathbb{R}$ para que el número complejo $3-mi$ tenga el mismo módulo que $2\sqrt{5}+\sqrt{5}i$.

438. Hallar dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\frac{\pi}{3}$ y la suma de sus módulos 8.

439. El producto de dos números complejos es $2i$ y uno de ellos es el doble del cubo del otro. Calcularlos.

440. El producto de dos números complejos es -8 y uno de ellos es el cuadrado del otro. Calcularlos.

441. Demostrar que el módulo de

$$z = \frac{1+xi}{1-xi}; \qquad x \in \mathbb{R}$$

es igual a 1.

442. La suma de dos números complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10. ¿Cuáles son esos números?

443. Calcular el lado del triángulo equilátero que tiene como vértices los afijos de las raíces cúbicas de $-2-2i$.

444. La ecuación $z^3-2z^2+4z-8=0$ se verifica para $z=2$, hallar las otras raíces.

445. Resolver: $(z+i)^4-(z-i)^4=0$.

446. Un triángulo tiene por vértices los afijos de las raíces de la ecuación $z^3-3z^2+4z-12=0$. Hallar las coordenadas de los citados vértices.

447. Calcular el área del triángulo, cuyos vértices son los afijos de $\sqrt[3]{-64}$.

448. Hallar el área del cuadrilátero, cuyos vértices son los afijos de las raíces de la ecuación $z^4+4=0$.

449. Calcular el área del hexágono cuyos vértices son los afijos de las raíces sextas de -64.

450. Calcular $\sqrt[4]{1}$ y $\sqrt[4]{-1}$. Al efectuar la representación gráfica resulta una estrella de ocho puntas. Determinar su área.

451. La suma de dos complejos es $3+2i$ y la parte real del segundo es 2. Hallar dichos números, sabiendo que el cociente del primero por el segundo es imaginario puro.

452. Hallar dos complejos, sabiendo que su suma vale 3 y su cociente es i.

453. Hallar dos números complejos, cuya suma sea $1+4i$ y cuyo cociente sea i.

454. Hallar dos complejos sabiendo que su suma es real y vale 5, su cociente es imaginario puro y el módulo del dividendo es doble del módulo del divisor.

455. La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es $\sqrt{13}$, y el del segundo 5. Hallar estos complejos y determinar su producto y su cociente.

456. Hallar dos complejos conjugados tales, que el triángulo que forman sus afijos con el origen sea equilátero y su área valga $2\sqrt{3}$.

457. El número $\frac{1}{4}(-1+i\sqrt{3})$ es una raíz quinta de un número complejo z. Sin calcular z, obtener las demás raíces quintas.

458. Calcular las cuatro raíces cuartas de -81. Resolver la ecuación $(z-3)^4+81=0$.

459. Calcular la suma de la serie:

$$1+\frac{1}{3}e^{2i\varphi}+\frac{1}{9}e^{4i\varphi}+\frac{1}{27}e^{6i\varphi}+\dots$$

460. Sea $z=e^{i\varphi}$:

   a) Mediante la fórmula de Moivre demostrar que $z^n+\left(\frac{1}{z}\right)^n=2\cos(n\varphi)$

   b) Desarrollar $\left(z+\frac{1}{z}\right)^4$. A partir del desarrollo demostrar que:

$$\cos^4\varphi=\frac{1}{8}\left(\cos 4\varphi+4\cos 2\varphi+3\right)$$

461. Sea el complejo $z=1_{20^{\circ}}$ y $x+yi$ su forma binómica.

   a) Desarrollar la potencia $(x+yi)^3$.
   A partir del resultado anterior demostrar que $\dfrac{3x^2y-y^3}{x^3-3xy^2}=\sqrt{3}$.

   b) Demostrar que $\operatorname{tg}40^{\circ}\operatorname{tg}80^{\circ}=\dfrac{3-\operatorname{tg}^2 20^{\circ}}{1-3\operatorname{tg}^2 20^{\circ}}$.

   c) De los apartados anteriores deducir que $\operatorname{tg}20^{\circ}\operatorname{tg}40^{\circ}\operatorname{tg}80^{\circ}=\sqrt{3}$.

462. Sea $z=e^{i\varphi}$:

   a) Mediante la fórmula de Moivre, demostrar que $z^n-\left(\frac{1}{z}\right)^n=2i\operatorname{sen}(n\varphi)$.

   b) A partir del desarrollo la potencia $\left(z-\frac{1}{z}\right)^5$, demostrar que:

$$16\operatorname{sen}^5\varphi=\operatorname{sen}5\varphi-5\operatorname{sen}3\varphi+10\operatorname{sen}\varphi$$

463. A partir de la fórmula de Moivre:

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5\operatorname{tg}\varphi - 10\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{tg}^5\varphi}{1 - 10\operatorname{tg}^2\varphi + 5\operatorname{tg}^4\varphi}$$

Demostrar que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

464. A partir de la fórmula de Moivre demostrar que:

$$\cos 7\alpha = 64\cos^7\alpha - 112\cos^5\alpha + 56\cos^3\alpha - 7\cos\alpha$$

Con ayuda del resultado anterior resolver la ecuación:

$$64\cos^7 x - 112\cos^5 x + 56\cos^3 x - 7\cos x = 1; \qquad 0 \le x < 2\pi$$

465. Sea $z = \cos^2\varphi + \dfrac{\operatorname{sen} 2\varphi}{2} i$, donde $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

a) Demostrar que $|z| = \cos\varphi$ y $\arg z = \varphi$.

b) Escribir z^2 en forma polar.

c) Encontrar los valores exactos de z para los que $|2z^2| = |z|$.

466. Considérese el complejo $w = \dfrac{z+i}{z+2}$, donde $z = x + yi$:

a) Probar que $\operatorname{Re} w = \dfrac{x^2 + 2x + y^2 + y}{(x+2)^2 + y^2}$ e $\operatorname{Im} w = \dfrac{x + 2y + 2}{(x+2)^2 + y^2}$.

b) A partir del resultado anterior demostrar que:

1) Si $\operatorname{Re} w = 1$ los puntos (x, y) se encuentran en una recta r_1. Calcular la pendiente de r_1.

2) Si $\operatorname{Im} w = 0$ los puntos (x, y) se encuentran en una recta r_2 perpendicular a r_1.

c) Si $\arg(z) = \arg(w) = \frac{\pi}{4}$, calcular $|z|$.

467. Considérese el complejo $z = re^{i\varphi}$:

a) Demostrar por inducción que $(z^n)^* = (z^*)^n; \quad n \in \mathbb{Z}^+$.

b) Demostrar el mismo resultado a partir de la fórmula de Moivre. ¿Para qué valores de n es válida la demostración?

468. Sean 1, ω y ω^* las raíces cúbicas de la unidad.

a) Demostrar que $\dfrac{1}{1+\omega} = -\omega$ y $\dfrac{1}{1+\omega^*} = -\omega^*$.

b) Determinar los valores de los números reales a, b y c tales que 1, $\frac{1}{1+\omega}$ y $\frac{1}{1+\omega^*}$ son ceros del polinomio $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$.

c) Calcular $p(\omega)$ y $p(\omega^*)$.

469. Sean ω_1 y ω_2 dos raíces sextas consecutivas de la unidad.

a) Demostrar que $\frac{1}{\omega_1}$ y $\frac{1}{\omega_2}$ son también raíces sextas consecutivas d e la unidad.

b) Demostrar que ω_1, ω_2 y sus opuestas definen un rectángulo y calcular su área.

470. Obtener los valores de $n \in \mathbb{Z}$ para los que $(\sqrt{3} - i)^n$ es un número real.

471. Sea $f(z) = \ln|z| + i\arg z, \quad \arg z \in (-\pi, \pi]$:

a) Calcular $f(i)$, $f(-i)$, $f(1+i)$ y $f(1-i)$.

b) Demostrar que $f(z^*) = (f(z))^*$ y que si $f(z) = f(z^*)$, z es un número real.

c) Encontrar los valores de z para los que $f(z)$ es (i) imaginario puro (ii) real negativo (iii) cero.

472. Los números $\dfrac{1-i}{4}$ y $a+ai$ son raíces enésimas consecutivas de un complejo z.

   a) Encontrar los valores posibles de a y de n.

   b) Calcular las restantes raíces de z.

473. Sea ω una de las raíces cúbicas de la unidad ($\omega \neq 1$). Demostrar que:

$$(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y) = x^3 + y^3; \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

474. Sea $z = -\sqrt{3} - i$.

   a) Calcular la raíz cúbica de z que se encuentra en el primer cuadrante.

   b) Encontrar el menor entero positivo n para el que z^n es un número real positivo.

475. De la fórmula de Moivre y del desarrollo de $(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^4$, deducir que:

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 6\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}$$

476. Sea $p(z)$ un polinomio con coeficientes reales. Demostrar que si z es una raíz del polinomio, z^* también lo es.

477. Sea $z + \dfrac{1}{z} = -1$.

   a) Desarrollar $\left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2$ y calcular el valor de $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$.

   b) Calcular $z^3 + \dfrac{1}{z^3}$ y $z^5 + \dfrac{1}{z^5}$.

478. Sean z y z^* dos complejos conjugados.

   a) Demostrar que $(x-z)(x-z^*) = x^2 - 2\mathrm{Re}\,(z) + |z|^2$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

   b) Calcular las 8 raíces de la unidad en forma binómica.

   c) Escribir $x^8 - 1$ como producto de dos factores lineales y dos factores cuadráticos.

479. Sea $\omega = e^{i\alpha}; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

   a) Demostrar que $|1+\omega| = 2\cos\frac{\alpha}{2}$ y $\arg(1+\omega) = \frac{\alpha}{2}$

   b) Utilizar el desarrollo de $(1+\omega)^n$ para demostrar que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\alpha) = \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

   c) Sea $p(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$ un polinomio con coeficientes reales. Si $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $z_2 = 3 - i$ son dos raíces complejas de $p(z)$, calcular a, b, c y d.

480. Los puntos $A(2,1)$ y $B(4,7)$ son vértices opuestos de un hexágono regular. Calcular los otros cuatro vértices.

481. El punto $P(2,6)$ es un vértice de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de centro $C(-1,4)$. Calcular los demás vértices del pentágono.

Soluciones:

418. (a) $9+6i$ (b) $-4+2i$ (c) $-5-22i$ (d) $18+24i$
419. (a) $3+6i$ (b) $-\frac{1}{10}+\frac{4}{5}i$ (c) $-\frac{4}{13}+\frac{19}{13}i$ (d) $-\frac{7}{10}+\frac{13}{10}i$
420. (a) $8-8i$ (b) -2 (c) $\frac{1}{5}-\frac{1}{5}i$ (d) $-\frac{24}{13}+\frac{42}{13}i$ (e) $\frac{1}{5}-\frac{17}{5}i$
421. (a) i (b) -1 (c) $-i$ (d) 1 (e) 1

422. $*$

423. $m=-7,\ n=5$

424. $k=3$

425. $a=2, b=1,\ a=-2, b=-1$

426. $a=\frac{2}{3}, b=3,\ a=-2, b=-1$

427. $a=\frac{11}{5}, b=-\frac{108}{5}$

428. $(a)\ b=-2\ (b)\ b=8$

429. $a=-2,\ a=2$

430. $x=-1,\ x=2$

431. $(a)\ (\sqrt{2})_{315^\circ}\ (b)\ (\sqrt{2})_{135^\circ}\ (c)\ 2_{30^\circ}\ (d)\ 2_{210^\circ}\ (e)\ 4_{180^\circ}\ (f)\ 2_{90^\circ}\ (g)\ \left(\frac{3}{4}\right)_{270^\circ}\ (h)\ 4_{60^\circ}$

432. $(a)\ \sqrt{2+\sqrt{2}i}\ (b)\ 3\ \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\ (c)\ -\sqrt{2}\ (d)\ 17\ (e)\ i\ (f)\ -\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}i\ (g)\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\ (h)\ -2+2\sqrt{3}i$

433. $(a)\ (4\sqrt{2})_{45^\circ}\ (b)\ (\sqrt[4]{2})_{75^\circ,165^\circ,255^\circ,345^\circ}\ (c)\ 2_{0^\circ,60^\circ,120^\circ,180^\circ,240^\circ,300^\circ}\ (d)\ 2_{30^\circ,150^\circ,270^\circ}\ (e)\ 4096_{180^\circ}\ (f)\ 5_{200^\circ 36' 35''}$

434. $(a)\ -1\ (b)\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{285^\circ}\ (c)\ \left(\frac{\sqrt[6]{2}}{5}\right)_{23^\circ 51' 18'',143^\circ 51' 18'',263^\circ 51' 18''}$

435. $(a)\ 2_{100^\circ,220^\circ,340^\circ}\ (b)\ 2_{45^\circ,135^\circ,225^\circ,315^\circ}\ (c)\ 2_{30^\circ,150^\circ,270^\circ}$

436. $(a)\ 16(1+\sqrt{3}i)\ (b)\ 64(\sqrt{3}-i)\ (c)\ (\sqrt{2})_{30^\circ},\ (\sqrt{2})_{120^\circ},\ (\sqrt{2})_{210^\circ},\ (\sqrt{2})_{300^\circ}\ (d)\ -1-i\ (e)\ 2_{30^\circ},\ 2_{90^\circ},\ 2_{150^\circ},\ 2_{210^\circ},\ 2_{270^\circ},\ 2_{330^\circ}\ (f)\ (\sqrt[4]{2})_{225^\circ/2},\ (\sqrt[4]{2})_{405^\circ/2}\ (g)\ 1_{90^\circ},\ 1_{210^\circ},\ 1_{300^\circ}\ (h)\ \sqrt{\frac{2}{3}}i,\ -\sqrt{\frac{2}{3}}i$

437. $m=\pm 4$

438. $6_{\frac{\pi}{6}},\ 2_{\frac{\pi}{6}}$. También $6_{\frac{7\pi}{6}},\ 2_{\frac{7\pi}{6}}$

439. $z=2_{\frac{3\pi}{8},\frac{15\pi}{8},\frac{11\pi}{8},\frac{7\pi}{8}},\ z'=1_{\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{9\pi}{8},\frac{13\pi}{8}}$

440. $z=4_{120^\circ,0^\circ 240^\circ},\ z'=2_{60^\circ,180^\circ,300^\circ}$

441. $*$

442. $5_{36^\circ 52' 12''}$ y $5_{-36^\circ 52' 12''}$

443. $l=2\sqrt{3}$

444. $\pm 2i$

445. 0, 1 y -1

446. $(3,0)$, $(0,2)$ y $(0,-2)$

447. $S=12\sqrt{3}$

448. $S=4$

449. $S=6\sqrt{3}$

450. $S=8-4\sqrt{2}$

451. Primera solución: $1+(1+\sqrt{3})i,\ 2+(1-\sqrt{3})i$; segunda solución: $1+(1-\sqrt{3})i,\ 2+(1+\sqrt{3})i$

452. $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i,\ \frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$

453. $-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i,\ \frac{5}{2}+\frac{3}{2}i$

454. Primera solución: $\frac{20}{3}+\frac{10}{3}i,\ -\frac{5}{3}+\frac{10}{3}i$; segunda solución $\frac{20}{3}-\frac{10}{3}i,\ -\frac{5}{3}-\frac{10}{3}i$

455. Primera solución: $2+3i$ y $4-3i$; segunda solución: $2-3i$ y $4+3i$

456. Primera solución: $\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ y $\sqrt{6}-\sqrt{2}i$; segunda solución: $-\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

457. $\left(\frac{1}{2}\right)_{48^\circ},\ \left(\frac{1}{2}\right)_{192^\circ},\ \left(\frac{1}{2}\right)_{264^\circ},\ \left(\frac{1}{2}\right)_{336^\circ}$

458. raíces: $3_{45^\circ,135^\circ,225^\circ,315^\circ}$, soluciones: $3+3_{45^\circ,135^\circ,225^\circ,315^\circ}$

9. Geometría

482. Hallar la ecuación en forma explícita de la recta que pasa por los puntos $P(3, 2)$ y $Q(-1, 0)$.
483. Dadas las rectas: $y = 5 - 2x$; $y = 2x - 3$, determinar las coordenadas de su punto de intersección.
484. La abscisa y ordenada en el origen de una recta son 3 y 4 respectivamente. Hallar su ecuación en forma explícita.
485. Encontrar la ecuación de la recta cuyas abscisa y ordenada en el origen, son respectivamente, 3 y -2.
486. Averiguar si los puntos $A(1, 3)$, $B(2, 6)$ y $C(3, 9)$ forman triángulo.
487. Averiguar si los puntos $A(1, 1)$, $B(-1, -5)$ y $C(0, 3)$ están alineados.
488. Determinar la posición relativa de las rectas $2x + y - 1 = 0$, $3x - 2y = 0$, $x + y + 3 = 0$.
489. Determinar la posición relativa de las rectas $3x - 2y + 6 = 0$, $2x - y + 4 = 0$, $x - 3y + 2 = 0$.
490. Dadas las rectas $x - 2y + 5 = 0$; $3x + y - 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de ambas y por el punto $P(1, -1)$.
491. Un segmento tiene por extremos $A(-3, -1)$ y $B(4, 3)$. Hallar sobre él un punto tal que la razón de sus distancias a los extremos sea 2 a 3.
492. Calcular el menor ángulo que forman las rectas $x + 5y - 2 = 0$; $3x + 2y - 1 = 0$.
493. Hallar el ángulo que forman la recta $x + 3y = 4$, con la $3x - y = 7$.
494. Las rectas $mx + 2y = 3$; $5x + ny = 7$ se cortan en el punto $P(-1, 3)$. Hallar la tangente del menor de los ángulos que forman.
495. Calcular la tangente del ángulo que forman las. rectas $x - 3y + 2 = 0$, $4x - 3y + 1 = 0$.
496. Hallar las tangentes de los ángulos del triángulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(5, 3)$, $C(2, 15)$.
497. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasando por el punto $P(-8, 9)$ forman un ángulo de $45°$ con la recta $6x - 5y = 17$.
498. Hallar las ecuaciones de las, rectas que pasan por $P(2, 3)$ y forman ángulo de $45°$ con la recta $3x - y + 4 = 0$.
499. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(-3, 0)$ y forman con la $3x - 5y + 9 = 0$ un ángulo cuya tangente es $1/3$.
500. Determinar los valores de a y b a fin de que las rectas $ax + by - 1 = 0$; $2x - 3y + 4 = 0$ sean paralelas y que la primera pase por el punto $(1, 1)$.
501. Calcular los coeficientes m y n de las rectas $3x - my = 2$; $nx + 4y = 5$, sabiendo que son paralelas y que la primera pasa por el punto $P(2, 2)$.
502. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P(2, 3)$ y cumple:
    (a) Ser paralela al eje de abscisas.
    (b) Ser paralela al eje de ordenadas.
    (c) Ser paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
    (d) Pasar por el origen.
503. Hallar la ecuación de la recta paralela a la $2x - y = 0$, tal que su abscisa en el origen vale -1.
504. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, -1)$ y es paralela a la recta $x - 3y = 0$.
505. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $M(4, 6)$, $N(2, 1)$ y $P(5, 1)$. Hallar las ecuaciones de los lados.

506. Con el punto $P(2,3)$ y la recta $4x-3y+1=0$ hallar:
   (a) Ecuación de la recta que pasa por el punto y es paralela al eje de ordenadas.
   (b) Ecuación de la recta que pasa por el punto y es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
   (c) Posición de estas dos rectas y la dada.

507. Determinar a y b para que la ecuación $x+ay+1=0$ y la $bx+3y-1=0$, representen una misma recta.

508. Hallar los valores de a y b para los cuales representan la misma recta las ecuaciones $2ax+2y-5=0$; $x-7y+7b=0$.

509. Dadas las rectas $2x+y-1=0$, $x-y-2=0$, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de ambas y es perpendicular a la $3x+6y-1=0$.

510. Dadas las rectas $6x+5y+7=0$; $ax+2y+3=0$; calcular el valor de a
   (a) Para que sean paralelas.
   (b) Para que sean perpendiculares.

511. Determinar a y b sabiendo que las rectas $2x+3y-b=0$; $6x-ay-1=0$, son perpendiculares y que la primera pasa por el punto $P(1,0)$.

512. Dada la recta $ax+by=1$, determinar a y b, sabiendo que es perpendicular a $2x+4y=11$ y pasa por el punto $P(1,3/2)$.

513. Las rectas $ax-y=4$; $x+b=y$, son perpendiculares y cortan al eje de abscisas en dos puntos distantes 5 unidades. Calcular a y b (dos soluciones).

514. Calcular los coeficientes a y b de las ecuaciones $ax-2y=0$; $bx+6y=5$, sabiendo que las rectas que representan son perpendiculares y que la primera pasa por el punto $(2,3)$.

515. Calcular b a fin de que las rectas $3x+4y=12$; $2x-by=0$ sean perpendiculares.

516. En las rectas $x+ay+1=0$; $3x+y+b=0$ determinar a y b a fin de que sean
   (a) Paralelas,
   (b) Perpendiculares.

517. Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los $A(3,2)$ y $B(-1,4)$.

518. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(-1,3)$ y $B(0,-2)$.

519. Hallar la mediatriz del segmento determinado por los puntos en que la recta $x+2y-4=0$ corta a los ejes de coordenadas.

520. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que al cortar al eje de abscisas y a la bisectriz de los ángulos del 2º y 4º cuadrante determina la recta $3x+2y=6$.

521. Determinar el punto simétrico del $P(2,5)$ respecto a la recta $5x+y=2$.

522. Determinar el punto simétrico del $A(3,2)$ respecto a la recta $2x+y=3$.

523. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,3)$ y cumple:
   (a) Ser perpendicular a la recta $3x-y+2=0$.
   (b) Ser paralela a la $x+4y-1=0$.

524. Hallar las ecuaciones de las rectas perpendiculares a las bisectrices de los ejes y que distan del origen de coordenadas 3 unidades.

525. ¿En qué punto de la recta $3x+4y=30$ tendrá qué reflejarse un rayo luminoso que parte del punto $F(5,10)$ para que después de la reflexión pase por el punto $A(13,4)$?

526. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las $5x-2y=8$; $4x+9y=10$ y es perpendicular a la bisectriz del segundo cuadrante.

527. Un triángulo isósceles tiene por base el segmento que une los puntos $A(1,-2)$; $B(6,3)$ y el otro vértice está situado en la recta $3x-y+8=0$. Hallar

    (a) Las coordenadas del tercer vértice.

    (b) La altura del triángulo.

528. Hallar la ecuación de la perpendicular a la $2x-3y+7=0$ y que la corte en el punto medio del segmento que sobre ésta interceptan los ejes de coordenadas.

529. Determinar las coordenadas de los vértices B, D del cuadrado que tiene por diagonal AC siendo $A(1,2)$, $C(9,6)$.

530. Hallar la distancia del punto $P(0,2)$ a la recta $3x-4y-2=0$.

531. Hallar la distancia del punto $P(2,-1)$ a la recta que pasa por los puntos $A(1,1)$ y $B(-2,-3)$.

532. Hallar la distancia del punto $P(3,5)$ a la recta que corta a las partes negativas de los ejes coordenados a distancias 3 y 5 respectivamente del origen.

533. Hallar la ecuación de la perpendicular a la recta AB siendo $A(1,3)$, $B(-1,-1)$ en el punto A y la distancia de B a esta perpendicular.

534. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(2,1)$ y distan 3 unidades de $A(2,-4)$.

535. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(1,1)$ y distan 2 unidades del punto $A(2,3)$.

536. Hallar la ecuación de cada una de las paralelas a la $4x-3y+4=0$ y que distan de ella 1 unidad.

537. Calcular la distancia que separa a las paralelas $4x+3y+4=0$, $4x+3y-6=0$.

538. Examinar si las rectas $3x+4y+3=0$; $6x+8y+11=0$, son paralelas y en caso afirmativo calcular la distancia entre ambas.

539. Hallar las coordenadas de los puntos situados, en la recta $x+2y-3-0$ y que disten 2 unidades de la $4x-3y+9=0$.

540. La distancia del punto $A(1,1)$ a una recta es 1 y la tangente del ángulo que forma esa recta con el eje de abscisas $12/5$. Hallar la ecuación de la recta (dos soluciones).

541. Dados los puntos $A(-4,2)$, $B(2,-5)$ se trazan por el punto A dos rectas cuyas distancias al B sean ambas de 5 unidades y se pide calcular el menor ángulo que forman dichas rectas.

542. La razón entre la longitud del segmento que una recta de pendiente negativa determina con el eje de abscisas y el que determina con el eje de ordenadas es $8/15$ y la distancia de la recta al origen es 1. Hallar la ecuación de la recta (dos soluciones).

543. Hallar la mediatriz del segmento que determina la recta $3x+2y=6$ al cortar al eje de ordenadas y a la bisectriz del cuarto cuadrante.

544. Calcular las coordenadas del circuncentro del triángulo de vértices $A(2,2)$, $B(-2,2)$, $C(-2,-2)$.

545. Calcular las coordenadas del circuncentro del triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(4,2)$ y $C(6,4)$.

546. Determinar las coordenadas del circuncentro del triángulo formado por las rectas $y=4$, $x=0$, $x=y$.

547. Hallar las coordenadas del punto que equidista de los $A(2,0)$, $B(-2,-2)$ y $C(1,-3)$.

548. Calcular las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(1,1)$, $B(5,1)$ y $C(3,7)$.

549. Siendo $A(-3,3)$, $B(3,6)$, $C(3,-6)$ los vértices de un triángulo, determinar las ecuaciones de las medianas y las coordenadas del baricentro.

550. Dado el triángulo $A(3,1)$, $B(-3,3)$, $C(3,5)$, comprobar que la distancia del baricentro al punto medio de cada lado, es la tercera parte de la longitud de la mediana correspondiente.

551. Las coordenadas de dos vértices de un triángulo son $A(4,1)$, $B(0,3)$ y las del baricentro $G(3,4)$. Hallar las coordenadas de tercer vértice.

552. Los vértices de un triángulo son $A(1,5)$, $B(7,3)$ y $C(3,-1)$. Calcular la ecuación y la longitud de la altura relativa al lado AB.

553. Los vértices de un triángulo son $A(2,0)$, $B(3,2)$ y $C(4,-3)$. Hallar las ecuaciones de las alturas.

554. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $y = 0$, $3x - 4y = 0$; $15x + 8y = 420$. Hallar las coordenadas de los vértices y la ecuación de la altura correspondiente a la base $y = 0$.

555. Hallar las coordenadas del ortocentro del triángulo de vértices $A(2,2)$, $B(8,2)$ y $C(5,8)$.

556. Hallar las ecuaciones de las alturas y las coordenadas del ortocentro del triángulo de vértices $A(0,-1)$, $B(-3/2,1)$, $C(-3,2)$.

557. En el triángulo de vértices $A(1,3)$, $B(-1,-2)$ y $C'(5,0)$ hallar las coordenadas del baricentro G, del circuncentro C y del ortocentro H y la posición relativa de estos puntos.

558. En el triángulo de vértices $O(0,0)$, $A(3,0)$ y $B(0,3)$ hallar las coordenadas del ortocentro, circuncentro y baricentro y comprobar que los tres puntos están en la línea recta.

559. Hallar las ecuaciones de las bisectrices del ángulo formado por las rectas $3x - 4y = 2$; $8x - 6y = 7$.

560. Hallar las ecuaciones de las bisectrices del ángulo que forman las rectas $x+2y-5 = 0$; $2x-y+3 = 0$.

561. Dadas las rectas $x - 2y = 4$ e $y - 2x = 4$ calcular otra recta que pasa por $P(1,1)$ y forma con las anteriores ángulos iguales.

562. Hallar las coordenadas del incentro del triángulo cuyos vértices son $A(-3,1)$, $B(8,1)$ y $C(-8,-11)$.

563. Dadas las rectas: $4x - 3 + 1 = 0$; $y - 7 = 0$; $x + 4 = 0$; determinar las ecuaciones de las bisectrices del triángulo que forman y comprobar que concurren en un punto.

564. Hallar el área del triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(6,3)$, $C(-1,4)$.

565. Hallar el área del triángulo de vértices $A(8,0)$, $B(8,3)$ y $C(1,0)$.

566. Hallar a con la condición de que el triángulo de vértices $O(0,0)$, $P(3,2)$, $Q(a,0)$ tenga por área 3.

567. El lado desigual de un triángulo isósceles es el segmento determinado por los puntos $A(-1,-1)$ y $B(3,3)$ y su vértice C está sobre la recta $y - 3x - 4 = 0$. Determinar su área.

568. Dado el punto $A(1,3)$ se determina su simétrico B respecto de la bisectriz del primer cuadrante, después se halla el punto C simétrico del B respecto al eje de abscisas y por último el punto D simétrico del anterior respecto del eje de ordenadas. Calcular el área del cuadrilátero $ABCD$.

569. Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto $P(4,5)$ y forma con los semiejes OX, OY un triángulo de 40 unidades de área.

570. Hallar m sabiendo que vale 20 el área del triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(4,-5)$, $C(4,m)$.

571. De un paralelogramo $ABCD$ se conoce el vértice $A(3,2)$ y el $B(6,3)$, la pendiente del lado AD que vale 1, y la de la diagonal BD, que vale 5/7; hallar:
   (a) Las ecuaciones de los lados del paralelogramo.
   (b) Las coordenadas de los vértices C y D.
   (c) El punto de intersección de las diagonales.

572. Se dan los puntos $A(-1,12)$ y $B(9,28)$, se determinan las coordenadas del punto A' simétrico del A respecto al eje de las x y las del punto B' simétrico del B respecto al eje de las y. Se pide:

(a) Hallar las ecuaciones de las rectas AB' y $A'B$.

(b) Las coordenadas del punto C en que se cortan las rectas anteriores.

(c) Hallar la distancia del punto C a la recta AB.

573. Hallar las coordenadas del punto que equidista de los $A(1,1)$, $B(2,2)$ y que se halla situado sobre la recta $x-3y-3=0$.

574. Hallar las coordenadas del punto que equidista de los $A(-1,2)$, $B(-2,0)$ y que se halla sobre la recta $2x-y-1=0$.

575. Dada la recta $3x-4y-2=0$, y el punto $P(2,1)$ sobre ella, determinar en la recta los puntos que distan 5 unidades del dado.

576. Dada la recta $x+5y+3=0$ y un punto P sobre ella de ordenada -1, determinar los puntos de dicha recta que distan $\sqrt{26}$ del P.

577. Sean las rectas paralelas $ax+by+3=0$; $3x+2y-c=0$. La segunda pasa por el punto $P(1,-1)$. Los puntos en que cortan al eje de abscisas distan 10 unidades. Determinar a, b y c (dos soluciones).

578. Se tiene un punto A de coordenadas $(0,3)$ y otro B de coordenadas $(3,2)$. Situar en el eje X otro C de tal modo que si AC es el rayo incidente en OX, el CB sea el reflejado.

579. Un vértice de un triángulo isósceles está en el origen de coordenadas partiendo de él los lados iguales. Otro vértice es el punto $A(0,5)$. Calcular las coordenadas del tercer vértice sabiendo que está situado en la recta $y=x$.

580. Hallar los vértices de los triángulos equiláteros que tienen un vértice en el punto $A(3,-3)$ y una altura sobre la recta $x-y=0$.

581. La base de un triángulo isósceles ABC es el segmento que une los puntos $B(3,1)$ y $C(-2,3)$ y el vértice A está sobre el eje de ordenadas. Calcular las ecuaciones de los tres lados del triángulo.

582. Dadas las coordenadas $A(-1,1)$ del vértice del ángulo recto de un triángulo y sabiendo que los catetos del triángulo dado son paralelos a los ejes y miden 6 y 13, se desea hallar la ecuación de la altura correspondiente a la hipotenusa (cuatro soluciones).

583. Sean $A(1,0)$, $B(3,1)$ los vértices de los ángulos agudos de un triángulo isósceles rectángulo. Calcular las coordenadas del tercer vértice (dos soluciones).

584. Un triángulo rectángulo, de vértice el origen de coordenadas, tiene un cateto de longitud $6\sqrt{2}$, en la recta $x-y=0$ y el otro de longitud $8\sqrt{2}$, en la $x+y=0$. Determinar la ecuación de la altura correspondiente a la hipotenusa (dos soluciones).

585. Determinar las coordenadas de los vértices B y D de un cuadrado que tiene por diagonal AC, $A(1,2)$, $C(9,6)$. Hallar la ecuación de esta diagonal y la de BD.

Soluciones:

482. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
483. $(2,1)$
484. $y=-\frac{4}{3}x+4$
485. $y=\frac{2}{3}x-2$
486. no
487. no
488. se cortan dos a dos en puntos distintos
489. se cortan en un punto
490. $23x+10y-13=0$
491. $\left(-\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$
492. 45^{o}

493. 90^o
494. $\frac{2}{23}$
495. $\frac{9}{13}$
496. 3, 4 y $\frac{7}{11}$
497. $y-9=-11(x-8)$ e $y-9=\frac{1}{11}(x-8)$
498. $y-3=-2(x-2)$ e $y-3=\frac{1}{2}(x-2)$
499. $y=\frac{2}{9}(x+3)$ e $y=\frac{7}{6}(x+3)$
500. $a=-2$, $b=3$
501. $m=1$, $n=-12$
502. (a) $y=3$ (b) $x=2$ (c) $y=x+1$ (d) $y=\frac{3}{2}x$
503. $y=2x+2$
504. $y+1=\frac{1}{3}(x-2)$
505. $y-1=\frac{5}{2}(x-5)$, $y-1=-5(x-2)$, $y=6$
506. (a) $x=2$ (b) $x-y+1=0$ (c) se cortan en $(2,3)$
507. $a=-3$, $b=-1$
508. $a=-\frac{1}{7}$, $b=\frac{5}{2}$
509. $y=2x-3$
510. (a) $a=\frac{12}{5}$ (b) $a=-\frac{5}{3}$
511. $a=4$, $b=2$
512. $a=4$, $b=-2$
513. $a=-1$, $b=-1$ o $a=-1$, $b=9$
514. $a=3$, $b=4$
515. $b=\frac{3}{2}$
516. (a) $a=\frac{1}{3}$ (b) $a=-3$
517. $y=2x+1$
518. $x-5y+3=0$
519. $y=2x-3$
520. $2x-3y-17=0$
521. $P'(-3,4)$
522. $A'(-1,0)$
523. (a) $x+3y=11$ (b) $x+4y=14$
524. $x+y=3\sqrt{2}$, $x+y=-3\sqrt{2}$, $x-y=3\sqrt{2}$, $x-y=-3\sqrt{2}$
525. $(6,3)$
526. $53x-53y-74=0$
527. (a) $(-1,5)$ (b) $\frac{9}{\sqrt{2}}$
528. $105x+70y+102=0$
529. $(3,8)$, $(7,0)$
530. 2
531. 2
532. $\frac{45}{\sqrt{34}}$
533. $x+2y-7=0$, $3\sqrt{5}$
534. $4x-3y-5=0$, $4x+3y-11=0$
535. $y=1$, $4x+3y-7=0$
536. $4x-3y+9=0$, $4x-3y-1=0$
537. 2
538. sí, $\frac{1}{2}$
539. $(1,1)$, $\left(-\frac{29}{11},\frac{31}{11}\right)$
540. $12x-5y+6=0$, $12x-5y-20=0$
541. $65{,}68^o$
542. $15x+8y+17=0$, $15x+8y-17=0$

543. $12x - 18y - 63 = 0$
544. $(0,0)$
545. $(-3,11)$
546. $(2,2)$
547. $(0,-1)$
548. $(3,3)$
549. $x + 2y - 3 = 0$, $15x - 6y - 9 = 0$, $21x + 6y - 27 = 0$, $(1,1)$
550.
551. $(5,8)$
552. $y = 3x - 10$, $\frac{8\sqrt{10}}{5}$
553. $x - 5y - 2 = 0$, $2x - 3y = 0$, $x + 2y + 2 = 0$
554. $(0,0)$, $(28,0)$, $(20,15)$, $x = 20$
555. $\left(5, \frac{7}{2}\right)$
556. $6x - 6y + 15 = 0$, $3x - 4y + 17 = 0$, $3x - 2y - 2 = 0$, $\left(7, \frac{19}{2}\right)$
557. $G\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $C\left(\frac{45}{26}, -\frac{5}{26}\right)$ $H\left(\frac{20}{13}, \frac{18}{13}\right)$, los tres puntos están alineados
558. $G(1,1)$, $C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $H(0,0)$
559. $2x + 2y - 3 = 0$, $14x - 14y - 11 = 0$
560. $x - 3y + 8 = 0$, $3x + y - 2 = 0$
561. $y = x$, $y = -x + 2$
562. $(-1,-2)$
563. $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$, $y = -x + 3$, $y = 3x + 7$
564. 9
565. $\frac{11}{2}$
566. ± 3
567. 6
568. 14
569. $5x + 4y = 40$
570. $m = 15$, $m = -25$
571. (a) $x - 3y + 3 = 0$, $x - 3y - 5 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x - y - 3 = 0$ (b) $(-1,-2)$, $(2,-1)$ (c) $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$
572. (a) $2x + y - 10 = 0$, $4x - y - 8 = 0$ (b) $(3,4)$ (c) $\frac{72}{\sqrt{89}}$
573. $(3,0)$
574. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
575. $(6,4)$, $(-2,-2)$
576. $(7,-2)$, $(-3,0)$
577. $a = -\frac{9}{31}$, $b = -\frac{6}{31}$, $c = 1$ ó $a = \frac{9}{29}$, $b = \frac{6}{29}$, $c = 1$
578. $\left(\frac{9}{5}, 0\right)$
579. $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ o $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$
580. $B(-3,3)$, $C\left(3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$ ó $B(-3,3)$, $C\left(-3\sqrt{3}, -3\sqrt{3}\right)$
581. $2x + 5y - 11 = 0$, $9x + 8y - 6 = 0$, $x - 12y + 9 = 0$
582. $6x - 13y + 19 = 0$, $6x + 13y - 7 = 0$ (la misma recta es altura de dos triángulos)
583. $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ó $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
584. $7x - y = 0$, $x - 7y = 0$
585. $(3,8)$, $(7,0)$

10. Circunferencia

586. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro el punto $(2, 0)$ y radio 3.

587. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(-1, 2)$ y que pasa por el punto $(3, -1)$.

588. Determinar el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

589. Determinar el centro y el radio de la circunferencia $2x^2 + 2y^2 - 6x - 2y + 3 = 0$.

590. Determinar F a fin de que la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y + F = 0$ represente:
   (a) Una circunferencia.
   (b) Un punto.
   (c) No represente ninguna línea.

591. Determinar F a fin de que la ecuación $2x^2 + 2y^2 + x - 4y + F = 0$ represente:
   (a) Una circunferencia.
   (b) Un punto.
   (c) No represente ninguna línea.

592. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 1 = 0$, determinar la ecuación de la circunferencia concéntrica con la dada, que pasa por el punto $(2, 3)$.

593. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasando por el punto $(4, -2)$ es tangente a los ejes de coordenadas.

594. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por diámetro el segmento de la recta $3x+2y-12 = 0$ comprendido entre los ejes coordenados.

595. Obtener la ecuación de la circunferencia de radio $3\sqrt{2}$ que pasa por el origen de coordenadas y cuyo centro está situado en la bisectriz del primer cuadrante.

596. Dada la recta $4x - 3y + 5 = 0$, hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(2, 1)$, por su simétrico respecto a la recta dada y por el origen de coordenadas.

597. Una circunferencia de centro $(6, 5)$ es tangente a la recta $4x - 3y + 5 = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia.

598. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a la bisectriz del segundo cuadrante y que tiene su centro en el punto $(-5, 0)$.

599. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1, -2)$; $(-2, 2)$ y cuyo centro está situado en la recta $8x - 4y + 9 = 0$.

600. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio $2\sqrt{2}$, que pasa por el origen y cuyo centro está en la bisectriz del primer cuadrante.

601. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(3, -2)$ y tiene su centro en la recta $x + y - 3 = 0$.

602. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(2, 8)$ y es tangente a la recta $3x + 4y - 43 = 0$ en el punto $(5, 7)$.

603. Hallar las ecuaciones de las circunferencias tangentes a las rectas $x + 2 = 0$; $y + 2 = 0$, y que pasan por el punto $(0, 7)$.

604. Una circunferencia es tangente a los ejes de coordenadas y tiene su centro en la recta $x + y - 4 = 0$. Hallar su ecuación y las coordenadas de los puntos de tangencia con los ejes.

605. Hallar las ecuaciones de las circunferencias tangentes a las rectas $3x + 4y = 0$; $4x + 3y + 1 = 0$; siendo el punto de tangencia con la primera el $(0, 0)$.

606. Hallar las ecuaciones de las circunferencias tangentes a las rectas $3x-2y-20=0$; $2x+3y-9=0$ y que pasan por el punto $(3,1)$.

607. Hallar las ecuaciones de las circunferencias tangentes a las rectas $4x+3y-4=0$; $3x-4y+2=0$ que tienen sus centros sobre la $2x-y+3=0$.

608. Hallar los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2=25$ con la recta $y+x-7=0$.

609. Determinar la posición relativa de la recta $x-2y=0$, respecto de la circunferencia $x^2+(y-4)^2=9$.

610. En la circunferencia $x^2+y^2+2x+4y-5=0$, determinar el punto más lejano y el más cercano al origen de coordenadas.

611. Deducir la posición relativa de la circunferencia $x^2+y^2-6x-4y-3=0$ y la recta $x+y-9=0$.

612. Calcular la longitud del segmento interceptado en la recta $x-2y+5=0$ por la circunferencia $x^2+y^2=25$ así como su distancia al centro.

613. Calcular los puntos de intersección del eje de ordenadas con la circunferencia que pasa por el punto $(4,4)$ y es tangente en el punto $(2,0)$ al eje de abscisas.

614. Hallar la ecuación de las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2=25$ en los puntos de abscisa $x=3$.

615. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2+y^2+4x-11y-12=0$ en el punto $(0,-1)$.

616. En la circunferencia $x^2+y^2=4$, hallar las ecuaciones de las tangentes que forman un ángulo de $30°$ con la dirección positiva del eje de abscisas.

617. Hallar la ecuación de la tangente trazada en su punto $(2,1)$ a la circunferencia $x^2+y^2-6x-2y+9=0$.

618. Determinar los valores de c a fin de que la recta $3x+4y+c=0$ sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2-2x-24=0$.

619. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que pasan por los puntos $(0,0)$, $(2,-2)$ y son tangentes a la recta $y+4=0$.

620. Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(3,4)$, $(4,3)$ y es tangente a la recta $x+3y-5=0$.

621. Hallar la ecuación de las circunferencias que pasan por los puntos $(-1,0)$ y $(7,4)$ y cuyos centros están sobre la circunferencia $x^2+y^2+2x-24=0$.

622. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(3,0)$ y es tangente a la circunferencia $x^2+y^2-2x+4y-24=0$ en el punto $(3,3)$.

623. Hallar la ecuación, el centro y el radio de la circunferencia que pasa por el punto $(-1,5)$ y es tangente a la circunferencia $x^2+y^2-20x-14y+124=0$ en el punto $(6,4)$.

624. En la circunferencia $x^2+y^2=4$, se inscribe un triángulo equilátero uno de cuyos vértices es el $(2,0)$. Hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

625. Hallar la potencia y situación del punto $(1,-1)$ respecto a la circunferencia $(x+2)^2+(y-2)^2=2$.

626. Hallar la potencia y situación del punto $(1,3)$ respecto de la circunferencia $x^2+y^2+4x+6y-12=0$.

627. Encontrar las coordenadas de los puntos de intersección de las circunferencias $x^2+y^2+x-3y=0$, $x^2+y^2-3x-2=0$.

Soluciones:

(586) $(x-2)^2+y^2=9$

(587) $(x+1)^2+(y-2)^2=17$

(588) $C(3,-2)$, $r=4$

(589) $C\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$, $r=1$

(590) $(a)\ F < 13\ (b)\ F = 13\ (c)\ F > 13$

(591) $(a)\ F < \frac{17}{8}\ (b)\ F = \frac{17}{8}\ (c)\ F > \frac{17}{8}$

(592) $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 36$

(593) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$, $(x-10)^2 + (y+10)^2 = 100$

(594) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$

(595) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 18$, $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 18$

(596) $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{65}{16}$

(597) $(x-6)^2 + (y-5)^2 = \frac{196}{25}$

(598) $(x+5)^2 + y^2 = \frac{25}{2}$

(599) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$

(600) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$

(601) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$

(602) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

(603) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 25$, $(x-15)^2 + (y-15)^2 = 289$

(604) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$, $(2,0)$, $(0,2)$

(605) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$, $\left(x + \frac{3}{49}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{49}\right)^2 = \frac{25}{49^2}$

(606) $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 13$, $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$

(607) $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 9$, $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

(608) $(3,4)$, $(4,3)$

(609) exterior

(610) $(-1+\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2})$, $-1-\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2}$

(611) secantes

(612) $4\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$

(613) $(0,1)$, $(0,4)$

(614) $3x + 4y - 25 = 0$, $3x - 4y - 25 = 0$

(615) $4x - 13y - 13 = 0$

(616) $y - \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}(x-1)}$, $y + \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}(x+1)}$

(617) $x = 2$

(618) $c = 22$, $c = -28$

(619) $x^2 + (y+2)^2 = 4$, $(x-8)^2 + (y-6)^2 = 100$

(620) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$, $\left(x - \frac{45}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{45}{2}\right)^2 = \frac{1445}{2}$

(621) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$, $(x-4)^2 + y^2 = 25$

(622) $\left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{261}{100} = 0$

(623) $C(2,1)$, $r = 5$, $(x-2)^2 + (y-1)^2 - 25 = 0$

(624) $(-1, \sqrt{3})$, $(-1, -\sqrt{3})$

(625) 16, exterior

(626) 20, exterior

(627) $(1,2)$, $\left(-\frac{14}{25}, -\frac{2}{25}\right)$

11. Estadística

628. Un estudiante se dedica a contar cuántos coches pasan por minuto delante de su casa durante 30 minutos. Sus resultados fueron:

 23, 22, 22, 22, 24, 22, 21, 21, 23, 23, 27, 21, 21, 22, 23, 25, 27, 26, 23, 23, 22, 27, 26, 25, 28, 26, 22, 20, 21, 20.

 Representar estos datos en una tabla de frecuencias y dibujar un diagrama de barras.

629. Las edades de 200 miembros de un club de tenis son:

 20, 22, 23, 24, 25, 25, 25, 26, 26, 26, 26, 28, 28, 29, 29, 29, 30, 30, 30, 30,
 30, 30, 30, 32, 32, 33, 33, 33, 34, 34, 34, 34, 34, 34, 34, 34, 35, 35, 35, 35,
 36, 36, 36, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 41, 41, 41,
 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44, 44, 44,
 45, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 46, 46, 46, 46, 46, 46, 46, 46, 47, 47, 47, 47,
 47, 47, 47, 47, 47, 48, 48, 48, 48, 48, 48, 48, 48, 48, 49, 49, 49, 49, 49, 49,
 49, 49, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 51, 51, 51, 51, 51, 51, 51, 52, 52, 52, 52, 52,
 53, 53, 53, 53, 53, 53, 53, 53, 53, 54, 54, 54, 54, 55, 55, 55, 55, 55, 56, 56,
 56, 57, 57, 57, 57, 57, 57, 57, 57, 57, 57, 58, 58, 58, 59, 59, 59, 60, 60, 60,
 60, 60, 61, 61, 61, 62, 62, 62, 63, 63, 63, 63, 64, 64, 64, 64, 65, 65, 68, 69.

 Construir una tabla de frecuencias con los datos agrupados en la forma $[20, 25)$, $[25, 30)$, ... y dibujar el histograma correspondiente.

630. Los resultados de un examen realizado por un grupo de 24 estudiantes han sido los siguientes:

 47 54 63 77 23 15 66 32 56 83 16 49
 52 67 44 9 62 46 38 58 37 25 55 46.

 La calificación máxima era de 90 puntos. Construir la tabla de frecuencias con intervalos $[0, 9]$, $[10, 19]$ ... incluyendo las frecuencias acumuladas de cada clase. Dibujar un histograma y un diagrama de fracuencias acumuladas.

631. Los salarios anuales (en euros) de los empleados de una pequeña empresa fueron los siguientes:

 12350 19820 13540 8440 11950 11320 7840 8450 14550 18740 12360 14620 22380 32420 36780.

 a) Completar la siguiente tabla:

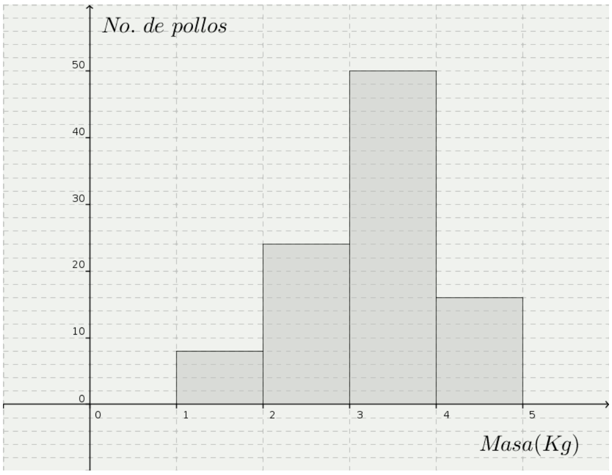
Salario (en miles de euros)	Frecuencia	Longitud del intervalo	Densidad de frecuencia
$[7{,}5, 10)$			
$[10, 15)$			
$[15, 25)$			
$[25, 40)$			

 b) Dibujar el histograma.

632. El histograma muestra datos sobre el peso de los pollos congelados de un supermercado. Los datos aparecen agrupados en intervalos $[1, 2)$, $[2, 3)$, ...

 a) Construir la tabla de frecuencias correspondiente.

 b) ¿Cuántos pollos congelados hay en el supermercado?



633. La siguiente tabla muestra el tiempo de espera en minutos de 50 clientes de un banco:

2.5 1.3 2.2 1.4 5.2 3.0 7.1 4.2 1.0 0.5
3.2 2.0 5.3 3.1 1.2 1.8 4.1 2.2 1.2 1.8
3.1 2.7 0.2 6.4 2.0 3.1 1.1 4.2 4.3 0.5
1.2 1.4 2.1 5.4 3.1 4.3 2.5 4.2 5.2 0.5
1.4 0.3 4.2 2.2 2.4 0.6 3.2 4.2 0.8 0.5

a) Construir la tabla de frecuencias con intervalos de la forma $[0, 1)$, $[1, 2)$, $\ldots$, incluyendo las frecuencias acumuladas en cada intervalo de tiempo.

b) Dibujar el diagrama de frecuencias acumuladas y estimar el porcentaje de clientes que esperaron más de 5 minutos.

c) Calcular la moda, mediana y media de los datos

634. Un conjunto de datos consta de los siguientes valores:

2, 3, 3, 3, 6, 6, 7

a) Escribir los valores de la moda y la mediana.

b) Supóngase que se añade un nuevo dato a al conjunto. Calcular el valor de a que hace que la media y la mediana tengan el mismo valor y evaluar el efecto que este nuevo dato tiene sobre la moda.

635. Se considera la sucesión:

$$\ln a,\ \ln\sqrt{a},\ \ln\sqrt[4]{a},\ \ln\sqrt[8]{a},\ \ldots$$

a) Demostrar que la serie:

$$\ln a + \ln\sqrt{a} + \ln\sqrt[4]{a} + \ln\sqrt[8]{a} + \ldots$$

converge y calcular su suma.

b) Un conjunto de datos estadísticos está formado por los primeros n términos de la sucesión. Calcular su media en función de n y $\ln a$.

c) A partir de aquí calcular el mínimo valor de n para el cual la media de estos datos es menor del $1\,\%$ del primer término de la sucesión.

636. Una variable estadística toma los valores que se muestran en la siguiente tabla:

X	Frecuencia
$0 \leq X < 100$	8
$100 \leq X < 200$	11
$200 \leq X < 400$	24
$400 \leq X < 600$	15
$600 \leq X < 1000$	14

Calcular la moda, la mediana y la media.

637. Con la tabla de frecuencias del problema 631:

   a) Calcular las frecuencias acumuladas y dibujar el diagrama de frecuencias acumuladas.

   b) Calcular los cuartiles y el rango intercuartílico

638. En una estación de esquí, se mide el espesor de la nieve el 31 de enero durante 12 años consecutivos. Los datos obtenidos (en centímetros) son los siguientes:

   30, 75, 125, 55, 60, 75, 65, 65, 45, 120, 70, 1100

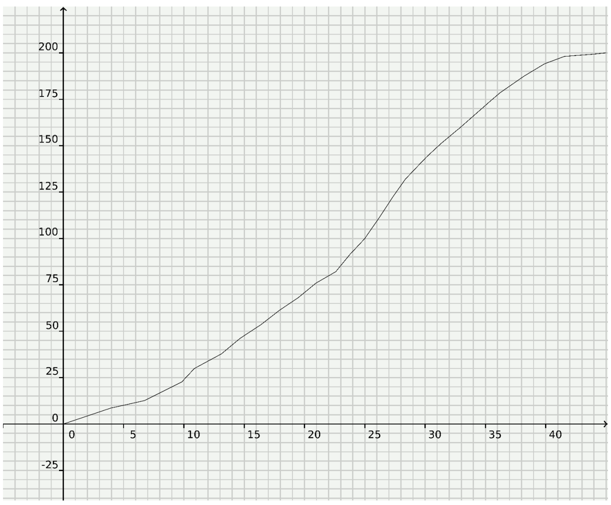
   Calcular (a) El rango (b) El cuartil inferior (c) El cuartil superior (d) El rango intercuartílico

639. La siguiente tabla muestra la longitud de memorias flash en una tienda de productos informáticos:

Longitud	f	Límite superior	Lonitud	Frecuencia acumulada
6 - 10	0	10,5	$l \leq 10{,}5$	
11 - 15	2			
16 - 20	4			
21 - 25	8			
26 - 30	14			
31 - 35	6			
36 - 40	4			
41 - 45	2			

   Completar la tabla y dibujar el diagrama de frecuencias acumuladas.

640. El diagrama muestra el tiempo que 200 estudiantes dedican a escuchar música.



Estimar (a) La mediana (b) El rango intercuartílico (c) El tiempo que un estudiante debería dedicar para estar en el 10 % superior.

641. La media de 6 números a, b, 2, 3, 5, 5, es 3 y la varianza es $\frac{7}{3}$. Calcular los valores de a y b supuesto que $a < b$.

642. (a) Para el conjunto de datos $\{a-1, a, a+2, a+3\}$, calcular la media y la varianza en función de a. (b) Si cada uno de los números se reduce en tres unidades, calcular las nuevas media y varianza.

643. Se lanzan dos dados cuatro veces y se obtienen los siguientes resultados: 2, 3, 6 y 9. Se vuelven a lanzar dos veces más. Si la media de todos los lanzamientos es 6 y la varianza es 10, calcular los dos últimos resultados. A partir de ellos calcular el rango y el rango intercuartílico de los valores obtenidos.

644. Se considera el conjunto de datos $A = \{4k-2, k, k+1, 2k+4, 3k\}$ con $k \in \mathbb{R}$. (a) Calcular la media de A en función de k. (b) Calcular la varianza de A en la forma $ak^2 + bk + c$.

   Si ahora, cada número de A se reduce en 2 unidades, (c) Calcular la media de los nuevos datos. (d) Explicar el efecto del cambio sobre la varianza.

645. Consideremos el conjunto de datos $B = \{a, 3a, 5a, \ldots, (2n-1)a\}$, con $a \in \mathbb{Z}^+$:

   (a) Demostrar que la media de estos números es an.

   (b) Sabiendo que:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$$

   demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

   (c) Aplicar el resultado obtenido al caso $a = 1$. Usar esta fórmula para encontrar una expresión de la varianza de B en la forma $pn^2 + qn$.

12. Probabilidad

646. Se lanzan dos dados equilibrados. Sea A el suceso "*obtener números iguales en los dos dados*" y B "*obtener dos números impares*". Calcular las probabilidades:

   a) $\mathrm{p}(A)$
   b) $\mathrm{p}(B)$
   c) $\mathrm{p}(A \cap B)$
   d) $\mathrm{p}(A \cup B)$

647. Se lanza una moneda tres veces:

   a) Escribir el espacio muestral.
   b) Calcular la probabilidad de obtener exactamente una cruz.

648. Un dado octaédrico tiene sus caras numeradas de 1 a 8. En un lanzamiento de este dado, calcular la probabilidad de obtener:

   a) Un número par.
   b) Un múltiplo de 3.
   c) Un múltiplo de 4.
   d) Un número que no sea múltiplo de 4.
   e) Un número menor que 4.

649. Se lanzan una moneda y un dado. Sea A el suceso "*obtener una cara*" y B el suceso "*obtener al menos* 3". Calcular las probabilidades:

   (*a*) $\mathrm{p}(A)$
   (*b*) $\mathrm{p}(B)$
   (*c*) $\mathrm{p}(A \cup B)$
   (*d*) $\mathrm{p}(A \cap B)$
   (*e*) $\mathrm{p}(\bar{A} \cup B)$

650. En una cierta calle un tercio de sus habitantes no leen el periódico, un cuarto leen un periódico nacional y tres quintos leen un periódico local. ¿Cuál es la probabilidad de que en una casa elegida al azar se lean ambos periódicos?

651. Se lanzan dos dados equilibrados. Sea A el suceso "*el producto de los números obtenidos es par*" y B el suceso "*la suma de los números obtenidos es impar*". Calcular:

   (*a*) $\mathrm{p}(A)$
   (*b*) $\mathrm{p}(B)$
   (*c*) $\mathrm{p}(A \cup B)$
   (*d*) $\mathrm{p}(A \cap B)$
   (*e*) $\mathrm{p}(\bar{A} \cup \bar{B})$

652. En una clase de 25 estudiantes, 15 estudian francés, 13 estudian malayo y 5 no estudian ninguna lengua. Si se escoge un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que estudie francés y malayo?

653. De los 32 estudiantes de una clase, 18 juegan al golf, 16 tocan el piano y 7 hacen ambas actividades. Si se escoge un estudiante al azar, calcular la probabilidad de que:

   (*a*) Juegue al golf pero no toque el piano.
   (*b*) Toque el piano pero no juegue al golf.

654. En una ciudad, el 40 % de la población lee el periódico A, el 30 % lee el periódico B y el 10 % lee el periódico C. También se sabe que un 5 % lee A y B, el 4 % lee A y C, el 3 % lee B y C y un 2 % lee los tres periódicos. Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar:

(a) Lea solamente A.

(b) Lea solamente B.

(c) No lea ningún periódico.

655. Sean X e Y sucesos tales que $\mathrm{p}(X) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{p}(Y) = \frac{1}{8}$ y $\mathrm{p}(X \cap Y) = \frac{1}{8}$. Calcular:

a) $\mathrm{p}(X \cup Y)$

b) $\mathrm{p}(\overline{X \cup Y})$

656. Si $\mathrm{p}(A) = 0{,}2$ y $\mathrm{p}(B) = 0{,}5$ y $\mathrm{p}(A \cap B) = 0{,}1$, calcular:

(a) $\mathrm{p}(A \cup B)$

(b) $\mathrm{p}(\overline{A \cup B})$

(c) $\mathrm{p}(\bar{A} \cup B)$

657. En una clase hay 14 chicas y 11 chicos. Se escogen al azar dos estudiantes para representar a la clase en una asamblea:

a) ¿De cuántas maneras se pueden elegir los dos estudiantes?

b) Calcular las probabilidades de que los estudiantes elegidos sean (I) dos chicas (II) dos chicos (III) un chico y una chica

658. De un grupo de 10 estudiantes se eligen cuatro al azar para formar un equipo. ¿Cuál es la probabilidad de que dos estudiantes concretos Sofía y Jerónimo sean elegidos para el equipo?

659. En una fuente hay 5 naranjas y 3 limones. se seleccionan dos frutas al azar. Calcular la probabilidad de que sean (a) dos limones (b) una naranja y un limón

660. En una acuario hay 7 peces rojos y 5 peces amarillos. Con una red se escogen al azar dos de ellos. Calcular la probabilidad de que los peces sean (a) los dos rojos (b) de colores diferentes

661. En un vaso hay 4 canicas verdes, 5 rojas y 3 azules. Se escogen tres de ellas al azar. Calcular la probabilidad de que las canicas seleccionadas sean (a) todas rojas (b) de diferente color (c) al menos una verde

662. Los sucesos A y B son tales que $\mathrm{p}(A) = 0{,}4$ y $\mathrm{p}(B) = 0{,}6$ y $\mathrm{p}(A \cup B) = 0{,}7$. Calcular las probabilidades:

(a) $\mathrm{p}(A \cap B)$

(b) $\mathrm{p}(A \cap \bar{B})$

(c) $\mathrm{p}(\bar{A} \cup \bar{B})$

663. De los estudiantes de una clase, un 80 % son más altos de 160 cm y un 75 % no miden más de 180 cm. Si se escoge un estudiante de la clase al azar, calcular la probabilidad de que su estatura esté comprendida entre 160 y 180 cm.

664. Si $\mathrm{p}(A) = 0{,}6$, $\mathrm{p}(B) = 0{,}55$ y $\mathrm{p}(A \cap B) = 0{,}2$ calcular:

(a) $\mathrm{p}(A \cup B)$

(b) $\mathrm{p}(\bar{A} \cap B)$

(c) $\mathrm{p}((A \cup B) - (A \cap B))$

665. Si $\mathrm{p}(A \cap \bar{B}) = 0{,}5$, $\mathrm{p}(A \cap B) = 0{,}2$ y $\mathrm{p}(A \cup B) = 0{,}85$, calcular:

(a) $\mathrm{p}(A)$

(b) $\mathrm{p}(B)$

(c) $\mathrm{p}\,(\bar{A} \cap B)$

666. La siguiente tabla muestra las frecuencias relativas de las edades de los estudiantes de un instituto:

Edad (en años)	13	14	15	16	17
Frecuencia relativa	0,15	0,31	0,21	0,19	0,14

(a) Se elige un estudiante al azar. Calcular la probabilidad de que tenga(I) 15 años (II) 16 años o más

(b) Suponiendo que en ese instituto hay 1200 estudiantes calcular cuántos de ellos tienen 15 años.

667. Se lanzan dos dados 500 veces. Las frecuencias de los distintos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fracuencias	6	8	21	34	65	80	63	77	68	36	42

Usando estas frecuencias para estimar las probabilidades calcular la probabilidad de:

(a) La suma sea múltiplo de 5.

(b) La suma sea un número par.

(c) La suma sea divisible por 5 o sea un número par.

668. Se lanza un dado equilibrado de 10 caras. Calcular la probabilidad de que el número obtenido sea:

(a) Primo.

(b) O primo o múltiplo de 4.

(c) Múltiplo de 4 o múltiplo de 3.

669. De las 53 personas que trabajan en una escuela 36 toman té, 18 café y 10 no beben ni té ni café.

(a) ¿Cuántos toman té y café?

(b) Si se elige uno de ellos al azar calcular la probabilidad de que (I) Beba té pero no café (II) Beba té y café

670. De los 27 estudiantes de una clase, 15 han elegido Arte y 20 han elegido Teatro. También hay 4 que no han elegido ninguna de las dos asignaturas.

(a) ¿Cuántos han elegido ambas asignaturas?

(b) Se escoge al azar un estudiante. Calcular la probabilidad de que (I) Haya elegido teatro pero no arte (II) Haya elegido alguna de las dos asignaturas (III) Supuesto que ha elegido Teatro haya elegido Arte

671. De los sucesos A y B se sabe que $\mathrm{p}\,(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}35$, $\mathrm{p}\,(A) = 0{,}25$ y $\mathrm{p}\,(B) = 0{,}6$. Calcular:

(a) $\mathrm{p}\,(A \cap B)$

(b) $\mathrm{p}\,(A|B)$

(c) $\mathrm{p}\,(\bar{B}|\bar{A})$

672. Se elige al azar un número de la siguiente lista:

1 2 4 7 11 16 22 29

Calcular la probabilidad de que:

(a) Sea par pero no múltiplo de 4.

(b) Sea mayor que 5 y menor que 15.

(c) Sea menor que 5 si es menor que 15.

(*d*) Esté comprendido entre 10 y 20 sabiendo que está comprendido entre 5 y 25.

673. La probabilidad de que un estudiante elija Tecnología y Español es 0,1. La probabilidad de que escoja Tecnología es 0,6. ¿Cuál es la probabilidad de que escoja Español un estudiante que ha escogido Tecnología?

674. U y V son sucesos mutuamente excluyentes. Se sabe que $\mathrm{p}\,(U) = 0{,}26$ y $\mathrm{p}\,(V) = 0{,}37$. Calcular:

(*a*) $\mathrm{p}\,(U \cap V)$

(*b*) $\mathrm{p}\,(U|V)$

(*c*) $\mathrm{p}\,(U \cup V)$

675. La siguiente tabla muestra datos correspondientes a 50 jugadores de tenis:

	Zurdos	Diestros	Total
Hombres	5	32	37
Mujeres	2	11	13
Total	7	43	50

Se selecciona al azar un jugador del grupo. Calcular la probabilidad de que sea:

(*a*) Hombre y zurdo

(*b*) Diestros

(*c*) Diestra sabiendo que se trata de una mujer

676. Si $\mathrm{p}\,(A) = 0{,}4$, $\mathrm{p}\,(B) = 0{,}6$, $\mathrm{p}\,(C) = 0{,}3$, $\mathrm{p}\,(A \cap B) = 0{,}24$, $\mathrm{p}\,(B \cap C) = 0{,}15$ y $\mathrm{p}\,(A \cup C) = 0{,}52$, ¿Cuáles de los sucesos A, B y C son independientes?

677. Se extrae una carta de una baraja de 52 cartas. Sean los sucesos: $A =$ “la carta extraída es una reina”, $B =$ “el color de la carta extraída es rojo” y $C =$ “la carta es una figura”.

¿Cuáles de estos sucesos son independientes? Explicar la respuesta.

678. Si $\mathrm{p}\,(A) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{p}\,(A \cup B) = \frac{5}{6}$ y $\mathrm{p}\,(B|A) = \frac{3}{4}$ calcular $\mathrm{p}\,(B)$. ¿Son independientes los sucesos A y B?

679. Los sucesos A y B son independientes y tales que $\mathrm{p}\,(A) = 0{,}45$ y $\mathrm{p}\,(A \cap B) = 0{,}18$. Calcular la probabilidad:

(*a*) $\mathrm{p}\,(B)$

(*b*) $\mathrm{p}\,((A \cup B))$

(*c*) $\mathrm{p}\,(\bar{A} \cup \bar{B})$

680. En una caja hay 3 bolas blancas y 7 bolas negras. Se sacan sucesivamente y sin reemplazamiento dos bolas de la caja.

(*a*) Dibujar el diagrama en árbol que representa esta información.

(*b*) Calcular la probabilidad de que (I) Ambas bolas sean blancas (II) Ambas bolas sean negras.

681. Una estantería contiene 12 juguetes, 7 coches y 5 camiones. Un niño coge 2 juguetes de la estantería:

(*a*) Dibujar el diagrama en árbol que representa esta información.

(*b*) Calcular la probabilidad de que (I) Ambos juguetes sean coches (II) Escoja al menos un coche.

682. Un jugador de tenis ha observado que cuando entra su primer servicio, la probabilidad de que gane el punto es 0,75. En cambio, cuando juega con el segundo servicio la probabilidad es 0,45. El primer servicio entra 3 de cada 5 veces y el segundo 3 de cada 4.

(*a*) Calcular la probabilidad de que este jugador gane el próximo punto que juega con su servicio.

(*b*) Supuesto que ha ganado el punto, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho jugando con su primer servicio?

683. Se tienen dos cajas. La primera caja contiene 9 cartas numeradas de 1 a 9 y la segunda contiene 5 cartas numeradas de 4 a 8. Se escoge al azar una caja y se extrae de ella una carta.

(*a*) Calcular la probabilidad de obtener una carta con un número par.

(*b*) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta par se haya extraído de la primera caja?

684. En una fábrica 2 máquinas hacen cerraduras y las cerraduras se guardan en un almacén. La primera máquina produce el 60 % de las cerraduras de las que el 5 % son defectuosas mientras que sólo lo son el 2 % de las cerraduras producidas por la segunda máquina. Se selecciona al azar una cerradura del almacén:

(*a*) ¿Cuál es la probabilidad de que la cerradura seleccionada sea defectuosa?

(*b*) Supuesto que la cerradura seleccionada sea defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que fuera producida por la primera máquina?

685. En una caja hay 14 bolas blancas y 16 bolas negras mientras que, en una segunda caja hay 7 blancas y 12 negras. Se saca una bola de la primera caja y se coloca en la segunda. Después, se extraen dos bolas de la segunda caja.

(*a*) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean negras?

(*b*) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la primera caja fuera blanca si las dos bolas extraídas de la segunda han sido blancas?

686. Un espacio muestral contiene dos sucesos A y B que cumplen $\mathrm{p}\,(B) = \frac{2}{3}$, $\mathrm{p}\,(A|B) = \frac{5}{6}$ y $\mathrm{p}\,(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{1}{4}$.

(*a*) Dibujar el diagrama en árbol correspondiente a esta información.

(*b*) Calcular (I) $\mathrm{p}\,(A)$ (II) $\mathrm{p}\,(B|A)$ (III) $\mathrm{p}\,(\bar{A}|\bar{B})$

687. Un estudio llevado a cabo sobre un gran número de personas muestra que un 18 % tienen problemas de pulmón. De éstos, un 70 % son fumadores empedernidos, otro 20 % son fumadores ocasionales y, finalmente, un 10 % son no fumadores. De los que no tienen problemas de pulmón se encuentra que un 5 % son fumadores empedernidos, un 15 % son fumadores ocasionales y un 80 % son no fumadores. Se escoge al azar una persona del grupo.

(*a*) Calcular la probabilidad de que sea un no fumador.

(*b*) Calcular la probabilidad de que tenga problemas de pulmón si es un fumador empedernido.

688. Se tienen tres urnas A, B y C. En la urna A hay 2 cubos blancos y 4 cubos rojos, en la urna B hay 5 blancos y 3 rojos y en la urna C hay 4 blancos y 6 rojos. Se elige una urna al azar y se extrae un cubo de ella:

(*a*) Calcular la probabilidad de sacar un cubo rojo.

(*b*) Supuesto que se ha extraído un cubo rojo, calcular la probabilidad de que se haya extraído de la urna C.

689. Se eligen al azar y sin reemplazamiento dos letras del conjunto $\{a, b, c, d, e, f, o\}$. Después se elige una tercera letra. ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera letra sea una vocal?

690. El 25 % de los aparatos que llegan a un servicio técnico tienen garantía. Entre los que no tienen garantía, un 20 % ya fueron reparados en otra ocasión. Finalmente, el 5 % de los aparatos tienen garantía y además ya fueron reparados en otra ocasión.

(*a*) ¿Qué porcentaje de los aparatos que llegan al servicio técnico ya fueron reparados en otra ocasión?

(*b*) ¿Qué porcentaje no fueron reparados en otra ocasión y además no tienen garantía?

(*c*) Un aparato que acaba de llegar ya fue reparado en otra ocasión. ¿Qué probabilidad hay de que tenga garantía?

691. Sean A y B dos sucesos tales que $\mathrm{p}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{p}(\bar{B}) = \frac{2}{5}$ y $\mathrm{p}(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$. Calcular:
   (a) $\mathrm{p}(B|A)$
   (b) $\mathrm{p}(\bar{A}|B)$

692. En una clase de 20 alumnos hay 12 que estudian Biología, 15 que estudian Historia y 2 alumnos que no estudian ni Biología ni Historia.
   (a) Represente esta información en un diagrama de Venn.
   (b) Halle la probabilidad de que un alumno de esta clase elegido al azar esté estudiando ambas asignaturas: Biología e Historia.
   (c) Sabiendo que un alumno dado, elegido al azar, estudia Biología, halle la probabilidad de que este alumno también estudie Historia.

693. Una bolsa contiene diez monedas equilibradas. Cinco de dichas monedas tienen cara y cruz, otras tres son monedas con dos caras y las dos restantes son monedas con dos cruces. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza.
   (a) Calcúlese la probabilidad de que salga cara en dicho lanzamiento.
   (b) Si en el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida tenga cara y cruz?

Soluciones:

(646) (a) $\frac{6}{36}$ (b) $\frac{9}{36}$ (c) $\frac{3}{36}$ (d) $\frac{12}{36}$
(647) (a) $\{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$ (b) $\frac{3}{8}$
(648) (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{3}{4}$ (e) $\frac{3}{8}$
(649) (a) $\frac{6}{12}$ (b) $\frac{8}{12}$ (c) $\frac{10}{12}$ (d) $\frac{4}{12}$ (e) $\frac{10}{12}$
(650) $\frac{11}{60}$
(651) (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{2}$
(652) $\frac{8}{25}$
(653) (a) $\frac{11}{32}$ (b) $\frac{9}{32}$
(654) (a) 0,33 (b) 0,24 (c) 0,30
(655) (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{4}$
(656) (a) 0,6 (b) 0,4 (c) 0,9
(657) (a) 300 (b) (I) $\frac{91}{300}$ (II) $\frac{55}{300}$ (III) $\frac{77}{150}$
(658) $\frac{2}{15}$
(659) (a) $\frac{3}{28}$ (b) $\frac{15}{28}$
(660) (a) $\frac{7}{22}$ (b) $\frac{35}{66}$
(661) (a) $\frac{1}{22}$ (b) $\frac{3}{11}$ (c) $\frac{41}{55}$
(662) (a) 0,3 (b) 0,1 (c) 0,7
(663) 0,55
(664) (a) 0,95 (b) 0,35 (c) 0,75
(665) (a) 0,7 (b) 0,35 (c) 0,15
(666) (a) (I) 0,21 (II) 0,33 (b) 252
(667) (a) 0,204 (b) 0,53 (c) 0,598
(668) (a) $\frac{4}{10}$ (b) $\frac{6}{10}$ (c) $\frac{5}{10}$
(669) (a) 11 (b) (I) $\frac{25}{53}$ (II) $\frac{11}{53}$
(670) (a) 12 (b) (I) $\frac{8}{27}$ (II) $\frac{4}{27}$ (III) $\frac{3}{5}$
(671) (a) 0,20 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{7}{15}$
(672) (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$
(673) $\frac{1}{6}$
(674) (a) 0 (b) 0 (c) 0,63
(675) (a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{43}{50}$ (c) $\frac{11}{13}$

13. Variable aleatoria

694. Una variable aleatoria discreta tiene la siguiente función de probabilidad:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0,21	0,25	0,41	a	0,01

Calcular: (a) El valor de a (b) $\mathrm{p}\,(1 \leq X \leq 3)$ (c) $\mathrm{p}\,(X \leq 3)$

695. La variable aleatoria discreta X tiene la siguiente función de probabilidad:

$$f(x) = \mathrm{p}\,(X = x) = k(4 - x)$$

para $x = 0, 1, 2, 3$ y $f(x) = 0$ para los demás valores de x.

Calcular: (a) El valor de la constante k (b) $\mathrm{p}\,(1 \leq X < 3)$.

696. Una variable aleatoria discreta X tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	1	5	10
$\mathrm{p}\,(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Calcular el valor de (a) $E(X)$ (b) $E(X^2)$ (c) $\mathrm{Var}\, X$ (d) Desviación típica de X

697. Una variable aleatoria discreta X puede tomar solamente los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5. La distribución de probabilidad está dada en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{p}\,(X = x)$	a	a	a	b	b	b

Si se verifica que $\mathrm{p}\,(X \geq 2) = 3\mathrm{p}\,(X < 2)$: (a) Calcular los valores de a y b (b) Calcular los valores esperados de X y de X^2 (c) Calcular la varianza de X

698. Una variable aleatoria T toma solo valores enteros y tiene una función de probabilidad definida por:

$$f(t) = \mathrm{p}\,(T = t) = \begin{cases} kt^2 & \text{si } t = 1, 2, 3 \\ k(8 - t)^2 & \text{si } t = 4, 5, 6, 7 \\ 0 & \text{para los demás valores} \end{cases}$$

donde k es una constante:

(a) Calcular el valor de k.

(b) Calcular $\mathrm{p}\,(T = 4)$, $\mathrm{p}\,(T \leq 4)$ y $\mathrm{p}\,(T = 4 | T \leq 4)$

(c) Calcular $\mathrm{E}(t)$ y $\mathrm{Var}(t)$.

(d) Determinar la moda de T

699. Una variable aleatoria discreta tiene una distribución de probabilidad que se expresa en la siguiente tabla:

x	5	10	15	20	25	30
$\mathrm{p}\,(X = x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

(a) Calcular $\mathrm{p}\,(X \leq 15)$

(b) Construir la tabla de la función de distribución para esta variable aleatoria.

(c) Calcular la mediana de la distribución.

700. Un centro de llamadas de emergencia tiene en servicio 5 líneas que operan 24 horas diarias. La variable aleatoria L es el número de líneas en uso para períodos de 5 minutos. La distribución de probabilidades es la siguiente:

n	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{p}(L=n)$	0,07	0,21	0,25	0,31	0,12	0,04

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos tres líneas estén en uso simultáneamente?

(b) Calcular la media y la varianza de L

(c) Construir la tabla para la función de distribución de esta variable.

(d) Calcular el valor de la mediana.

701. Un dado tiene sus caras numeradas 1, 2, 2, 3, 3 y 3. Se lanza el dado dos veces y se representa mediante la variable aleatoria S la suma de los valores obtenidos.

(a) Construir las tablas para la función de probabilidad y la función de distribución de S.

(b) Calcular la media, la mediana y la moda de S.

(c) Calcular la desviación típica de S.

702. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria X está dada por $f(x) = kx$ donde $x = 1, 2, \ldots, n$ y k es un parámetro.

(a) Demostrar que $k = \frac{2}{n^2+n}$

(b) Calcular el valor esperado de X.

703. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta X está dada por $f(x) = 3^{a-x}$ donde $x = 1, 2, 3, \ldots$ y a es un parámetro:

(a) Demostrar que $a = \log_3 2$.

(b) Calcular una expresión de la función de distribución de X.

704. Se lanza una moneda diez veces. Calcular la probabilidad de obtener (a) exactamente 4 caras (b) al menos seis caras (c) no más de cinco caras

705. Una moneda está trucada de modo que la probabilidad de obtener cara es de 0,6. Calcular la probabilidad de obtener (a) exactamente 2 caras cuando la monedad se lanza 5 veces (b) al menos 3 caras cuando la moneda se lanza 7 veces (c) más caras que cruces cuando la moneda se lanza 9 veces

706. En la producción en masa de bombillas la probabilidad de que una de ellas sea defectuosa es de 1 %. Se seleccionan bombillas al azar y se ponen en cajas de ocho.

(a) Si se elige una caja al azar calcular la probabilidad de que contenga (I) al menos una bombilla defectuosa (II) no más de dos bombillas defectuosas

(b) Supuesto que la caja que se ha elegido al azar contiene al menos una bombilla defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que contenga exactamente dos bombillas defectuosas?

707. Sea $X \sim \mathrm{B}(6; 0{,}35)$. Calcular:

(a) La moda a de X.

(b) La mediana b de X

(c) $\mathrm{p}(X < 2a | X > b)$

708. Sea $X \sim \mathrm{B}(6; 0{,}4)$:

(a) Construir tres tablas para la función de distribución binomial de X cuando $n = 2$, $n = 5$ y $n = 10$.

(b) Supuesto que $\mathrm{p}(X \leq 10) > 0{,}5$ calcular el valor más grande de n.

709. Si $X \sim \mathrm{B}(n; 0{,}3)$ y $\mathrm{p}(X > 3) > 0{,}7$ encontrar el valor más pequeño de n.

710. La probabilidad de que Joe dé en el blanco ees de 0,6. Calcular el menor número de intentos que necesita Joe para poder asegurar que la probabilidad de dar en el blanco al menos una vez es mayor que 95 %.

711. Si $X \sim \mathrm{B}(8; 0{,}4)$ calcular (a) $\mathrm{p}(X = 5)$ (b) $\mathrm{p}(X \leq 5)$ (c) $\mathrm{p}(X < 5)$ (d) La media de X (e) La varianza de X.

712. Sabiendo que $Y \sim \mathrm{B}(7; 0{,}3)$ calcular (a) $\mathrm{p}(Y = 1) + \mathrm{p}(Y = 2)$ (b) $\mathrm{p}(Y \leq 2)$ (c) $\mathrm{p}(Y \geq 2)$ (d) la mediana de Y

713. Si $T \sim B\left(5; \frac{1}{2}\right)$:
   (a) Demostrar que $\mathrm{p}(T = 5) = \frac{1}{32}$.
   (b) Construir la tabla de la distribución de probabilidad de T. a partir de ella calcular la moda de T.
   (c) Construir la tabla para la función de distribución de T.
   (d) Calcular la mediana de T.

714. La probabilidad de que llueva en un día de junio en Villaseca es 0,02.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que llueva exactamente 3 días de junio en esa ciudad?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva los cinco primeros días de junio?
   (c) ¿Cuál es el valor esperado para el número de días de lluvia en junio en Villaseca?

715. Una variable aleatoria R sigue una distribución binomial $\mathrm{B}(n; p)$ con media 2 y varianza 1,5. Calcular los valores de n y p.

716. En un test de elección múltiple hay 20 preguntas. Para cada una de ellas puede elegirse entre cuatro respuestas y solamente una de ellas es correcta.
   (a) Si un estudiante elige al azar las respuestas, calcular la probabilidad de obtener (I) ninguna correcta (II) más de diez correctas (III) no más de cinco correctas
   (b) Calcular la media y la desviación típica del número de respuestas correctas.
   (c) Supóngase que cinco estudiantes eligen al azar las respuestas. ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellos obtengan más de diez respuestas correctas?

717. En una gran ciudad el 18 % de la población son zurdos. Si se elige una muestra de 10 personas de esta ciudad:
   (a) Calcular la probabilidad de que exactamente dos de ellas sean zurdas.
   (b) Calcular la probabilidad de que al menos una persona de la muestra sea zurda.
   (c) Calcular el número más probable de zurdos en la muestra

   Si se elige otra muestra de 25 personas

   (d) ¿Cuál es el valor esperado para el número de personas zurdas en la muestra?
   (e) Calcular la varianza para el número de personas zurdas en la muestra.

   Si ahora se selecciona al azar una muestra de tamaño n

   (f) Calcular el valor mínimo de n para el que la probabilidad de que contenga al menos 2 personas zurdas sea mayor que el 95 %.

   En la misma ciudad el porcentaje de mujeres zurdas es del 16 % y el de hombres zurdos es del 22 %. se selecciona al azar una muestra de cinco mujeres y cinco hombres de la ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra contenga al menos una mujer zurda y un hombre zurdo?

718. Sea $X \sim \mathrm{Po}(m)$. Calcular $\mathrm{p}(X = x)$ para $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ y dibujar diagramas para ilustrar las distribuciones para $m = 1,\ 3$ y 5.

719. Si $X \sim \mathrm{Po}(3)$ calcular las probabilidades (a) $\mathrm{p}(X = 3)$ (b) $\mathrm{p}(X < 3)$ (c) $\mathrm{p}(X > 3)$ (d) $\mathrm{p}(X = 4 | X > 3)$

720. El número de accidentes por semana en una escuela se puede representar por una distribución de Poisson de media 0,7. Calcular la probabilidad de que en una semana elegida al azar haya *a*) $p(X = 3)$ *b*) exactamente dos accidentes *c*) al menos dos accidentes

721. El número de bacterias por mililitro en un cierto líquido sigue una distribución de Poisson de media 3. Calcular la probabilidad de que en un mililitro de líquido haya (*a*) $p(X = 3)$ (*b*) al menos 4 bacterias (*c*) no más de dos bacterias.

722. Si $X \sim \text{Po}(m)$ calcular el valor de m si $p(X = 1) = 0{,}1$.

723. Si $X \sim \text{Po}(m)$ calcular el valor de m si $p(X \leq 1) = 0{,}5$

724. El número de bacteria por mililitro en un líquido dado es 3,5. Calcular la probabilidad de que (*a*) $p(X = 3)$ (*b*) en 2 mililitros de líquido haya menos de 7 bacterias (*c*) en 0,5 mililitros del líquido haya al menos 2 bacterias.

725. La media de fallos por metro cuadrado de tejido producido por una máquina es 0,01. Si los fallos ocurren al azar y su número sigue una distribución de Poisson calcular la probabilidad de que:
   (*a*) En 100 metros cuadrados elegidos al azar haya exactamente dos fallos.
   (*b*) En 25 metros cuadrados elegidos aleatoriamente haya al menos un fallo.

726. Si $X \sim \text{Po}(3{,}5)$:
   (*a*) Calcular (I) $p(X = 3)$ (II) $p(X > 3)$ (III) $p(X < 5 | X > 3)$
   (*b*) Obtener los valores de $E(X)$ y $\text{Var}(X)$.
   (*c*) A partir del resultado anterior, obtener $E(X^2)$.

727. Una variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson de media m y cumple:

$$p(X = 0) + p(X = 1) - p(X = 4) = 0$$

   (*a*) Calcular m con dos cifras decimales.
   (*b*) Calcular $p(2 \leq X \leq 4)$.

728. Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson tal que $p(X > 3) = 0{,}555$. Calcular $p(X < 3)$.

729. La variable aleatoria P sigue una distribución de Poisson con media $\lambda > 0$. Sea p la probabilidad de que P tome los valores 0, 1 o 2.
   (*a*) Calcular p en función de λ.
   (*b*) Demostrar que $p(\lambda)$ es decreciente.
   (*c*) Esbozar el gráfico de $p(\lambda)$ para $0 < \lambda \leq 6$ estudiando la concavidad y los puntos de inflexión.

730. Las precipitaciones anuales de una región son, en media, de 2000 ml/m^2 con una desviación típica de 300 ml/m^2. Calcular, suponiendo que la distribución es normal, la probabilidad de que en un año determinado la lluvia no supere los 1200 ml/m^2.

731. En un examen realizado a gran número de alumnos se comprobó que las calificaciones se distribuían de acuerdo a una normal de media 6 y desviación típica 1. Elegido un alumno al azar calcular la probabilidad de que su calificación esté comprendida entre 6,7 y 7,1

732. El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal $N(200, 50)$ Se extrae una trucha al azar.
   (*a*) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso no exceda los 175 gramos?
   (*b*) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea superior a los 230 gramos?
   (*c*) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso esté comprendido entre 225 y 275 gramos?
   (*d*) Al 30 % de las truchas de peso inferior se les clasifica como de *segunda*; al 30 % de mayor peso como *especial* y al resto como de *primera*. Calcular los pesos fronteras entre dichas categorías.

733. La compañía aérea *Avión* sabe que el tiempo de retraso de sus vuelos sigue una distribución normal de media 10 minutos y desviación típica 5 minutos.
   (a) Calcula la probabilidad de que un vuelo no tenga retraso.
   (b) Calcula la probabilidad de que el próximo vuelo llegue con menos de 10 minutos de retraso.
   (c) Probabilidad de que el próximo vuelo llegue con no más de 20 minutos de retraso.

734. Un saco que contiene 400 monedas es vaciado sobre una mesa. Halla la probabilidad de que:
   (a) Aparezcan más de 210 caras.
   (b) El número de caras sea menor que 180.
   (c) El número de caras esté comprendido entre 190 y 210, ambos incluidos.

735. Un estudio ha demostrado que en un barrio el 60 % de los hogares tienen al menos dos televisores. Se elige, al azar, una muestra de 50 hogares. Calcula la probabilidad de:
   (a) Al menos 20 de los citados hogares tengan dos o más televisores.
   (b) Entre 30 y 40 hogares tengan como mínimo dos televisores.

736. Tras un test de cultura general se ha obtenido que las puntuaciones siguen una normal $\mathrm{N}(65, 18)$. Se desea clasificar a los examinados en tres grupos: A (de bajo nivel cultural), B (de nivel cultural medio) y C (de nivel cultural elevado), de manera que en el grupo A esté el 20 % de la población, en el grupo B el 65 % y en el grupo C el 15 %. ¿Cuáles han de ser la puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?

737. Aplicado un test a un grupo de 400 personas se ha obtenido que las puntuaciones siguen una distribución $\mathrm{N}(60, 5)$. Calcular la puntuación que marca el percentil 67.

738. Las edades de los 450 espectadores que asisten a una representación teatral se distribuyen de acuerdo a la siguiente tabla:

Edad	[0, 15)	[15, 30)	[30, 45)	[45, 60)	[60, 75)
Personas	19	95	218	102	16

   (a) Representar dichos datos mediante un histograma y dibujar el polígono de frecuencias correspondiente.
   (b) A la vista de los resultados anteriores ajustar, si parece adecuado, dicha distribución empírica mediante una distribución normal.
   (c) Calcular el número de espectadores, correspondientes a cada grupo de edad, que habría de acuerdo a la distribución normal encontrada en el apartado anterior.

739. En una máquina tragaperras hay 3 ventanas en las que aparecen frutas con estas probabilidades: 1 limón 40 %, 1 pera 30 %, 1 cereza 20 %, 1 naranja 10 %. Jugar cuesta 2 euros y los premios son: 3 naranjas 20 euros, 2 naranjas y una cereza 15 euros, 3 cerezas 10 euros, 3 limones 8 euros. Después de jugar 40 veces. ¿Cuánto esperamos ganar?.

740. Una variable aleatoria continua tiene como función densidad de probabilidad la siguiente:

$$\mathrm{p}\,(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ k & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

   (a) Demostrar que $k = \frac{2}{3}$.
   (b) Calcular $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.
   (c) Demostrar que la mediana de X es $\frac{1}{36}$ mayor que la media.
   (d) Hallar el valor de la constante a para que $\mathrm{p}\,(X > \mathrm{E}(X) - a) = 0{,}95$

741. Si $X \sim \mathrm{N}(\mu, 9)$, calcular μ si $\mathrm{p}\,(X \leq 5) = 0{,}754$.

742. Sea $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Calcular los valores de μ y σ si $\mathrm{p}\,(X \leq 1) = 0{,}345$ y $\mathrm{p}\,(X \leq 3) = 0{,}943$.

743. La variable aleatoria X se distribuye normalmente con una media μ y una varianza σ^2. Sabiendo que $\mathrm{p}\,(X > 58{,}44) = 0{,}022$ y $\mathrm{p}\,(X < 48{,}44) = 0{,}012$ calcular los valores de μ y σ.

744. Se utiliza una máquina para llenar bolsas de un kilo de harina. Cuando se comprueban las bolsas se encuentra que su peso medio es de 1,03 kg. Suponiendo que el peso de las bolsas se distribuye normalmente, calcular la desviación típica si el $1,8\,\%$ de las bolsas pesa menos de un kilo.

745. Una variable aleatoria X se distribuye normalmente con media μ y desviación típica σ y, además, $\mathrm{p}\,(X > 50{,}1) = 0{,}119$ y $\mathrm{p}\,(X < 43{,}6) = 0{,}305$:
   (*a*) Obtener los valores de μ y σ.
   (*b*) A partir del resultado anterior, calcular $\mathrm{p}\,\left(|X - \mu| < \frac{\sigma}{2}\right)$

746. Una gran feria de muestras ha reunido datos de asistencia a sus exposiciones. El próximo fin de semana va tener lugar una exposición importante y los datos recogidos muestran que el promedio de asistencia diaria a este tipo de acontecimientos es de 7850 personas con una desviación típica de 367 personas.
   (*a*) ¿Cuál es la probabilidad de que más de 7000 personas intenten asistir a la exposición el sábado?
   (*b*) Si la capacidad del centro es de 8500 personas, ¿cuál es la probabilidad de que el centro se llene?

   Los datos también muestran que, cada día, la hora de llegada media de los visitantes es 155 minutos después de la apertura.
   (*c*) Suponiendo que la hora de llegada de los visitantes al centro sigue una distribución de Poisson, calcúlese el porcentaje de visitantes que llegarán en las primeras tres horas después de la apertura de la exposición el sábado.

747. Una máquina expendedora de café vierte cafés de diferentes tipos en vasos. Los datos que se conocen muestran que la cantidad de café dispensado por la máquina sigue una distribución normal de media 120 ml y desciación típica 8,3 ml.
   (*a*) Si los vasos tienen una capacidad de 130 ml ¿cuál es la probabilidad de que el café rebose del vaso?
   (*b*) Si la máquina está cargada con 500 de estos vasos, ¿cuántos de ellos se espera que rebosen con el café?
   (*c*) Los datos recogidos muestran también que la máquina dispensa el vaso correctamente un $99\,\%$ de las veces. El señor Li usa la máquina dos veces diarias y paga cada vez 2 yuans. ¿Cuántos días es probable que use la máquina hasta que pierda 5 yuans debido al error de la máquina al dispensar los vasos.

748. El peso W, en gramos, de los gorriones hembras (en adelante gorrionas) puede representarse mediante una distribución normal de media μ y desviación típica σ.
   (*a*) Los datos experimentales muestran que el $84\,\%$ de las gorrionas pesan al menos 20 g y un $44\,\%$ de ellas pesan mas de 22,5 g. Calcular los valores de μ y σ con 5 cifras decimales correctas.
   (*b*) Se recoge una muestra aleatoria de cinco gorrionas. Si B es el número de pájaros en la muestra que pesa más de 23 g calcular la probabilidad $\mathrm{p}\,(2 \leq B \leq 4)$.
   (*c*) Un investigador piensa que el número de huevos E que ponen estas gorrionas sigue una distribución de Poisson de media m. Dado que $\mathrm{p}\,(E \geq 4) = 0{,}9071$ determinar con cuatro cifras decimales correctas el valor de m y dar una razón de por qué esta distribución no puede ser un modelo exacto en este caso.

749. La pérdida de peso, en kilogramos, de las personas que siguen el régimen adelgazante *DELGAMÁS* durante un período de tres meses está modelizada por una variable aleatoria X. Los datos experimentales mostraron que el $67\,\%$ de las personas que utilizaron *DELGAMÁS* perdieron hasta cinco kilogramos, mientras que el $12{,}4\,\%$ perdieron al menos siete kilogramos.

Suponiendo que X sigue una distribución normal, halle la pérdida de peso esperada para una persona que siga durante tres meses la dieta *DELGAMÁS*

750. Tim va a un conocido restaurante donde no se puede reservar mesa. Se ha determinado que los tiempos de espera hasta que se consigue una mesa siguen una distribución normal, de media 18 minutos y desviación típica 4 minutos.

    (*a*) Tim dice que se marchará si 25 minutos después de haber llegado al restaurante todavía no ha conseguido mesa. Halle la probabilidad de que Tim se vaya del restaurante sin haber conseguido mesa.

    (*b*) Tim lleva esperando 15 minutos. Halle la probabilidad de que Tim consiga una mesa durante los próximos cinco minutos.

751. (*a*) Ahmed está escribiendo con el ordenador las preguntas de la *Sección A* de un examen de matemáticas. El número de errores que comete, X, sigue una distribución de Poisson de media 3,2. Halle la probabilidad de que Ahmed cometa exactamente cuatro errores.

    (*b*) Su colega Levi está escribiendo con el ordenador la *Sección B* del examen. El número de errores que comete, Y, sigue una distribución de Poisson de media m.

    (I) Si $E(Y^2) = 5{,}5$ halle el valor de m.

    (II) Halle la probabilidad de que Levi cometa exactamente tres errores.

    (*c*) Sabiendo que X e Y son independientes, halle la probabilidad de que Ahmed cometa exactamente cuatro errores y Levi cometa exactamente tres errores.

752. La variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson de media λ.

    (*a*) Halle λ, si $\mathrm{p}\,(X = 0) + \mathrm{p}\,(X = 1) = 0{,}123$.

    (*b*) Con este valor de λ, halle $\mathrm{p}\,(0 < X < 9)$

753. El tiempo que tardan los autobuses en hacer el recorrido entre dos ciudades dadas sigue una distribución normal, de media igual a 45 minutos y desviación típica igual a 7 minutos.

    (*a*) Halle la probabilidad de que un autobús elegido al azar tarde menos de 40 minutos en hacer el viaje.

    (*b*) El 90 % de los autobuses tardan menos de t minutos en hacer el viaje. Halle el valor de t.

    (*c*) Para una muestra aleatoria de 10 autobuses se registra la duración del viaje entre las dos ciudades. Halle la probabilidad de que exactamente 6 de estos autobuses tarden menos de 40 minutos en hacer el viaje.

754. El número de accidentes de autobús que hay durante un intervalo de tiempo dado sigue una distribución de Poisson, siendo la media igual a 0,6 accidentes por día.

    (*a*) Halle la probabilidad de que, en un día cualquiera elegido al azar, haya al menos dos accidentes.

    (*b*) Halle el número más probable de accidentes que hay en un día cualquiera elegido al azar. Justifique su respuesta.

    (*c*) Halle la probabilidad de que no haya ningún accidente en toda una semana (de siete días) elegida al azar.

Soluciones:

(694) (*a*) 0,12 (*b*) 0,87 (*c*) $0,87$

(695) (*a*) $k = \frac{1}{10}$ (*b*) $\frac{1}{2}$

(696) (*a*) 6,2 (*b*) 50,2 (*c*) $11,76$ (*d*) 3,43

(697) (*a*) $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{5}{24}$ (*b*) $\mathrm{E}(X) = \frac{23}{8}$, $\mathrm{E}(X^2) = \frac{265}{24}$ (*c*) $\mathrm{Var}(X) = \frac{533}{192}$

(698) (*a*) $k = \frac{1}{44}$ (*b*) $\frac{4}{11}$, $\frac{15}{22}$ y $\frac{8}{15}$ (*c*) 4 y $\frac{17}{11}$ (*d*) 4

(699) (*a*) 0,4 (*b*) $*$ (*c*) 20

(700) (*a*) 0,47 (*b*) 2,32 y 1,54 (*c*) $*$ (*d*) 2

(701) (*a*) $*$ (*b*) $\frac{14}{3}$, 5, 5 (*c*) 1,05

(702) $(a) * (b)\ \frac{2n+1}{3}$
(703) $(a) * (b)\ F(x) = 1 - 3^{-x}$
(704) (a) 0,205 (b) 0,377 (c) 0,630
(705) (a) 0,2304 (b) 0,9037 (c) $0,733$
(706) (a) 0,0773, 0,999946 (b) 0,0341
(707) (a) 2 (b) 2 (c) $0,667$
(708) $(a) * (b)$ 26
(709) 15
(710) 4
(711) (a) 0,1239 (b) 0,9502 (c) 0,8263 (d) 3,2 (e) 0,192
(712) (a) 0,647 (b) 0,647 (c) 0,671 (d) 2
(713) $(a) * (b)$ 2, 3 $(c) * (d)$ 2
(714) (a) 0,188 (b) 0,9039 (c) $0,6$
(715) $n = 8$, $p = 0{,}25$
(716) (a) 0,00317, 0,00394, 0,617 (b) 5, 0,387 (c) $0,000154$
(717) (a) 0,298 (b) 0,8626 (c) 1 (d) 4,5 (e) 3,69, 0,414

(718)

	1	2	3	4	5
$m = 1$	0,368	0,184	0,0613	0,0153	0,00307
$m = 3$	0,149	0,224	0,224	0,168	0,101
$m = 5$	0,0337	0,842	0,140	0,175	0,175

(719) (a) 0,224 (b) 0,423 (c) $0,353$ (d) 0,476
(720) (a) 0,0284 (b) 0,122 (c) $0,156$
(721) (a) 0,224 (b) 0,353 (c) $0,423$
(722) 3,57
(723) 1,68
(724) (a) 0,216 (b) 0,450 (c) $0,522$
(725) (a) 0,184 (b) 0,221
(726) (a) 0,216, 0,463, 0,407 (b) 3,5, 3,5 (c) $15,75$
(727) (a) 3,1612 (b) 0,611
(728) 0,247
(729) $(a)\ p = e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)\ (b) * (c) *$
(730) 0,00383
(731) 0,1063
(732) (a) 0,3085 (b) 0,2743 (c) $0,2417$ $(d) *$
(733) (a) 0,0228 (b) 0,5 (c) $0,977$
(734) (a) 0,147 (b) 0,0202 (c) $0,706$ (estimado con la normal)
(735) (a) 0,9986 (b) 0,560
(736) 49,85, 83,66
(737) 62,20
(738) $(a) * (b)$ N(37,5; 13,0) (c) 16, 104, 196, 112, 19
(739) $-51{,}92$
(740) $(a) * (b)\ \frac{11}{9}, \frac{37}{162}$ (c) la mediana es $1,25$ (d) 0,703
(741) $\mu = -1{,}1842$
(742) $\mu = 1{,}4028$, $\sigma = 1{,}0106$
(743) $\mu = 53{,}9$ $\sigma = 2{,}25$
(744) $\mu = 0{,}0143$
(745) (a) $\mu = 45{,}6$, $\sigma = 3{,}85$ (b) 0,383
(746) (a) 0,990 (b) 0,0383 (c) 97,8 %
(747) (a) 0,114 (b) 57,1 (c) 125
(748) (a) $\mu = 21{,}76708$, $\sigma = 1{,}77693$ (b) 0,353 (c) $m = 6{,}7984$
(749) 3,77
(750) (a) $\mathrm{p}(X > 25) = 0{,}0401$ (b) $\mathrm{p}(15 < X < 20 \mid X > 15) = 0{,}601$
(751) (a) 0,1781 (b) $m = 1{,}92$, 0,1729 (c) $0,03079$
(752) (a) 3,6276 (b) 0,9212
(753) (a) 0,2375 (b) 53,97 (c) $0,01274$
(754) (a) 0,1219 (b) 0 (c) 0,015

14. Sucesiones

755. El fractal *copo de nieve* se construye de la siguiente manera: se parte de un triángulo equilátero de lado l y dividimos cada lado en tres partes iguales. Sobre la parte central de cada lado construimos un nuevo triángulo equilátero de lado $l/3$; reiteramos el proceso volviendo a construir nuevos triángulos equiláteros sobre el tercio central de cada uno de los lados de los triángulos construidos en el paso anterior. Escribir la sucesión de los perímetros de las figuras que van surgiendo al hacer esta construcción.

756. Demostrar que la sucesión

$$a_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

tiene límite 2. Averiguar a partir de qué término la distancia a 2 es menor que 0,01.

757. Si tenemos una sucesión convergente y suprimimos en ella un número finito de términos, (a) ¿cómo es la sucesión que resulta? (b) ¿y si la sucesión es divergente? (c) ¿y si es oscilante?

758. Escribir, si es posible, una sucesión (a) acotada y divergente (b) acotada y oscilante (c) no monótona y divergente (d) monótona y oscilante (e) acotada monótona y divergente.

759. Escribir una sucesión cuyo límite sea 0, cuyos términos sean todos negativos y que no sea monótona. ¿Es posible escribir una sucesión con las mismas características de la anterior y cuyo límite sea 1? ¿Por qué?

760. Calcular los límites de las siguientes sucesiones polinómicas:

(a) $\lim(3n^2 - 2n + 5)$

(b) $\lim(4 - 5n + 7n^3)$

(c) $\lim(5n^4 - 2n^3 + 3n^2 + 6n - 2)$

(d) $\lim(10 + 15n^3 - n^5)$

761. Calcula el límite de las siguientes sucesiones racionales:

(a) $\lim \dfrac{2n^2 - 3n + 5}{3n^2 + 5n + 6}$

(b) $\lim \dfrac{5n^3 - 7n + 12}{8n^3 + 6n^2 - 3n + 2}$

(c) $\lim \dfrac{4n^3 - 5n^2 + 2n + 3}{7n^2 + 3n - 8}$

(d) $\lim \dfrac{6n^2 - 7n + 10}{5n^3 + 2n^2 - 4n + 5}$

(e) $\lim \dfrac{3n^4 - 5n^2 + 4n - 2}{7n^4 + 6n^3 - 2n + 4}$

(f) $\lim \dfrac{2n^6 - 4n^3 - 8n - 6}{9n^5 + 6n^4 + 7n^3}$

(g) $\lim \dfrac{9n^4 - 6n^2 + 7}{8n^5 + 3n^3 + 8}$

(h) $\lim \dfrac{7n^9 - 4n^5 + 18}{21n^9 + 6n^6 - 5n^3}$

762. Calcula el límite de las siguientes diferencias de sucesiones divergentes:

(a) $\lim \left(\dfrac{3n^2 - 2n + 3}{2n+1} - \dfrac{6n-9}{4} \right)$

(b) $\lim \left(\dfrac{n^3 - 2n}{n^2 - 2n + 1} - \dfrac{3n^2 - 4n + 1}{n+1} \right)$

(c) $\lim \left(\dfrac{2n^2 - 4n + 3}{3n-2} - \dfrac{4n^2 - 5}{6n+1} \right)$

(d) $\lim \left(\dfrac{2n^3 - 3n}{n^2 + 3} - \dfrac{6n^2 - 2}{3n+1} \right)$

763. Resolver los siguientes límites:

(a) $\lim \left(\sqrt{n^2 - 4n + 2} - n \right)$

(b) $\lim \left(\sqrt{n^2 - 9} - n \right)$

$(c)\ \lim \dfrac{n-\sqrt{n^2-4}}{n+1}$ $(d)\ \lim \dfrac{3n-2}{n-\sqrt{n^2-1}}$

$(e)\ \lim \dfrac{\sqrt{n^2-4}-n}{\sqrt{n^2-9}-n}$ $(f)\ \lim \dfrac{n-\sqrt{n^2-2n+3}}{\sqrt{n^2+1}-n}$

764. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$ $(b)\ \lim(-1)^n(n+1)$ $(c)\ \lim(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$

$(d)\ \lim\left(\sqrt[3]{n^2}+\dfrac{1}{2n+3}\right)$ $(e)\ \lim\left(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n^2}+1\right)$ $(f)\ \lim\left(\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}$

$(g)\ \lim\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(h)\ \lim\left(\dfrac{4n^2-2n}{5n^3-2}\right)^{\frac{2n+1}{n^2}}$ $(i)\ \lim\left(\dfrac{n-3}{2n^3-1}\right)^{2n}$

765. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim\left(1+\dfrac{8}{n}\right)^n$ $(b)\ \lim\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$ $(c)\ \lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{3n}{4}}$

$(d)\ \lim\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^n$ $(e)\ \lim\left(1+\dfrac{2}{3n}\right)^n$ $(f)\ \lim\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n-3}$

$(g)\ \lim\left(1+\dfrac{5}{3n}\right)^{\frac{2n}{5}}$ $(h)\ \lim\left(\dfrac{n+4}{n-1}\right)^n$ $(i)\ \lim\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n$

$(j)\ \lim\left(\dfrac{n+3}{n+4}\right)^{2n}$ $(k)\ \lim\left(\dfrac{n+6}{n+3}\right)^{\frac{2n}{5}}$ $(l)\ \lim\left(\dfrac{n-1}{n-3}\right)^{n-2}$

$(m)\ \left(\dfrac{3n-5}{3n+1}\right)^{2n+3}$ $(n)\ \left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\frac{2n^2-3}{4}}$ $(ñ)\ \lim\left(\dfrac{n^2-3}{n^2-1}\right)^{3n-3}$

15. Progresiones aritméticas y geométricas

766. Escribir los cinco primeros términos de una progresión aritmética en la que el cuarto término es 5 y la diferencia -3.

767. Calcular el término 30 de una progresión aritmética en que al primer término es 5 y la diferencia $\frac{1}{3}$.

768. Sabiendo que el sexto término de una progresión aritmética es 4 y su diferencia $\frac{1}{2}$, calcular el término 20 y la suma de los 14 primeros términos.

769. Interpola 5 medios aritmáticos entre 3 y 27.

770. En una progresión aritmética $A_{40} = 59$ y $a_{27} = 33$. calcular la suma de los 50 primeros términos.

771. ¿Cuántos términos de la progresión aritmética $3,\ 1,\ -1,\ -3,\ -5,\ \ldots$ se deben tomar para que la suma sea -374.

772. Demostrar que en toda progresión aritmética cada término es igual a la semisuma del que le precede y el que le sigue.

773. Los ángulos de un hexágono regular forman una progresión aritmética y el menor de ellos mide 80°. Calcular los demás.

774. Calcular cuatro números en progresión aritmética sabiendo que su suma es 22 y la suma de sus cuadrados es 166.

775. En una progresión aritmética limitada de un número impar de términos, la suma de los que ocupan lugar impar es 75 y la suma de los que ocupan lugar par es 60. Calcular el término central y el número de términos.

776. Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética. Si la hipotenusa mide 20 cm, calcular el perímetro y el área de dicho triángulo.

777. ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 suman 7744?

778. Escribir el término general de las siguientes sucesiones:

(a) $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{16}{5}, \ldots$ (b) $7, \frac{7}{3}, \frac{7}{9}, \frac{7}{27}, \frac{7}{81} \ldots$ (c) $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16} \ldots$

(d) $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{27}{2}, \ldots$ (e) $4, -4, 4, -4, 4, -4 \ldots$ (f) $3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots$

779. Escribir los cinco primeros términos de la progresión geométrica en el que el cuarto término es 27 y la razón 3.

780. sabiendo que el cuarto término de una progresión geométrica es 27 y que l primero vale 1, calcular su razón, el quinto término y el producto de los nueve primeros términos.

781. En una progresión geométrica el primer término vale 7, la razón 2 y un cierto término 28672. ¿Qué lugar ocupa dicho término?

782. Interpola cuatro medios proporcionales o geométricos entre 3 y 96.

783. Si en una progresión geométrica conocemos que el primer término vale 7 y el término 15 vale 1575, calcula el producto de los 15 primeros términos.

784. Halla el producto de los 11 primeros términos de una progresión geométrica si el término central vale 2.

785. Hallar la suma de los 10 primeros términos de la sucesión $3, 6, 12, 24, \ldots$. Lo mismo para la sucesión $\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$.

786. Hallar la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada de razón $\frac{2}{3}$ cuyo primer término vale 6.

787. Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots}{\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\frac{1}{625}+\cdots}$$

788. La suma de los 8 primeros términos de una progresión geométrica es 17 veces la suma de los 4 primeros. Calcula la razón de dicha progresión.

789. Hallar tres números en progresión geométrica sabiendo que su producto es 328509 y que el mayor de ellos excede en 115 a la suma de los otros dos.

790. Hallar la fracción generatriz de las siguientes expresiones (a) $0{,}737373\ldots$ (b) $3{,}27818181\ldots$

791. A geometric sequence $u_1, u_2, u_3, \ldots$ has $u_1 = 27$ and a sum to infinity of $\frac{81}{2}$.
   (a) Find the common ratio of the geometric sequence.
   (b) An arithmetic sequence $v_1, v_2, v_3, \ldots$ is such that $v_2 = u_2$ and $v_4 = u_4$. Find the greatest value of N such that

$$\sum_{n=1}^{N} v_n > 0$$

792. An arithmetic sequence has first term a and common difference $d, d \neq 0$. The 3rd, 4th and 7th terms of the arithmetic sequence are the first three terms of a geometric sequence.

(a) Show that $a = -\frac{3}{2}d$.
(b) Show that the 4th term of the geometric sequence is the 16th term of the arithmetic sequence.

793. In the arithmetic series with n^{th} term u_n, it is given that $u_4 = 7$ and $u_9 = 22$. Find the minimum value of n so that $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n > 10000$.

794. Find the value of k if $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^r = 7$

795. La suma de los 16 primeros términos de una progresión aritmética es 212, y el quinto término es 8.
(a) Halle el primer término y la diferencia común.
(b) Halle el menor valor de n para el cual la suma de los n primeros términos es mayor que 600.

796. Cada vez que una pelota bota, alcanza un 95 % de la altura lograda en el bote anterior. Inicialmente la pelota se deja caer desde una altura de 4 metros.
(a) ¿Qué altura alcanza la pelota después del cuarto bote?
(b) ¿Cuántas veces bota la pelota antes de que ya no alcance una altura de 1 metro?
(c) ¿Cuál es la distancia total que recorre la pelota?

797. The first terms of an arithmetic sequence are
$$\frac{1}{\log_2 x},\ \frac{1}{\log_8 x},\ \frac{1}{\log_{32} x},\ \frac{1}{\log_{128} x}\ \ldots$$
Find x if the sum of the first 20 terms of the sequence is equal to 100.

798. A geometric sequence has first term a, common ratio r and sum to infinity 76. A second geometric sequence has first term a, common ratio r^3 and sum to infinity 36. Find r.

799. Los tres primeros términos de una progresión geométrica son
$$\operatorname{sen} x,\ \operatorname{sen} 2x\ 4 \operatorname{sen} x \cos^2 x, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$
(a) Halle la razón común r.
(b) Halle el conjunto de valores de x para los cuales la serie geométrica
$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + 4 \operatorname{sen} x \cos 2x + \ldots$$
es convergente.
(c) Considere
$$x = \arccos\frac{1}{4}, \quad x > 0$$
Muestre que la suma de los infinitos términos de esta serie es igual a $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

800. (a) (i) Halle la suma de todos los números enteros comprendidos entre 10 y 200 que son divisibles entre 7.
(ii) Exprese la suma anterior utilizando notación de sumatoria.
(b) En una progresión aritmética, el primer término es 1000 y la diferencia común es -6. La suma de los n primeros términos de esta progresión es negativa. Halle el menor valor de n.

801. The arithmetic sequence $\{u_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ has first term $u_1 = 1{,}6$ and common difference $d = 1{,}5$. The geometric sequence $\{v_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ has first term $v_1 = 3$ and common ratio $r = 1{,}2$.
(a) Find an expression for $u_n - v_n$ in terms of n.
(b) Determine the set of values of n for which $u_n > v_n$.
(c) Determine the greatest value of $u_n - v_n$. Give your answer correct to four significant figures.

16. Gráficas de funciones

802. A partir de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$, esbozar la gráfica de las siguientes funciones:

(a) $f(x-3)$ (b) $f(x)-2$ (c) $f(x+1)-1$

803. A partir de la gráfica de la función $y=\ln x$, esbozar la gráfica de las siguientes funciones:

(d) $\ln(x-3)$ (e) $\ln x - 2$ (f) $\ln(x+1)-1$

804. Esbozar la gráfica de las siguientes funciones indicando claramente los puntos de corte con los ejes y las ecuaciones de las asíntotas en caso de que tengan:

(a) $y=\dfrac{1}{x-2}+1$ (b) $y=3+(x-1)^2$ (c) $y=\sqrt{x-1}$

(d) $y=\dfrac{1}{(x-1)^2+1}$ (e) $y=-2+\dfrac{1}{x+1}$ (f) $y=(x+1)^3-2$

(g) $y=-2+\sqrt{x-4}$ (h) $y=1-\dfrac{1}{2-x}$ (i) $y=\ln(x-3)+2$

(j) $y=\dfrac{1}{x-2}+1$ (k) $y=e^{x+1}-1$ (l) $y=-2(2-x)^3$

805. Expresar la funciones $g(x)$ en términos de $f(x)$:

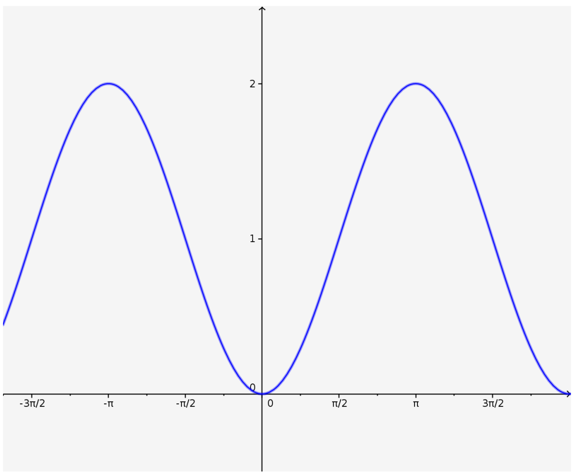
(a) $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2+6x-1$

(b) $f(x)=x^3$, $g(x)=x^3-6x^2+12x$

(c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$

(d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+4}+1$

806. La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)=\cos(x-a)+b$. Determinar a y b.



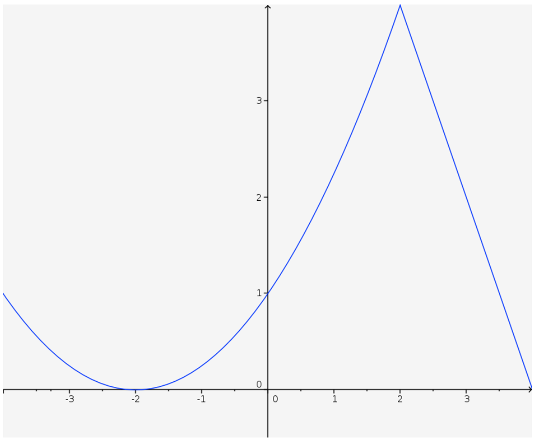
807. Sea

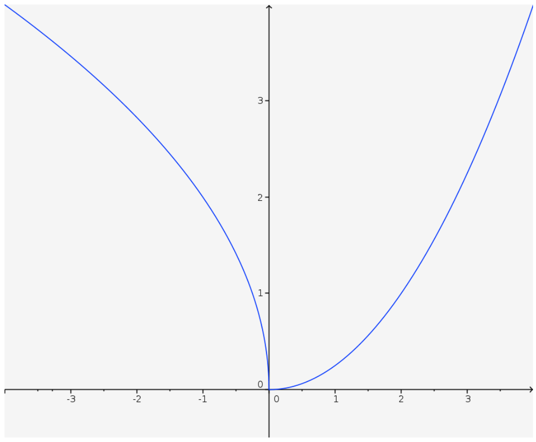
$$f(x)=\frac{k}{x-k} \qquad k>0.\ x\neq k$$

Dibuje aproximadamente la gráfica de f indicando claramente los puntos de intersección con los ejes y las asíntotas.

808. La gráfica de $y=2x^2+4x+7$ se traslada usando el vector $\binom{1}{3}$. Halle la ecuación de la gráfica trasladada, dando su respuesta en la forma $y=ax^2+bx+c$.

809. Para las siguientes gráficas de $f(x)$:





esbozar la gráfica de:

(a) $2f(x)$ (b) $\dfrac{f(x)}{3}$ (c) $f(2x)$

(d) $f\left(\dfrac{x}{3}\right)$ (e) $2f(x-2)+1$ (f) $f(2x)-1$

810. A partir de la gráfica de $f(x)=\sqrt{x}$ esboza la gráfica de:

(a) $af(x);\quad a>1$ (b) $f(bx)-a;\quad a>0,\ 0<b<1$ (c) $\frac{1}{4}f(4x)$

811. A partir de las gráficas del problema 809 esbozar las gráficas de:

(a) $y=-f(x)$ (b) $y=f(-x)$ (c) $y=|f(x)|$ (d) $y=f(|x|)$

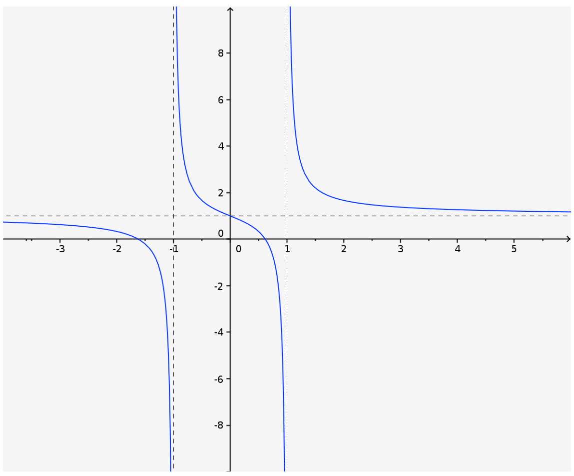
812. La gráfica de $y=\cos x$ es transformada en la gráfica de $y=8-2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$. Halle una secuencia de transformaciones geométricas sencillas que logre hacer esto.

813. Esbozar la gráfica de $y=f(x)$ y a partir de ésta esbozar la de $y=\dfrac{1}{f(x)}$ en los siguientes casos:

(a) $f(x)=(x+1)(x-2)$ (b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-2$

(c) $f(x)=x^2-7x+10$ (d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

814. A partir de la gráfica de la función $f(x)$ que se muestra a continuación:



esbozar la gráfica de $y=\dfrac{1}{f(x)}$.

17. Funciones. Límites

815. Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:

$(a)\ y = \dfrac{x+1}{x+3}$ $\qquad (b)\ y = \dfrac{1}{2x^2-5x+2}$

$(c)\ y = \dfrac{2x}{x^2+x+1}$ $\qquad (d)\ y = \dfrac{x^2+1}{x^5+x^4+x^3-x^2}$

816. Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:

$(a)\ y = \sqrt{x+3}$ $\qquad (b)\ y = \sqrt{2x^2-5x+2}$

$(c)\ y = \ln(x^2+x+1)$ $\qquad (d)\ y = \ln(x^5-x^4+x^3-x^2)$

817. Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:

$(a)\ y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ $\qquad (c)\ y = \ln\left(\dfrac{x+2}{x^2-1}\right)$

$(b)\ y = \sqrt{9-x^2}$ $\qquad (d)\ y = \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

818. Calcular las compuestas y las inversas de las funciones $f(x) = x^2+1$ y $g(x) = x-2$.

819. Lo mismo para $f(x) = \sqrt{x+3}$ y $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.

820. Lo mismo para $f(x) = e^{3x+2}$ y $g(x) = \ln(x^2-1)$

821. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim\limits_{x\to 2}(3x^2-x+5)$ $\qquad (b)\ \lim\limits_{x\to\infty}(3x^2-x+5)$

$(c)\ \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}+3\right)$ $\qquad (d)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}+3\right)$

822. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2-4x+4}$ $\qquad (b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-4x+4}$

$(c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2+x-1}{3x^2+4x+2}$ $\qquad (d)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{5x^4+3x^3+2x^2+x+1}$

823. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{3x^3-2x^2+6x+1}$ $\qquad (b)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+x+14}{x^3+x^2+2}$

$(c)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+6}{x^4-x^3+x-1}$ $\qquad (d)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4}{x^3+x^2}$

824. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$ $\qquad (b)\ \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+10x+12}{x^3+2x^2-2x+3}$

$(c)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2}$ $\qquad (d)\ \lim_{x\to -2} \dfrac{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}{x^4+4x^3+4x^2}$

825. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim_{x\to -3} \dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+7x^2+15x+9}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{x^4-6x^2+8x-3}{x^4-2x^3+2x-1}$

$(c)\ \lim_{x\to 2} \left(\dfrac{x-2}{x^2-4}-\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$ $\qquad (d)\ \lim_{x\to \sqrt{5}} \dfrac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$

826. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$

$(c)\ \lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2-2}-x\right)$ $\qquad (d)\ \lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+2}\right)$

827. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^3-x^2+1}-\sqrt{x^3-x+1}\right)$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\right)$

$(c)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ $\qquad (d)\ \lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{4x+1}{2x}\right)^x$

828. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{4x+1}{2x^2}\right)^{x^2}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x}$

$(c)\ \lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^x$ $\qquad (d)\ \lim_{x\to 2} \left(\dfrac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

829. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim_{x\to \infty} \ln x$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to \infty} \log_3 x$

$(c)\ \lim_{x\to \infty} \log_{1/2} x$ $\qquad (d)\ \lim_{x\to 0^+} \ln x$

$(e)\ \lim_{x\to 0^+} \log_5 x$ $\qquad (f)\ \lim_{x\to 0^+} \log_{1/3} x$

$(g)\ \lim_{x\to 0} \ln(1+x)$ $\qquad (h)\ \lim_{x\to 5} \log_5 x$

$(i)\ \lim_{x\to 1} \log_3 x$ $\qquad (j)\ \lim_{x\to \sqrt{3}} \log_3 \dfrac{1}{x}$

830. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to \infty} \dfrac{3x+5}{x^2+1}$ $\qquad (c)\ \lim_{x\to \infty} \dfrac{x^3-2x+1}{x^3-3x^2+2x-1}$

$(d)\ \lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2-5x+2}{x^4-1}$ $\qquad (e)\ \lim_{x\to \infty} \dfrac{x^4-3x^3+2}{4x^4+2}$ $\qquad (f)\ \lim_{x\to \infty} \dfrac{x^5-3x^3+2x}{x^3-5x+6}$

831. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ $(b)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x-1}{x^2}$ $(c)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x+3}{1+e^x}$

$(d)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{3^x}$ $(e)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2^x+x}$ $(f)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5^x}{3^x}$

832. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ $(b)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{5\ln x}$ $(c)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$

$(d)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ $(e)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\ln x}$ $(f)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

833. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$ $(b)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{3x}$ $(c)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arsen} x}{1-\cos x}$

$(d)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{artg} x}$ $(e)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x-1}$ $(f)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\operatorname{tg} x}{3x}$

834. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{x+1}$$

según los valores del parámetro α.

835. Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:

$(a)\ y=\dfrac{2x+1}{x-3}$ $(b)\ y=\dfrac{x-3}{2x+4}$ $(c)\ y=\dfrac{1}{3x-2}$

836. Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:

$(a)\ y=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$ $(b)\ y=\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$ $(c)\ y=\dfrac{1}{x^2+1}$

837. Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:

$(a)\ y=\dfrac{2x^2+1}{x-3}$ $(b)\ y=\dfrac{x^3+1}{x^2-3x+2}$ $(c)\ y=\dfrac{x^4+1}{x^2-3}$

838. Calcular las asíntotas de:

$(a)\ y=\ln(x^2-1)$ $(b)\ y=\dfrac{\ln x}{x}$ $(c)\ y=x\ln x$

839. Calcular las asíntotas de:

$(a)\ y=e^{-x}$ $(b)\ y=xe^x$ $(c)\ y=\dfrac{e^x}{x}$ $(d)\ y=e^{\frac{1}{x}}$

Soluciones:

(815) $(a)\ \mathbb{R}-\{-3\}$ $(b)\ \mathbb{R}-\{\frac{1}{2},2\}$ $(c)\ \mathbb{R}$ $(d)\ \mathbb{R}-\{0,1\}$

(816) $(a)\ [-3,\infty)$ $(b)\ \left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup[2,\infty)$ $(c)\ \mathbb{R}$ $(d)\ (1,\infty)$

(817) $(a)\ (-\infty,-3]\cup(2,\infty)$ $(b)\ (-2,-1)\cup(1,\infty)$ $(c)\ [-3,3]$ $(d)\ (0,\infty)$

(818) $(f\circ g)(x)=x^2-4x+5,\ (g\circ f)(x)=x^2-1,\ f^{-1}(x)=\sqrt{x-1},\ g^{-1}(x)=x+2$

(819) $(f\circ g)(x)=\sqrt{\frac{4x+7}{x+2}},\ (g\circ f)(x)=\frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}+2},\ f^{-1}(x)=x^2-3,\ g^{-1}(x)=\frac{1-2x}{x-1}$

(820) $(f \circ g)(x) = e^2(x^2-1)^3$, $(g \circ f)(x) = \ln\left(e^{2(3x+2)} - 1\right)$, $f^{-1}(x) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\ln x$, $g^{-1} = \sqrt{e^x+1}$

(821) (a) 15 (b) ∞ (c) ∞ (d) 3

(822) (a) ∞ (b) 0 (c) ∞ (d) $\frac{1}{5}$

(823) (a) ∞ (b) 0 (c) ∞ (d) 0

(824) (a) 2 (b) $\frac{7}{13}$ (c) $\frac{9}{17}$ (d) $\frac{5}{4}$

(825) (a) 2 (b) 2 (c) $-\frac{15}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

(826) (a) $20\sqrt{5}$ (b) -1 (c) 0 (d) $\frac{3}{2}$

(827) (a) $-\infty$ (b) ∞ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) ∞

(828) (a) 0 (b) e^{-6} (c) 1 (d) $e^{-\frac{1}{4}}$

(829) (a) ∞ (b) ∞ (c) $-\infty$ (d) $-\infty$ (e) $-\infty$ (f) ∞ (g) 0 (h) 1 (i) 0 (j) $-\frac{1}{2}$

(830) (a) ∞ (b) 0 (c) 1 (d) 0 (e) $\frac{1}{4}$ (f) ∞

(831) (a) ∞ (b) ∞ (c) 0 (d) 0 (e) ∞ (f) ∞

(832) (a) 0 (b) ∞ (c) 0 (d) 0 (e) 0 (f) no existe

(833) (a) ∞ (b) 0 (c) ∞ (d) 0 (e) -2 (f) $\frac{2}{3}$

(834) 1 si $\alpha \neq 0$, $\sqrt[4]{e}$ si $\alpha = 0$

(835) (a) $x = 3$, $y = 2$ (b) $x = -2$, $y = \frac{1}{2}$ (c) $x = \frac{2}{3}$, $y = 0$

(836) (a) $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$ (b) $x = -1$, $x = 1$, $y = 2$ (c) $y = 0$

(837) (a) $x = 3$, $y = 2x + 6$ (b) $x = 1$, $x = 2$, $y = x + 3$ (c) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

(838) (a) $x = -1$, $x = 1$ (b) $x = 0$, $y = 0$ (c) no tiene

(839) (a) $y = 0$ (b) $x = 0$, $y = 0$ (c) $x = 0$ (por la derecha), $y = 1$

18. Continuidad

840. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - ax + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

según los valores de a.

841. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + x - 2}$$

842. Calcular a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ b & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

843. Estudiar los puntos de discontinuidad de la función:

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2 - 9}$$

844. Hallar el valor de k para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

sea continua.

845. ¿Cómo hay que definir en $x = 1$ la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \qquad x \neq 1$$

para que sea continua en ese punto?

846. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

según los valores de a.

847. De la función $g(x)$ se sabe que es continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$ y que para $0 < x \leq 1$ es:

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$$

¿Cuánto vale $g(0)$?

848. Sea la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

El segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando $x = 2$. ¿Cómo se debería elegir el valor de $f(2)$ para que la función f sea continua en ese punto?

Soluciones:

(840) Continua si $a = \frac{1}{2}$ (841) Discontinuidad evitable en $x = 1$, infinito en $x = -2$ (842) $a = 9$, $b = 10$ (843) Discontinuidad evitable en $x = 3$, infinito en $x = -3$ (844) $k = 4$ (845) $f(1) = \frac{1}{2}$ (846) Continua si $a = \frac{1}{2}$, salto finito en los demás casos (847) $g(0) = 1$ (848) $f(2) = 4$

19. Teorema de Bolzano

849. Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + 40 = 0$ tiene alguna solución en el intervalo $(-4, -3)$.

850. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto.

851. Dada la función $f(x) = x^3 + x - 5$, demostrar que existe un $c \in (1, 3)$ tal que $f(c) = 20$.

852. Comprobar que la ecuación $\operatorname{sen} x - 2x + 3 = 0$ tiene una solución en el intervalo $(1, 2)$.

853. Comprobar que la función $f(x) = x^5 - x^3 - x + 5$ toma el valor -1 en el intervalo $(-2, -1)$.

854. Demostrar que la función $f(x) = xe^{-x} + 3$ toma el valor $\frac{3}{2}$ en el intervalo $(-1, 0)$.

855. Demostrar que la ecuación $\operatorname{sen} x - \cos x + 2 = 3$ tiene una solución en el intervalo $(1, 2)$.

856. Comprobar que la función $f(x) = \cos x - x + 1$ corta al eje OX en al menos un punto, e indica un intervalo de extremos de números enteros consecutivos al cual pertenezca dicho punto.

857. Lo mismo para la función $f(x) = xe^x - x - 16$.

858. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = \cos \pi x - 2$ se cortan en un punto x_0. Calcular la parte entera de x_0.

859. Demostrar que la ecuación $x^3 + 3x^2 + 4x - 7 = 0$ tiene al menos una solución.

860. Comprobar que la ecuación $2x = \cos x$ tiene al menos una solución.

861. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$ se cortan en algún punto.

862. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Observamos que f está definida en $[0,1]$ y que toma valores de signos opuestos en los extremos de este intervalo. Sin embargo, no existe ningún $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

20. Reglas de derivación

Obtener la derivada de las siguientes funciones:

863. $y = 6x^3 + 5x^2 + 4$

864. $y = 3x^{-2} - 5x^{-3} + 2x^{-1}$

865. $y = 5x^4 - 3x^2 + 6x$

866. $y = 2x^{-3} - 4x^{-4} - x^{-2}$

867. $y = 7x^6 + 5x^4 - 3x^2$

868. $y = 4x^{-5} - 3x^{-3} + 4$

869. $y = -5x^8 + 3x^6 - 5x^4$

870. $y = 3x^{-6} - 2x^{-7} - 3$

871. $y = 5x^{\frac{2}{3}} + 3x - x^{\frac{5}{7}}$

872. $y = 3x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{2}{3}} + 7$

873. $y = x^2(x+6)$

874. $y = x^3(x^2+1)(x^3+6)$

875. $y = 3(x^{-3} + x^{-5})$

876. $y = x^{-2}(x^{-3} + 5)$

877. $y = \dfrac{5}{x^3}$

878. $y = \dfrac{6}{x^4+2}$

879. $y = \dfrac{x^4}{3}$

880. $y = \dfrac{x^3+2}{7}$

881. $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$

882. $y = \dfrac{3}{5x^2+2}$

883. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

884. $y = \dfrac{1}{1-2x^2}$

885. $y = \dfrac{x^2+2}{x^3-3x^2}$

886. $y = \dfrac{x^2+1}{3}$

887. $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$

888. $y = x\sqrt{x^2+2}$

889. $y = (2x-1)\sqrt{1+x}$

890. $y = (3x^2-1)\sqrt{3x^2+2}$

891. $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$

892. $y = \sqrt[4]{x^3+2}$

893. $y = \sqrt[5]{x^3+6}$

894. $y = \sqrt[6]{1+x^2}$

895. $y = \sqrt[7]{x^4+2}$

896. $y = \sqrt[8]{x^3+7x}$

897. $y = 2\operatorname{sen} x$

898. $y = 2\cos x$

899. $y = \operatorname{sen} 2x$

900. $y = \cos 2x$

901. $y = \operatorname{sen} x^2$

902. $y = \cos x^2$

903. $y = \operatorname{sen}^2 x$

904. $y = \cos^2 x$

905. $y = 2\operatorname{tg} x$

906. $y = \operatorname{tg} 2x$

907. $y = \operatorname{tg} x^2$

908. $y = \operatorname{tg}^2 x$

909. $y = 2\operatorname{sen} x^2$

910. $y = 2\cos x^2$

911. $y = 2\operatorname{sen}^2 x$

912. $y = 2\cos^2 x$

913. $y = \operatorname{sen}(2x^2)$

914. $y = \cos(2x^2)$

915. $y = \operatorname{sen}(2x)^2$

916. $y = \cos(2x)^2$

917. $y = \operatorname{sen}^2 2x$

918. $y = \cos^2 2x$

919. $y = \operatorname{sen}^2 x^2$

920. $y = \cos^2 x^2$

921. $y = \operatorname{sen}(x^2 + 3x)$

922. $y = 4\operatorname{sen}^2 x + 7\operatorname{sen} x$

923. $y = 5\cos^2 x + 3\cos^3 x$

924. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

925. $y = \operatorname{sen} x^3 + \cos x^2$

926. $y = \operatorname{sen} x^3 \cos x^2$

927. $y = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$

928. $y = \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x$

929. $y = \operatorname{sen} x^4 + \cos x^4$

930. $y = \operatorname{sen} x^4 \cos x^4$

931. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

932. $y = \dfrac{1 + 2\operatorname{sen}^2 x}{1 - 2\operatorname{sen}^2 x}$

933. $y = \left(\dfrac{x^3 + 2}{4x + 2}\right)^3$

934. $y = \left(\dfrac{5x^2 + 3x}{6x + 2}\right)^4$

935. $y = \dfrac{x^6}{(3x + 2)^4}$

936. $y = \left(\dfrac{2x + 1}{3x + 2}\right)^5$

937. $y = \ln(1 + x^2)$

938. $y = \ln(1 + 3x)$

939. $y = \ln(1 + \sqrt{x})$

940. $y = \ln \operatorname{sen} x^3$

941. $y = x \ln x$

942. $y = \ln \operatorname{cotg} x$

943. $y = \ln \dfrac{3 - 5x}{2x + 7}$

944. $y = \ln \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

945. $y = \ln \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

946. $y = \dfrac{1}{8} \ln \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$

947. $y = \ln \cos e^x$

948. $y = \ln \cos e^{x^2}$

949. $y = e^{\operatorname{sen} x}$

950. $y = e^{\cos x}$

951. $y = e^{\operatorname{tg} x}$

952. $y = e^{-\cos x}$

953. $y = (x^2+1)e^x$

954. $y = (x^3-3)e^x$

955. $y = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^x$

956. $y = \left(1 + x + x^2\right) e^x$

957. $y = a^{\operatorname{tg} x}$

958. $y = a^{\cos x^2}$

959. $y = a^{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

960. $y = e^{\sqrt{x}}$

961. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

962. $y = \frac{e^{5x}}{1+e^x}$

963. $y = \frac{e^x}{x^2}$

964. $y = a^x$

965. $y = \ln \frac{1-e^x}{1+e^x}$

966. $y = \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

967. $y = \log\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)$

968. $y = \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

969. $y = \log \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$

970. $y = \operatorname{arsen} \sqrt{x}$

971. $y = \operatorname{arcos} \sqrt{x}$

972. $y = \sqrt{a^2 - x^2} + \operatorname{arsen} \frac{x}{a}$

973. $y = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x} + \operatorname{artg} x$

974. $y = x^x$

975. $y = \left(\frac{x}{a}\right)^x$

976. $y = (1+x)^x$

977. $y = x^{\operatorname{tg} x}$

978. De la trayectoria $x = \frac{1}{2}gt^2$ obtener la fórmula de la velocidad y la aceleración.

979. La fórmula que da el $\cos 2x$ en función del seno y el coseno de x, se puede obtener derivando $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$. Comprobarlo.

980. De la fórmula

$$(1-x)^n = 1 - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

obtener, derivando y haciendo $x = -1$, que

$$n2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

Obtener la derivada segunda de:

981. $y = x^3 - 5x^2 + 4$

982. $y = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 6$

983. $y = \ln \sqrt{1-x^2}$

984. $y = e^{\operatorname{sen} x}$

985. $y = \ln \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}$

986. $y = x^2 e^x$

Obtener la derivada tercera de:

987. $y = x^{-5}$

988. $y = \operatorname{sen} x \cos x$

989. $y = \operatorname{sen}^2 x$

990. $y = \ln\left(1 + x^2\right)$

991. $y = e^x \operatorname{sen} x$

992. $y = x \cos x$

Obtener la derivada cuarta de:

993. $y = x^{-2}$

994. $y = \operatorname{sen} x$

Obtener las derivadas sucesivas de:

995. $y = 3x^2 + 5x - 6$

996. $y = 5x^2 - 3x + 1$

997. $y = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$

998. $y = x^4 - 3x^2 + 6x$

999. $y = e^x$

1000. $y = \dfrac{1}{x}$

Obtener la diferencial de:

1001. $y = 4x^2 - 5x + 2$

1002. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$

1003. $y = \sqrt{2x - 3}$

1004. $y = x^2 e^{\operatorname{sen} x}$