Problemas de Relaciones, Aplicaciones y Grupos

www.five-fingers.es

Mayo 2017

1. Relaciones en un conjunto.

Una **relación** R en un conjunto A es un subconjunto de $A \times A$ de tal forma que diremos que dos elementos a y b de A están relacionados si $(a, b) \in R$:

$$aRb \iff (a, b) \in R$$

Una relación con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva es una **relación de equivalencia**.

A partir de una relación de equivalencia en A puede definirse una partición de A en subconjuntos llamados **clases de equivalencia** formados por las elementos que están relacionados entre sí. Cualquier elemento de una clase de equivalencia es un **representante** de esa clase.

Dos números a y b son *congruentes* módulo m, $a, b, m \in \mathbb{Z}$ y se escribe

$$a \equiv b \pmod{m}$$

si dan el mismo resto al dividirlos por m o, de forma equivalente, si su diferencia es múltiplo de m.

La relación de congruencia es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia se llaman **clases de restos** módulo m.

1. Sea R una relación en $\mathbb{Z}$ definida por $aRb \iff 5ab \leq 0$.
   (*a*) Determinar si R es
      (I) Reflexiva
      (II) Simétrica
      (III) Transitiva
   (*b*) Explicar si R es o no una relación de equivalencia

   Solución:

   (*a*) Los números están relacionados si tienen distinto signo o al menos uno de ellos es cero,
      (*a*) No es reflexiva
      (*b*) Es simétrica
      (*c*) No es transitiva

   (*b*) No es una relación de equivalencia porque no es reflexiva ni transitiva.

   ♠♠♠♠

2. La relación R se define en el conjunto $\mathbb{N}$ por

$$aRb \iff a^3 \equiv b^3 \pmod{5}$$

   (*a*) Comprobar que R es una relación de equivalencia.

(b) Representar la clase que contiene a n mediante C_n:
   (I) Calcular C_n
   (II) Escribir los seis primeros elementos de C_1
   (III) Demostrar que $C_n = C_{n+5},\ \forall n$

Solución:

(a) Veamos que se cumplen las tres propiedades:
- Reflexiva: aRa puesto que $a^3 \equiv a^3 \pmod 5$.
- Simétrica; se cumple, ya que:

$$aRb \quad \Longrightarrow \quad a^3 \equiv b^3 \pmod 5 \quad \Longrightarrow \quad b^3 \equiv a^3 \pmod 5 \quad \Longrightarrow \quad bRa$$

- Transitiva: puesto que la relación de congruencia es transitiva:

$$\begin{cases} aRb \\ bRc \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a^3 \equiv b^3 \pmod 5 \\ b^3 \equiv c^3 \pmod 5 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a^3 \equiv c^3 \pmod 5 \quad \Longrightarrow \quad aRc$$

(b) (I) Si calculamos los cubos módulo 5:

x	0	1	2	3	4
x^3	0	1	3	2	4

Observamos que los restos no se repiten, es decir, es lo mismo $a^3 \equiv b^3 \pmod 5$ que $a \equiv b \pmod 5$. Entonces

$$C_n = [n] = \{n + 5k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

(II) $C_1 = \{1, 6, 11, 16, 21, 26, \ldots\}$

(III) Basta ver que $(n+5)Rn$. En efecto:

$$(n+5)^3 - n^3 = n^3 + 15n^2 + 75n + n^3 - n^3 = 15n^2 + 75n + 125 = \dot{5} \quad \Longrightarrow \quad (n+5)Rn$$

♠♠♠♠

3. Sea P el conjunto de polinomios de la forma $P(z) = z^2 + bz + c$, donde $b, c \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$.
   (a) Se define en P la relación S:

$$P_1 S P_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{suma de las raíces de } P_1 = \text{suma de las raíces de } P_2$$

   (I) Comprobar que S es una relación de equivalencia
   (II) Determinar la clase de equivalencia que contiene al polinomio $Q = z^2 - 3z + 4$

   (b) Sea ahora R la relación:

$$P_1 R P_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{producto de las raíces de } P_1 = \text{producto de las raíces de } P_2$$

   (I) Comprobar que R es una relación de equivalencia
   (II) Determinar la clase de equivalencia que contiene al polinomio $Q = z^2 - 3z + 4$

Solución:

(a) (I) Es evidente que se trata de una relación de equivalencia porque tiene las tres propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.
(II) De acuerdo con las relaciones de Cardano son los polinomios cuya suma de raíces es 3. es decir, son los polinomios de la forma $z^2 - 3z + c$, $c \in \mathbb{R}$.

(b) (I) Es reflexiva, simétrica y transitiva. es una relación de equivalencia
(II) Son los polinomios de la forma $z^2 + bx + 4 = 0$, $b \in \mathbb{R}$.

♠♠♠♠

4. La relación R se define en $\mathbb{Z}^+$ por

$$aRb \quad \Longleftrightarrow \quad 5^a \equiv 5^b \pmod 8$$

   (a) Comprobar que R es una relación de equivalencia.
   (b) Identificar las dos clases de equivalencia producidas por esta relación.

(*c*) Calcular $5^{355} \pmod 8$.

Solución:

(*a*) Es una relación de equivalencia porque está definida mediante una congruencia que tiene las tres propiedades, reflexiva, simétrica y transitiva.

(*b*) Calculemos las potencias de 5 módulo 8. Cada una se obtiene multiplicando la anterior por 5:

x	1	2	3	4	5	6	7
5^x	5	1	5	1	5	1	5

Vemos que

$$5^x \equiv \begin{cases} 5 \pmod 8 & x \text{ impar} \\ 1 \pmod 8 & x \text{ par} \end{cases}$$

Hay dos clases de equivalencia, una formada por los números impares y otra formada por los números pares.

(*c*) $5^{355} \equiv 5 \pmod 8$

♠♠♠♠

5. La relación S se define en el conjunto de los polinomios de segundo grado de la forma $z^2 + az + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ de tal forma que los polinomios P_1 y P_2 están relacionados si tienen algún cero en común. Determinar si la relación S es transitiva.

Solución:

No es transitiva. Por ejemplo sean los polinomios $P_1 = (z-1)(z-2)$, $P_2 = (z-1)(z-3)$ y $P_3 = (z-3)(z-4)$), Se ve claramente que $P_1 S P_2$, $P_2 S P_3$ pero P_1 no está relacionado con P_3.

♠♠♠♠

2. Aplicaciones. Operaciones.

Sea $f : A \longrightarrow B$:

$$\begin{array}{rcl} f \text{ inyectiva} & \Longleftrightarrow & x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2) \\ f \text{ inyectiva} & \Longleftrightarrow & f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 \\ f \text{ sobreyectiva} & \Longleftrightarrow & \forall b \in B,\ \exists a \in A \mid f(a) = b \\ f \text{ biyectiva} & \Longleftrightarrow & f \text{ inyectiva y suprayectiva} \end{array}$$

Propiedades:

- La composición de dos aplicaciones inyectivas es una aplicación inyectiva
- La composición de dos aplicaciones sobreyectivas es una aplicación sobreyectiva
- Una aplicación tiene inversa si y solo si es biyectiva
- Si A y B son finitos:
  - Si $n(A) = n(f(A))$ la aplicación es inyectiva
  - Si $n(B) = n(f(A))$ la aplicación es sobreyectiva

1. Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y una aplicación $f : S \longrightarrow S$ definida por $f(x) = 6x \pmod 7$.
   (*a*) Demostrar que f es una biyección.
   (*b*) Comprobar que f es inversa de sí misma.

   Solución:

   (*a*) El conjunto S tiene 6 elementos. El conjunto $f(S) = \{6, 5, 4, 3, 2, 1\}$ también tiene 6 elementos. Puesto que $f(S)$ tiene el mismo número de elementos que el conjunto inicial, la función es inyectiva. Como tiene el mismo número de elementos que el conjunto final es suprayectiva.
   Puesto que f es inyectiva y suprayectiva es biyectiva.

   (*b*) En efecto:

   $$f \circ f(x) = f(6x \pmod 7) = 36x \pmod 7 = x$$

   ♠♠♠♠

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$:
   (*a*) Calcular:
   (I) $(f \circ g)(x)$
   (II) $(g \circ f)(x)$
   (*b*) Determinar si las funciones compuestas son inyectivas o suprayectivas.

   Solución:

   (*a*) (I) $(f \circ g)(x) = f\left(x^2\right) = e^{x^2}$
   (II) $(g \circ f)(x) = g\left(e^x\right) = (e^x)^2 = e^{2x}$

   (*b*) La primera no es inyectiva (por ejemplo $f(-1) = f(1)$) ni suprayectiva (nunca toma valores negativos). La segunda es inyectiva (basta ver que es creciente) pero no suprayectiva (tampoco toma valores negativos).

   ♠♠♠♠

3. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas o suprayectivas y calcular la inversa cuando sea posible:
   (*a*) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f(x) = x^2$.
   (*b*) $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2 + 1$.
   (*c*) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$.

Solución:

(a) No es inyectiva pero es suprayectiva.

(b) Es inyectiva pero no suprayectiva.

(c) Es inyectiva y suprayectiva.

♠♠♠♠

4. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se define mediante

$$f(x) = e^{2\cos x} + 1$$

(a) Calcular el recorrido de f.

(b) (I) Explicar por qué f no es inyectiva.
(II) Razonar si f es o no sobreyectiva.

(c) Se define una nueva función $g : [0, k] \longrightarrow A$ donde

$$g(x) = e^{2\cos x} + 1$$

y $k \geq 0$.

(I) Encontrar el valor más grande de k para que g sea inyectiva. Para este valor de k, ¿qué valores puede tomar A para que g sea biyectiva?
(II) Calcular $g^{-1}(x)$.
(III) Escribir el dominio de g^{-1}.

Solución:

(a) Puesto que la función coseno varía entre -1 y 1, el recorrido de la función es el intervalo $\left[e^{-2} + 1, e^2 + 1\right]$.

(b) (I) No es inyectiva porque por ejemplo $f(-x) = f(x)$.
(II) No es suprayectiva porque el recorrido no coincide con el conjunto final

(c) (I) $k = \pi$, En el intervalo $[0, \pi]$ la función coseno es inyectiva y también lo será $g(x)$. Para que sea biyectiva, A debe ser igual al recorrido de la función, es decir, $\left[e^{-2} + 1, e^2 + 1\right]$.
(II) Intercambiamos las variables y despejemos:

$$x = e^{2\cos y} + 1 \; ; \qquad 2\cos y = \ln(x-1) \; ; \qquad \cos y = \frac{1}{2}\ln(x-1)$$

y finalmente:

$$y = g^{-1}(x) = \text{ arcos} \frac{1}{2}\ln(x-1) = \text{ arcos} \ln\sqrt{x-1}$$

(III) El dominio de $g^{-1}(x)$ es el recorrido de $f(x)$, es decir, $\left[e^{-2} + 1, e^2 + 1\right]$.

♠♠♠♠

5. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = (y - 2x, x + y)$:

(a) Comprobar que f es una biyección.

(b) Calcular $f^{-1}(x, y)$

Solución:

(a) Veamos que la función es inyectiva:

$$\begin{aligned}
f(x, y) = f(x', y') \quad &\Longrightarrow \quad (y - 2x, x + y) = (y' - 2x', x' + y') \\
&\Longrightarrow \quad \begin{cases} y - 2x = y' - 2x' \\ x + y = x' + y' \end{cases} \\
&\Longrightarrow \quad \begin{cases} y - 2x = y' - 2x' \\ 2x + 2y = 2x' + 2y' \end{cases} \qquad \text{sumando las igualdades} \\
&\Longrightarrow \quad 3y = 3y' \\
&\Longrightarrow \quad y = y' \; ; \quad x = x' \\
&\Longrightarrow \quad f \text{ inyectiva}
\end{aligned}$$

Para demostrar que es suprayectiva debemos comprobar que para cualquier $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ podemos encontrar $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = (u, v)$. En efecto:

$$\begin{aligned} f(x,y) = (u,v) &\implies (y-2x, x+y) = (u,v) \\ &\implies \begin{cases} y - 2x = u \\ x + y = v \end{cases} \qquad \text{restando} \\ &\implies -3x = u - v \end{aligned}$$

y de aquí:

$$x = \frac{v-u}{3} \ ; \quad y = v - \frac{v-u}{3} = \frac{2v+u}{3}$$

La función es inyectiva y suprayectiva. Por tanto es biyectiva.

(b) En el apartado anterior hemos visto que:

$$f\left(\frac{v-u}{3}, \frac{2v+u}{3}\right) = (u,v)$$

Cambiando el nombre de las variables:

$$f\left(\frac{y-x}{3}, \frac{2y+x}{3}\right) = (x,y) \implies f^{-1}(x,y) = \left(\frac{y-x}{3}, \frac{2y+x}{3}\right)$$

♠♠♠♠

6. Sean

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ g(x,y) = (x-y, 2x+y)$$
$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ h(x,y) = (xy, 2x-y)$$

(a) Demostrar que g tiene inversa y calcularla.

(b) Determinar si $(g \circ h)(x, y)$ es una biyección.

Solución:

(a) Como en el problema anterior, veamos que la función es inyectiva:

$$\begin{aligned} g(x,y) = g(x',y') &\implies (x-y, 2x+y) = (x'-y', 2x'+y') \\ &\implies \begin{cases} x - y = x' - y' \\ 2x + y = 2x' + y' \end{cases} \qquad \text{sumando las igualdades} \\ &\implies 3x = 3x' \\ &\implies x = x' \ ; \quad y = y' \\ &\implies g \text{ inyectiva} \end{aligned}$$

Veamos que también es suprayectiva. Debemos comprobar que para cualquier $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ podemos encontrar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $g(x, y) = (u, v)$. En efecto:

$$\begin{aligned} g(x,y) = (u,v) &\implies (x-y, 2x+y) = (u,v) \\ &\implies \begin{cases} x - y = u \\ 2x + y = v \end{cases} \qquad \text{sumando} \\ &\implies 3x = u + v \end{aligned}$$

y de aquí:

$$x = \frac{u+v}{3} \ ; \quad y = \frac{u+v}{3} - u = \frac{-2u+v}{3}$$

La función es suprayectiva. Puesto que es inyectiva y suprayectiva es biyectiva y tiene inversa. Hemos visto que:

$$g\left(\frac{u+v}{3}, \frac{-2u+v}{3}\right) = (u,v)$$

Cambiando el nombre de las variables:

$$g\left(\frac{x+y}{3}, \frac{-2x+y}{3}\right) = (x,y) \implies g^{-1}(x,y) = \left(\frac{x+y}{3}, \frac{-2x+y}{3}\right)$$

(*b*) Calculemos en primer lugar la función $g \circ h$:

$$g \circ h(x, y) = g(xy, 2x - y) = (xy - 2x + y, 2xy + 2x - y)$$

Veamos si es inyectiva:

$$\begin{aligned}
g \circ h(x, y) = g \circ h(x', y') \quad &\Longrightarrow \quad (xy - 2x + y, 2xy + 2x - y) = (x'y' - 2x' + y', 2x'y' + 2x' - y') \\
&\Longrightarrow \quad \begin{cases} xy - 2x + y = x'y' - 2x' + y' \\ 2xy + 2x - y = 2x'y' + 2x' - y' \end{cases} \\
&\Longrightarrow \quad \begin{cases} xy = x'y' \\ 2x - y = 2x' - y' \end{cases} \\
&\Longrightarrow \quad 2x - \frac{x'y'}{x} = 2x' - y' \\
&\Longrightarrow \quad 2x^2 - (2x' - y')x - x'y' = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (x - x')\big(2x + y'\big) = 0
\end{aligned}$$

Vemos que la función no es inyectiva pues hay dos soluciones para x, $x = x'$ y $x = -\frac{y'}{2}$. Podemos decir entonces que $g \circ h(x, y)$ no es una biyección.

(También podíamos haber visto simplemente que h no es inyectiva).

♠♠♠♠

7. Sea $f : A \longrightarrow B$ donde $A = [0, \infty) \times \big[0, \frac{\pi}{2}\big)$, $B = [0, \infty) \times [0, 1)$ y

$$f(x, y) = (x \cos y, \operatorname{sen} y)$$

Determinar si f es una biyección y, en caso afirmativo, encontrar la función inversa f^{-1}.

Solución:

Comprobemos si la función es inyectiva:

$$\begin{aligned}
f(x, y) = f(x', y') \quad &\Longrightarrow \quad (x \cos y, \operatorname{sen} y) = (x' \cos y', \operatorname{sen} y') \\
&\Longrightarrow \quad \begin{cases} x \cos y = x' \cos y' \\ \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} y' \end{cases}
\end{aligned}$$

Puesto que y es un ángulo del primer cuadrante podemos decir que $y = y'$ y también $x = x'$. La función es inyectiva.

Veamos si es suprayectiva. Dado (u, v) con u positivo o cero y $v \in [0, 1)$, debemos encontrar $x \in [0, \infty)$ e $y \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big)$ tal que $f(x, y) = (u, v)$:

$$\begin{aligned}
f(x, y) = (u, v) \quad &\Longrightarrow \quad (x \cos y, \operatorname{sen} y) = (u, v) \\
&\Longrightarrow \quad \begin{cases} x \cos y = u \\ \operatorname{sen} y = v \end{cases}
\end{aligned}$$

Así obtenemos:

$$y = \operatorname{arsen} v \ ; \quad x = \frac{u}{\cos y} = \frac{u}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{u}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Estos números existen siempre de modo que la función es suprayectiva. Por ser inyectiva y suprayectiva, es biyectiva.

Como la función es biyectiva, existe la función inversa. Hemos visto que:

$$f\left(\frac{u}{\sqrt{1 - v^2}}, \ \operatorname{arsen} v\right) = (u, v)$$

Cambiando los nombres de las variables:

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{1 - y^2}}, \ \operatorname{arsen} y\right) = (x, y) \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - y^2}}, \ \operatorname{arsen} y\right)$$

♠♠♠♠

8. La función $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ esta definida por:

$$f(x, y) = \left(\frac{y}{x}, x^2 y\right)$$

(a) Demostrar que f es biyectiva.
(b) Calcular f^{-1}.

Solución:

(a) Comprobemos que es inyectiva:

$$\begin{aligned} f(x,y)=f(x',y') &\implies \left(\frac{y}{x},x^2y\right)=\left(\frac{y'}{x'},x'^2y'\right)\\ &\implies \begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}\\ x^2y=x'^2y'\end{cases}\\ &\implies x^2\frac{xy'}{x'}=x'^2y'\\ &\implies x^3=x'^3\\ &\implies x=x'\ ;\quad y=y'\\ &\implies f \text{ inyectiva}\end{aligned}$$

Ahora vemos si es suprayectiva. Dado un (u,v) con $u,v\in\mathbb{R}^+$ debemos encontrar $x,y\in\mathbb{R}^+$ tal que $f(x,y)=(u,v)$:

$$\begin{aligned} f(x,y)=(u,v) &\implies \left(\frac{y}{x},x^2y\right)=(u,v)\\ &\implies \begin{cases}\frac{y}{x}=u\\ x^2y=v\end{cases}\\ &\implies x^3u=v\\ &\implies x=\sqrt[3]{\frac{v}{u}}\ ;\quad y=\sqrt[3]{u^2v}\end{aligned}$$

Estos números existen siempre, de modo que la función es suprayectiva. Por ser inyectiva y suprayectiva es biyectiva y tiene inversa.

(b) Hemos visto que:

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{v}{u}},\ \sqrt[3]{u^2v}\right)=(u,v)$$

Cambiando el nombre de las variables:

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{y}{x}},\ \sqrt[3]{x^2y}\right)=(x,y)\quad\implies\quad f^{-1}(x,y)=\left(\sqrt[3]{\frac{y}{x}},\ \sqrt[3]{x^2y}\right)$$

♠♠♠♠

9. Se define la función $f:[0,\infty)\longrightarrow[1,\infty)$ por $f(x)=4e^{2x}-3$.
(a) Calcular $f'(x)$ para comprobar que f es biyectiva.
(b) Calcular $f^{-1}(x)$.

Solución:

(a) Calculamos la derivada:

$$f'(x)=8e^{2x}$$

La derivada es siempre mayor que cero y, por consiguiente, la función es estrictamente creciente y, por tanto, inyectiva.
Además $f(0)=1$ y $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. Como la función es continua, toma todos los valores del intervalo $[1,\infty)$ y es entonces, suprayectiva. Por ser inyectiva y suprayectiva es biyectiva.

(b) Para expresar la función $f^{-1}:[1,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$, en forma explícita, intercambiamos las variables y despejamos:

$$x=4e^{2y}-3\ ;\qquad e^{2y}=\frac{x+3}{4}\ ;\qquad 2y=\ln\frac{x+3}{4}\ ;\qquad y=f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x+3}{4}$$

♠♠♠♠

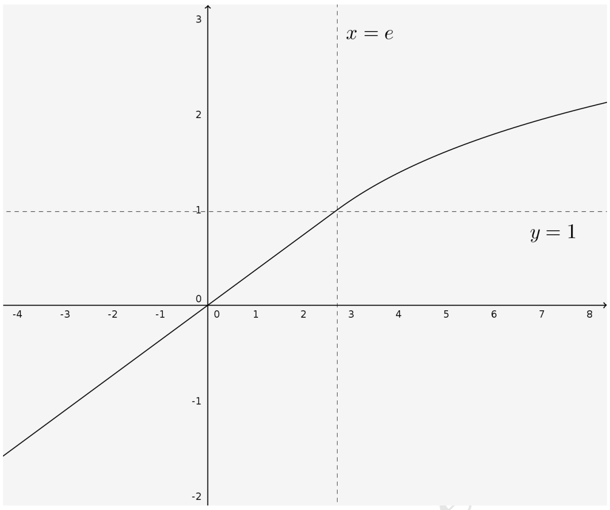
10. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{e} & x\le e\\ \ln x & x>e\end{cases}$$

(a) Esbozar el gráfico de $f(x)$.
(b) A partir del gráfico comprobar que f es biyectiva.
(c) Calcular f^{-1}.

Solución:

(a) El gráfico de la función es:



(b) La función es creciente y su recorrido es $(-\infty, \infty)$. Entonces, es inyectivay suprayectiva y, por consiguiente, biyectiva.

(c) La inversa se obtiene calculando las inversas de cada una de las funciones:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} ex & x \leq 1 \\ e^x & x > 1 \end{cases}$$

♠♠♠♠

11. La operación $*$ se define en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como:

$$(a, b) * (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$$

Calcular el elemento neutro de esta operación

Solución:

Sea (x, y) el elemento neutro. Se debe cumplir:

$$(a, b) * (x, y) = (a, b)\ ; \qquad (ax + by, ay + bx) = (a, b)$$

o bien

$$\begin{cases} ax + by = a \\ bx + ay = b \end{cases}$$

que tiene como solución $x = 1$, $y = 0$. El elemento neutro es $(1, 0)$.

♠♠♠♠

12. Sea $*$ una operación binaria definida en $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ definida por

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

(a) Determinar si la operación es conmutativa y asociativa.
(b) Encontrar, si existe, el elemento neutro.

Solución:

(a) La operación es conmutativa:

$$y * x = \frac{y+x}{1+yx} = \frac{x+y}{1+xy} = x * y$$

Comprobemos si es asociativa:

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * \frac{y+z}{1+yz} \\ &= \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}} \\ &= \frac{x(1+yz)+y+z}{1+yz+xy+xz} \\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \end{aligned}$$

De la misma manera:

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= \frac{x+y}{1+xy} * z \\ &= \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} z} \\ &= \frac{x+y+z(1+xy)}{1+xy+xz+yz} \\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \end{aligned}$$

La operación es asociativa.

(b) Debe cumplirse:

$$x * e = \frac{x+e}{1+xe} = x \; ; \qquad x + e = x(1+xe) \quad \Longrightarrow \quad e = 0$$

♠♠♠♠

3. Grupos. Teorema de Lagrange.

Un grupo es un conjunto con una operación asociativa, con elemento neutro y en el que cada elemento tiene su simétrico. Si la operación es conmutativa, el grupo es conmutativo o abeliano.

El orden de un grupo es el número de elementos del grupo. El orden puede ser finito o infinito. El orden de un elemento a es el menor entero $p > 0$ tal que $a^p = e$.

Un subgrupo de un grupo G es un subconjunto de G que es a su vez un grupo con la misma operación. Para que un conjunto $H \subseteq G$ sea un subgrupo la operación debe ser cerrada en H, el elemento neutro debe estar en H y cada elemento de H debe tener su simétrico en H.

Si G es un grupo finito, para que $H \subseteq G$ sea un subgrupo, basta que la operación sea cerrada en H.

El conjunto de las potencias de un elemento a es un subgrupo que se llama subgrupo generado por el elemento a.

Si un grupo está generado por un elemento g el grupo se llama cíclico y g es un generador del grupo.

Teorema de Lagrange: el orden de un subgrupo es un divisor del orden del grupo.

Consecuencias:

- El orden de un elemento es un divisor del orden del grupo.
- Todo grupo de orden primo es cíclico.

1. (*a*) Comprobar que, excluyendo un número, el conjunto de los números reales con la operación $*$ definida por

$$a * b = a + b - ab$$

forma un grupo y determinar el elemento que debe ser excluido.

(*b*) A partir del resultado anterior, resolver la ecuación $5 * x = 12$.

Solución:

(*a*) La operación es cerrada. Veamos que es asociativa:

$$a * (b * c) = a * (b + c - bc) = a + b + c - bc - a(b + c - bc) = a + b + c - ab - ac - bc + abc$$
$$(a * b) * c = (a + b - ab) * c = a + b + c - ab - c(a + b - ab) = a + b + c - ab - ac - bc + abc$$

El elemento neutro es 0 ya que:

$$a * 0 = a + 0 - 0a = a$$

El simétrico de a sería un número x que cumple:

$$a * x = a + x - ax = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a}{a-1}$$

Todos tendrían simétrico excepto $a = 1$. Este sería el número que habría que excluir para que el conjunto formase un grupo con esta operación.

Si excluimos el 1, habría que comprobar que la operación es cerrada en $\mathbb{R} \setminus 1$. Supongamos que operando dos números resulta 1:

$$\begin{aligned} a * b = 1 \quad &\Longrightarrow \quad a + b - ab = 1 \\ &\Longrightarrow \quad a(1-b) = 1 - b \qquad \text{y puesto que } b \text{ es distinto de } 1 \\ &\Longrightarrow \quad a = 1 \end{aligned}$$

o sea, para que $a * b$ sea igual a 1, alguno de los dos números debe ser igual a 1. La operación es cerrada en $\mathbb{R} \setminus 1$.

(*b*) La ecuación es equivalente a:

$$5 + x - 5x = 12\;; \qquad -4x = 7\;; \qquad x = -\frac{7}{4}$$

♠♠♠♠

2. Sea H un subgrupo de G y sea R una relación definida en G por

$$aRb \iff ab^{-1} \in H \; ; \qquad a, b \in G$$

Demostrar que R es una relación de equivalencia.

Solución:

– La relación es reflexiva: aRa porque $aa^{-1} = e \in H$

– Simétrica:

$$\begin{aligned} aRb &\Longrightarrow ab^{-1} \in H \\ &\Longrightarrow \left(ab^{-1}\right)^{-1} \in H && \text{ya que } H \text{ es subgrupo el inverso está en } H \\ &\Longrightarrow ba^{-1} \in H && \text{puesto que } (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \\ &\Longrightarrow bRa \end{aligned}$$

– Transitiva:

$$\begin{cases} aRb \\ bRc \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ab^{-1} \in H \\ bc^{-1} \in H \end{cases} \Longrightarrow ab^{-1}bc^{-1} \in H \Longrightarrow ac^{-1} \in H \Longrightarrow aRc$$

♠♠♠♠

3. Sean x, a, b, c elementos de un grupo con elemento neutro e.
   (a) Despejar x en $axb = c$.
   (b) Despejar x sabiendo que se cumple $ax^2 = b$ y $x^3 = e$.

Solución:

(a) $axb = c$; $\quad a^{-1}axbb^{-1} = a^{-1}cb^{-1}$; $\quad exe = a^{-1}cb^{-1}$; $\quad x = a^{-1}cb^{-1}$

(b) Multiplicando por la derecha por x:

$$ax^2x = bx \; ; \qquad ae = bx \; ; \qquad bx = a \; ; \qquad x = b^{-1}a$$

♠♠♠♠

4. Un grupo G con elemento neutro e tiene dos elementos x e y tales que $yx = x^2y$ e $y^3 = e$. Demostrar que
   (a) $y^2xy^{-2} = x^4$
   (b) $x^8 = x$

Solución:

(a) Aplicando la primera condición:

$$\begin{aligned} y^2xy^{-2} &= y(yx)y^{-2} = y(x^2y)y^{-2} = (yx)xy^{-1} = (x^2y)xy^{-1} \\ &= x^2(yx)y^{-1} = x^2(x^2y)y^{-1} = x^4 \end{aligned}$$

(b) En $yx = x^2y$ multiplicando por la derecha por y^2:

$$yxy^2 = x^2yy^2$$

y, puesto que $y^3 = e$, obtenemos $x^2 = yxy^2$. Elevando al cuadrado:

$$x^4 = \left(yxy^2\right)\left(yxy^2\right) = yx\left(y^2y\right)xy^2 = yxexy^2 = yx^2y^2$$

Elevando de nuevo al cuadrado:

$$x^8 = \left(yx^2y^2\right)\left(yx^2y^2\right) = yx^2\left(y^2y\right)x^2y^2 = yx^2ex^2y^2 = yx^4y^2$$

Y, con la expresión de x^4 obtenida en el apartado anterior:

$$x^8 = y\left(y^2xy^{-2}\right)y^2 = \left(yy^2\right)x\left(y^{-2}y^2\right) = exe = x$$

♠♠♠♠

5. (a) Sean $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1 - x$ y $f_3(x) = \frac{1}{x}$, obtener $f_4(x)$, $f_5(x)$ y $f_6(x)$ si

$$f_4(x) = (f_2 \circ f_3)(x) \; ; \qquad f_5(x) = (f_3 \circ f_2)(x) \; ; \qquad f_6(x) = (f_3 \circ f_4)(x)$$

(b) Suponiendo que $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ forman un grupo con la composición de funciones, escribir la tabla de Cayley.

(c) Determinar el orden de cada elemento del grupo.

(d) Encontrar un subgrupo que contiene solamente tres elementos.

Solución:

(a) Teniendo en cuenta que f_1 es el elemento neutro y que f_2 y f_3 son de orden 2:

	$f1$	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

Esta tabla se ha obtenido aplicando la condición de tabla latina y las relaciones que nos dan, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
f_4(x) = (f_2 \circ f_3)(x) &\implies f_2 \circ f_4 = f_2 \circ f_2 \circ f_3 = f_3 \\
f_5(x) = (f_3 \circ f_2)(x) &\implies f_3 \circ f_5 = f_3 \circ f_3 \circ f_2 = f_2 \\
f_6(x) = (f_3 \circ f_4)(x) &\implies f_3 \circ f_6 = f_3 \circ f_3 \circ f_4 = f_4
\end{aligned}$$

También pueden calcularse explícitamente las funciones f_4, f_5 y f_6.

(b) A partir de la tabla es fácil obtener:

Función	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
Orden	1	2	2	3	3	2

(c) Un subgrupo de tres elementos es $H = \{f_1, f_4, f_5\}$ que tiene como generador f_4 o f_5.

♠♠♠♠

6. Sea $\{G, *\}$ un grupo y sea a un elemento de G. Se define una aplicación $f : G \longrightarrow G$ mediante $f(x) = a * x$ para todo $x \in G$. Demostrar que f es biyectiva.

Solución:

– La aplicación es inyectiva:

$$\begin{aligned}
f(x) = f(y) &\implies a * x = a * y \qquad \text{por la propiedad simplificativa} \\
&\implies x = y
\end{aligned}$$

– La aplicación es suprayectiva. Sea $y \in G$. Veamos que existe $x \in G$ tal que $f(x) = y$:

$$\begin{aligned}
f(x) = y &\implies a * x = y \\
&\implies x = a^{-1} * y
\end{aligned}$$

– Al ser la aplicación inyectiva y suprayectiva es biyectiva.

♠♠♠♠

7. Para el grupo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$:

(a) Encontrar el orden de los elementos 4, 5 y 9.

(b) Demostrar que el grupo es cíclico y encontrar los posibles generadores.

Solución:

(a) El orden de 4 es 3 pues $4 + 4 + 4 \equiv 0 \pmod{12}$. De forma similar se ve que el orden de 5 es 12 y el orden de 9 es 4.

(*b*) Ya hemos visto que hay un elemento de orden 12 y, por tanto, el grupo es cíclico. Los generadores son 1, 5, 7 y 11, los números primos con 12.

♠♠♠♠

8. Sea $\min(x, y)$ el número más pequeño entre x e y. La operación $\diamond$ se define sobre el conjunto de los números enteros negativos por

$$x \diamond y = \min(x, y)$$

(*a*) Demostrar que $\diamond$ es conmutativa.
(*b*) Comprobar cuáles de los axiomas de grupo se satisfacen.

Solución:

(*a*) La operación es conmutativa porque

$$x \diamond y = \min(x, y) = \min(y, x) = y \diamond x$$

(*b*) La operación es asociativa. El elemento neutro es -1 puesto que si x es entero negativo:

$$x \diamond (-1) = \min(x, -1) = x$$

Ningún número distinto de -1 tiene simétrico.

♠♠♠♠

9. Sea $\{G, *\}$ un grupo con subgrupos H y K. Demostrar que $H \cup K$ es un subgrupo de G si y solo si $H \subseteq K$ o $K \subseteq H$.

Solución: Está claro que, al ser unión de subgrupos, la operación en $H \cup K$ es asociativa, tiene elemento neutro y cada elemento tiene su simétrico. Pero hay que ver que la operación sea cerrada:

$$\begin{aligned} H \cup K \text{ subgrupo} \quad &\Longrightarrow \quad a \in H,\ b \in K \quad a * b \in H \cup K \\ &\Longrightarrow \quad \begin{cases} a * b \in H \quad \Longrightarrow \quad b \in H \quad \Longrightarrow \quad K \subseteq H \\ \text{ó} \\ a * b \in K \quad \Longrightarrow \quad a \in K \quad \Longrightarrow \quad H \subseteq K \end{cases} \qquad \text{por ser } H \text{ y } K \text{ subgrupos} \end{aligned}$$

Por otra parte, si $H \subseteq K$ o $K \subseteq H$ se verifica que $H \cup K = H \cap K$. Puesto que la intersección de subgrupos es subgrupo, resulta que $H \cup K$ es subgrupo.

♠♠♠♠

10. Calcular el orden de un grupo generado por dos elementos a y b si $a^3 = b^2 = (ab)^2 = e$.

Solución:

$$abab = e \quad \Longrightarrow \quad a^2abab = a^2 \quad \Longrightarrow \quad bab = a^2 \quad \Longrightarrow \quad baba = a^3 = e$$

Es decir, el elemento ba tiene orden 2. El grupo tiene orden 6. Su tabla es:

	e	a	a^2	b	ab	ba
e	e	a	a^2	b	ab	ba
a	a	a^2	e	ab	ba	b
a^2	a^2	e	a	ba	b	ab
b	b	ba	ab	e	a^2	a
ab	ab	b	ba	a	e	a^2
ba	ba	ab	b	a^2	a	e

♠♠♠♠

4. Grupos. Homomorfismos.

Sean $(G,*)$ y $(G',\circ)$ dos grupos. Un homomorfismo de G en G' es una aplicación $f :\longrightarrow G'$ que cumple

$$f(a*b)=f(a)\circ f(b)$$

Propiedades:

– La imagen del elemento neutro de G e, es el elemento neutro de G' e':

$$f \text{ homomorfismo} \quad \Longrightarrow \quad f(e)=e'$$

– La imagen del inverso de $a\in G$ es el inverso de $f(a)$:

$$f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$$

– Un homomorfismo conserva las potencias:

$$f(a^n)=(f(a))^n$$

– El recorrido de f es un subgrupo de G'.

Si la aplicación f es biyectiva entonces el homomorfismo se llama isomorfismo.

El conjunto K de los elementos de G cuya imagen es el elemento neutro de G' se llama núcleo del homomorfismo.

Propiedades:

– El núcleo de un homomorfismo es un subgrupo de G.
– Las clases aK y Ka por la derecha y por la izquierda coinciden.
– Dos elementos pertenecen a la misma clase si tienen la misma imagen:

$$x_1,x_2\in aK \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_1)=f(x_2)=f(a)$$

– Si $K=\{e\}$ la aplicación es inyectiva.

1. (*a*) Sea G un grupo de orden 6. Enunciar el teorema de Lagrange y, a partir de él, demostrar por reducción al absurdo que al menos uno de sus elementos debe ser de orden 3.
   (*b*) Sea G un grupo de orden n y g uno de sus elementos de orden k. escribir un subgrupo cíclico de orden k y, a partir del teorema de Lagrange, demostrar que $g^n=e$.

Solución:

(*a*) Si G es cíclico tiene la forma $G=\{e,g,g^2,g^3,g^4,g^5\}$. Entonces hay un elemento (g^2) que tiene orden 3. Supongamos ahora que G no es cíclico. Sus elementos son de orden 2 o 3. Supongamos que todos sus elementos son de orden 2 y veamos que esto es imposible:

– Si en un grupo todos los elementos son de orden 2, el grupo es abeliano. En efecto, sean a, b y ab de orden 2. Entonces:

$$\begin{aligned}
&(ab)^2=e \\
&abab=e && \text{operando por } a \text{ y } b \text{ a izquierda y derecha}\\
&(aa)ba(bb)=ab \\
&ebae=ab \\
&ba=ab
\end{aligned}$$

– Pero si todos los elementos son de orden 2, $H=\{e,a,b,ab\}$ forman un subgrupo con la siguiente tabla:

	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Esto es imposible porque, de acuerdo con el teorema de Lagrange, un grupo de orden 6 no puede tener un subgrupo de orden 4. En conclusión, no todos los elementos pueden ser de orden 2, debe haber alguno de orden 3.

♠♠♠♠

2. (a) Consideremos el grupo $(\mathbb{Z}_n, +)$. Escribir los elementos de este grupo y encontrar un generador.
   (b) Sea $(\mathbb{C}_n, \times)$ el grupo formado por las raíces enésimas de la unidad con la operación de multiplicar. Escribir los elementos de este grupo y comprobar que se trata de un grupo cíclico. Encontrar un generador de este grupo.
   (c) Comprobar que $f : (\mathbb{Z}_n, +) \longrightarrow (\mathbb{C}_n, \times)$, $f(x) = e^{\frac{2i\pi x}{n}}$, $x \in \mathbb{Z}_n$ es un isomorfismo.

Solución:

(a) Los elementos del grupo son:

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$$

Un generador de este grupo es 1 porque todos los elementos pueden obtenerse sumando 1 consigo mismo.

(b) El grupo es:

$$C_n = \left\{1, e^{\frac{i2\pi}{n}}, e^{\frac{i4\pi}{n}}, e^{\frac{i6\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{i2(n-1)\pi}{n}}\right\}$$

Se trata de un grupo cíclico, todos los elementos del grupo pueden obtenerse como potencias de $e^{\frac{i2\pi}{n}}$.

(c) La aplicación es inyectiva y suprayectiva, Además es un homomorfismo porque:

$$f(x_1 + x_2) = e^{\frac{i2(x_1+x_2)\pi}{n}} = e^{\frac{i2x_1\pi}{n}} \cdot e^{\frac{i2x_2\pi}{n}} = f(x_1)f(x_2)$$

♠♠♠♠

3. Demostrar que la aplicación $f(x) = x^2$ de un grupo $(G, *)$ en sí mismo es un homomorfismo si y solo si G es abeliano.

Solución:

Supongamos que f es un homomorfismo:

$$\begin{aligned}
f \text{ homomorfismo} &\Longrightarrow f(a*b) = f(a)*f(b) \\
&\Longrightarrow a*b*a*b = a*a*b*b \qquad \text{por la propiedad simplificativa} \\
&\Longrightarrow b*a = a*b \\
&\Longrightarrow G \text{ es abeliano}
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que G es abeliano:

$$\begin{aligned}
G \text{ abeliano} &\Longrightarrow f(a*b) = a*b*a*b = a*a*b*b = f(a)*f(b) \\
&\Longrightarrow f \text{ homomorfismo}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

4. Demostrar que si $f : (G, *) \longrightarrow (G, *)$ es un homomorfismo con núcleo K, entonces

$$f(x) = f(y) \quad \Longleftrightarrow \quad y = k * x, \qquad k \in K$$

Solución:

$$\begin{aligned} f(y)=f(x) &\implies f(y)*f(x^{-1})=f(x)*f(x^{-1}) \\ &\implies f(y*x^{-1})=f(x*x^{-1}) \\ &\implies f(y*x^{-1})=f(e)=e \\ &\implies y*x^{-1}\in K \\ &\implies y*x^{-1}=k\ ; \qquad k\in K \\ &\implies y=k*x\ ; \qquad k\in K \end{aligned}$$

$$y=k*x\ ; \quad k\in K \quad \implies \quad f(y)=f(k*x)=f(k)*f(x)=e*f(x)=f(x)$$

♠♠♠♠

5. Sea G el grupo de las permutaciones S_3 y $H=\{(1),(12)\}$ un subgrupo de G. Calcular las clases por la derecha de H.

Solución:

Escribamos el subgrupo H como:

$$H=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right\}$$

Sea:

$$a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

Entonces:

$$Ha=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}$$

Elijamos ahora un b que no se encuentre ni en H ni en Ha:

$$b=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

La clase de b es:

$$Hb=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}$$

♠♠♠♠

6. Sea G un grupo. Demostrar que la relación R definida en G mediante

$$aRb \quad \Longleftrightarrow \quad a=b \quad \text{o} \quad a=b^{-1}$$

es una relación de equivalencia y escribir las clases de equivalencia.

Solución:

Cada elemento está relacionado consigo mismo y con su inverso, Es fácil ver que esta relación tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva y es, por tanto, una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia son $\{e\}$, $\{a,a^{-1}\}$, $\{b,b^{-1}\}$, $\{c,c^{-1}\}$, etc.

♠♠♠♠

7. Demostrar que los grupos $(\mathbb{R},+)$ y $(\mathbb{R}^+,\times)$ son isomorfos.

Solución:

La función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ definida por $f(x)=e^x$ es biyectiva. Además es un homomorfismo ya que:

$$f(x+y)=e^{x+y}=e^xe^y=f(x)f(y)$$

Por tanto, los dos grupos son isomorfos.

♠♠♠♠

8. (*a*) Demostrar que el conjunto

$$S = \{2^a 3^b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

forma un grupo para la multiplicación.

(*b*) Demostrar que el grupo anterior es isomorfo a $(C, +)$ siendo

$$C = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Solución:

(*a*) La operación es cerrada:

$$\left(2^a 3^b\right)\left(2^{a'} 3^{b'}\right) = 2^{a+a'} 3^{b+b'} \in S$$

y es asociativa puesto que lo es el producto de números racionales (S está contenido en $\mathbb{Q}$).
El elemento neutro es $1 = 2^0 3^0 \in S$.
El elemento simétrico de $2^a 3^b$ es $2^{-a} 3^{-b} \in S$.
Además se cumple la propiedad conmutativa. $(S, \cdot)$ es un grupo abeliano.

(*b*) Sea la aplicación $f : S \longrightarrow C$ definida por:

$$f(2^a 3^b) = a + bi$$

que es inyectiva ya que:

$$2^a 3^b = 2^{a'} 3^{b'} \quad \Longrightarrow \quad a = a', \; b = b'$$

(esto es consecuencia de la unicidad de la descomposición de un número entero en factores primos). También es suprayectiva porque para todo $y = a + bi \in C$ existe $x = 2^a 3^b \in S$ tal que $f(x) = y$.
Además es un homomorfismo ya que:

$$\begin{aligned} f\left(2^a 3^b \cdot 2^{a'} 3^{b'}\right) &= f\left(2^{a+a'} 3^{b+b'}\right) \\ &= a + a' + i(b + b') = (a + bi) + (a' + b'i) \\ &= f\left(2^a 3^b\right) + f\left(2^{a'} 3^{b'}\right) \end{aligned}$$

♠♠♠♠

9. Explicar por qué $f : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$, $f(x) = 3x \pmod{10}$ no es un homomorfismo.

Solución:

Aparentemente se trata de un homomorfismo porque:

$$f(x + y) = 3(x + y) \pmod{10} = 3x \pmod{10} + 3y \pmod{10} = f(x) + f(y)$$

pero esta igualdad es falsa como vamos a ver. La razón de la confusión reside en que el signo $+$ no significa lo mismo cuando está dentro del paréntesis (suma módulo 12) que cuando está fuera (suma módulo 10). Para que f sea un homomorfismo debe cumplirse que:

$$f\left(x +_{12} y\right) = f(x) +_{10} f(y)$$

donde hemos representado por $+_{12}$ y $+_{10}$ las sumas módulo 12 y módulo 10 respectivamente. Vamos a ver que esto no se cumple.

Los valores de la función son:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7	0	3

Por ejemplo:

$$f(8 +_{12} 5) = f(1) = 3$$
$$f(8) +_{10} f(5) = 4 + 5 = 9$$

Otra manera de ver que no es un homomorfismo es la siguiente. Si f fuese un homomorfismo el núcleo de f sería:

$$K = \{0, 10\}$$

formado por 2 elementos. Pero vemos que, por ejemplo, la clase del elemento 2, $[2] = \{2\}$ estaría formada por un solo elemento pues no hay ningún $x \neq 2$ tal que $f(x) = f(2)$. Esto no es posible porque las clases deben estar formadas por el mismo número de elementos que el núcleo.

♠♠♠♠

10. Sea el grupo de permutaciones S_3. Encontrar un subgrupo H y un elemento g tal que $gH \neq Hg$.

Solución:

Elijamos un subgrupo formado, por ejemplo, por una permutación de orden 2 y el elemento neutro:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Sea:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$aH = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

♠♠♠♠

11. Sea $G = (\mathbb{R} \setminus 0, \times)$.

(*a*) Comprobar que $f(x) = x^n, \ n \in \mathbb{Z}^+$ es un homomorfismo.

(*b*) Determinar el núcleo de f.

(*c*) Determinar n de forma que f sea un isomorfismo,

Solución:

(*a*) En efecto:

$$f(xy) = (xy)^n = x^n y^n = f(x)f(y)$$

(*b*) El elemento neutro es 1. Entonces:

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^n = 1 \quad \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 & n \text{ impar} \\ x = \pm 1 & n \text{ par} \end{cases}$$

Si n es impar, el núcleo es $\{1\}$. Si n es par, el núcleo es $\{-1, 1\}$.

(*c*) Para que sea un isomorfismo, n debe ser impar. Así la función es inyectiva y suprayectiva.

♠♠♠♠