Bachillerato Internacional
Matemáticas Nivel Superior
Modelo de Examen

Jesús García de Jalón de la Fuente

Noviembre 2016

1. Examen sin calculadora

1.1. Section A

Ejercicio 1. (4 puntos)

The function f is defined by

$$f(x) = \frac{1}{x}\ ; \qquad x \neq 0$$

The graph of the function $y = g(x)$ is obtained by applying the following transformations to the graph of $y = f(x)$:

– a translation by the vector $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

– a translation by the vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) Find an expression for $g(x)$.

(b) State the equations of the asymptotes of the graph of g.

Solución:

(a) $g(x) = \dfrac{1}{x+3} + 1$

(b) $x = -3$ e $y = 1$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (6 puntos)

The quadratic equation $2x^2 - 8x + 1 = 0$ has roots α and β.

(a) Without solving the equation, find the value of

(I) $\alpha + \beta$;

(II) $\alpha\beta$

(b) Another quadratic equation $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$ has roots $\frac{2}{\alpha}$ and $\frac{2}{\beta}$. Find the value of p and the value of q.

Solución:

(a) Teneiendo en cuenta las relaciones de Cardano:

(I) $\alpha + \beta = 4$

(II) $\alpha\beta = \frac{1}{2}$

(b) Aplicando las relaciones de Cardano:

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{2 \cdot 4}{\frac{1}{2}} = -p\ ; \qquad \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{2}{\beta} = \frac{4}{\alpha\beta} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = q$$

y, de aquí, $p = -16$, $q = 8$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (6 puntos)

A point P, relative to an origin O, has position vector $\vec{OP} = \begin{pmatrix} 1+s \\ 3+2s \\ 1-s \end{pmatrix}\ ; \qquad s \in \mathbb{R}.$

(*a*) Show that $|\vec{OP}|^2 = 6s^2 + 12s + 11$.

(*b*) Hence find the minimum length of $\vec{OP}$.

(*c*) Explain, geometrically, why your answer gives a minimum value.

Solución:

(*a*) El cuadrado del módulo del vector es

$$|\vec{OP}|^2 = (1+s)^2 + (3+2s)^2 + (1-s)^2 = 6s^2 + 12s + 11$$

(*b*) Derivando

$$y' = 12s + 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad s = -1$$

La longitud mínima es

$$|\vec{OP}| = \sqrt{6(-1)^2 + 12(-1) + 11} = \sqrt{5}$$

(*c*) Los puntos forman una recta que pasa por $(1,3,1)$ y cuya dirección está dada por el vector

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es evidente que hay un mínimo de las distancias del origen a los puntos de la recta y no hay un valor máximo de esa distancia. También podríamos haber calculado la distancia mínima, calculando la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a la recta, la intersección del plano con la recta y la distancia desde el origen a la intersección-

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (7 puntos)

Events A and B are such that $P(A) = 0{,}2$ and $P(B) = 0{,}5$.

(*a*) Determine the value of $P(A \cup B)$ when

(I) A and B are mutually exclusive;

(II) A and B are independent.

(*b*) Find the smallest and largest possible values of $P(A|B)$.

Solución:

(*a*) (I) Si son mutuamente excluyentes $\mathrm{p}(A \cap B) = 0$ y

$$\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) = 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}7$$

(II) Si son independientes $\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A)\mathrm{p}(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1$ y

$$\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}6$$

(*b*) La probabilidad de A condicionada a B se define por

$$\mathrm{p}(A|B) = \frac{\mathrm{p}(A \cap B)}{\mathrm{p}(B)}$$

El valor más pequeño se obtiene cuando los sucesos son incompatibles. En este caso la probabilidad es cero.
El valor mayor se dará cuando el suceso A está contenido en B ya que así $\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A) = 0{,}2$. El valor de la probabilidad condicionada es

$$\mathrm{p}(A|B) = \frac{\mathrm{p}(A \cap B)}{\mathrm{p}(B)} = \frac{\mathrm{p}(A)}{\mathrm{p}(B)} = \frac{2}{5}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (6 puntos)

By using the substitution $u = 1 + \sqrt{x}$ find

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Solución:

Calculamos la diferencial

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Sustituyendo

$$\int \frac{\sqrt{x}}{u}\cdot 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}u = 2\int \frac{(u-1)^2}{u}\,\mathrm{d}u = \int\left(u-2+\frac{1}{u}\right)\,\mathrm{d}u = 2\left(\frac{u^2}{2}-2u+\ln|u|\right)+C = u^2-4u+2\ln|u|+C$$

y deshaciendo el cambio resulta

$$= (1+\sqrt{x})^2 - 4(1+\sqrt{x}) + 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (7 puntos)

Use mathematical induction to prove that $(2n)! \geq 2^n\,(n!)^2$, $n \in \mathbb{Z}^+$

Solución:

- La propiedad se cumple para $n = 1$ puesto que en ese caso el primer y el segundo miembro son iguales a 2.
- Supongamos que la propiedad es cierta para $n = k$, es decir

  $$(2k)! \geq 2^k\,(k!)^2$$

  y comprobemos que, en ese caso, también es cierta para $n = k+1$, es decir, comprobemos que:

  $$(2(k+1))! \geq 2^{k+1}\,((k+1)!)^2$$

  En efecto:

  $$\begin{aligned}(2(k+1))! &= (2k+2)(2k+1)(2k)!\\ &\geq (2k+2)(2k+1)2^k\,(k!)^2\\ &= 2(k+1)(2k+1)2^k\,(k!)^2\\ &= (k+1)(2k+1)2^{k+1}\,(k!)^2\\ &\geq (k+1)^2 2^{k+1}\,(k!)^2\\ &= 2^{k+1}\,((k+1)!)^2\end{aligned}$$

- Como consecuencia del principio de inducción, la propiedad se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (7 puntos)

A continuous random variable T has probability density function f defined by

$$f(t) = \begin{cases} |2-t| & 1 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

(a) Sketch the graph of $y = f(t)$.

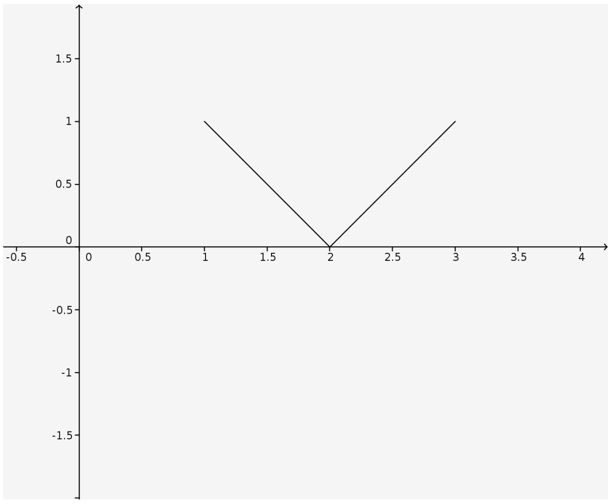
(b) (I) Find the lower quartile of T.

(II) Hence find the interquartile range of T .

Solución:

(a) La función puede escribirse

$$f(t) = \begin{cases} 2-t & 1 \leq t \leq 2 \\ t-2 & 2 < t \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



(b) (I) Si q es el primer cuartil:

$$\int_1^q (2-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \quad\Longrightarrow\quad \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^q = 2q - \frac{q^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Quitando denominadores se obtiene:

$$-2q^2 + 8q - 7 = 0\ ; \qquad 2q^2 - 8q + 7 = 0 \quad\Longrightarrow\quad q = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(II) Por simetría, el tercer cuartil debe ser $q_3 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. El rango intercuartílico es $\sqrt{2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (7 puntos)

A set of positive integers $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ is used to form a pack of nine cards. Each card displays one positive integer without repetition from this set. Grace wishes to select four cards at random from this pack of nine cards.

(a) Find the number of selections Grace could make if the largest integer drawn among the four cards is either a 5, a 6 or a 7.

(b) Find the number of selections Grace could make if at least two of the four integers drawn are even.

Solución:

(a) $C_{4,3} + C_{5,3} + C_{6,3} = 4 + 10 + 20 = 34$

(b) $C_{4,2}C_{5,2} + C_{4,3}C_{5,1} + C_{4,4} = 6 \cdot 10 + 4 \cdot 5 + 1 = 81$

♠♠♠♠

1.2. Section B

Ejercicio 9. (17 puntos)

The function f is defined as $f(x) = e^{3x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Find $f^{-1}(x)$.

The function g is defined as $g(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$.
The graph of $y = g(x)$ intersects the x-axis at the point Q.

(b) Show that the equation of the tangent T to the graph of $y = g(x)$ at the point Q is $y = x - 1$.

A region R is bounded by the graphs of $y = g(x)$, the tangent T and the line $x = e$.

(c) Find the area of the region R.

(d) (I) Show that $g(x) \leq x - 1$, $x \in \mathbb{R}^+$.

(II) By replacing x with $\frac{1}{x}$ in part (d)(I), show that $\dfrac{x-1}{x} \leq g(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$

Solución:

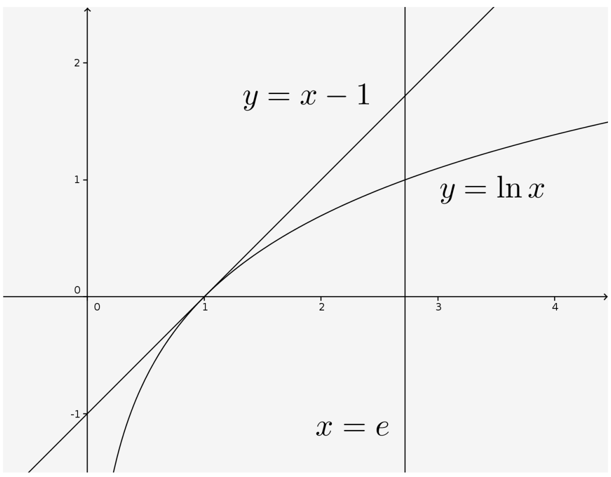
(a) Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = e^{3y+1}\ ; \qquad 3y + 1 = \ln x\ ; \qquad y = f^{-1}(x) = \frac{\ln x - 1}{3}$$

(b) El punto de tangencia es $(1, 0)$. La derivada de g es $g'(x) = \frac{1}{x}$. La pendiente de la recta tangente es $m = g'(1) = 1$. La ecuación de la tangente es

$$y - 0 = 1(x - 1) \quad \Longrightarrow \quad y = x - 1$$

(c)



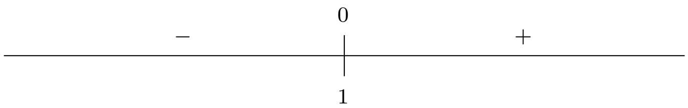
El área es

$$S = \int_1^e (x - 1 - \ln x)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - x - x\ln x + x\right]_1^e = \frac{e^2 - 2e - 1}{2}$$

(d) (I) Sea la función $F(x) = x - 1 - \ln x$. Su derivada es

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

El signo de la derivada es



Por el teorema del valor medio para cualquier $x > 1$:

$$F(x) = F(1) + F'(c)(x-1) = F'(c)(x-1)$$

siendo c un punto intermedio entre 1 y x. Si $x > 1$ ambos factores son positivos y si $x < 1$ los dos son negativos. En cualquier caso

$$F(x) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x - 1 \geq \ln x$$

(II) Sustituyendo x por $\frac{1}{x}$:

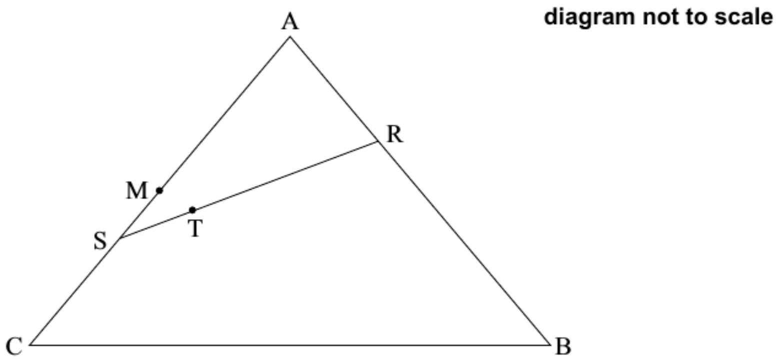
$$\frac{1}{x} - 1 \geq \ln\frac{1}{x}\ ; \qquad \frac{1-x}{x} \geq -\ln x \quad \Longrightarrow \quad \frac{x-1}{x} \leq \ln x$$

(recordar que al multiplicar una desigualdad por un número negativo debemos cambiar el sentido de la desigualdad)

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (14 puntos)

The position vectors of the points A, B and C are $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ respectively, relative to an origin O. The following diagram shows the triangle ABC and points M, R, S and T.



M is the mid-point of AC.
R is a point on AB such that $AR = \frac{1}{3}\,AB$
S is a point on AC such that $\vec{AS} = \frac{2}{3}\vec{AC}$.
T is a point on RS such that $\vec{RT} = \frac{2}{3}\vec{RS}$.

(a) (I) Express $\vec{AM}$ in terms of $\vec{a}$ and $\vec{c}$.
(II) Hence show that $\vec{BM} = \frac{1}{2}\,\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\,\vec{c}$.

(b) (I) Express $\vec{RA}$ in terms of $\vec{a}$ and $\vec{b}$.
(II) Show that $\vec{RT} = -\frac{2}{9}\,\vec{a} - \frac{2}{9}\,\vec{b} + \frac{4}{9}\,\vec{c}$.

(c) Prove that T lies on BM.

Solución:

(a) (I) Puesto que M es el punto medio de AC:

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}\,\vec{AC} = \frac{1}{2}\,\left(\vec{OC} - \vec{OA}\right) = \frac{1}{2}\,(\vec{c} - \vec{a})$$

(II) $\vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AM} = \vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\,\vec{c} - \frac{1}{2}\,\vec{a} = \frac{1}{2}\,\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\,\vec{c}$

(b) (I) $\vec{RA} = \frac{1}{3}\,\vec{BA} = \frac{1}{3}\,(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{3}\,\vec{a} - \frac{1}{3}\,\vec{b}$

(II) $\vec{RT} = \frac{2}{3}\,\vec{RS} = \frac{2}{3}\,(\vec{AS} - \vec{AR}) = \frac{2}{3}\,\left(\frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{a}) - \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})\right) = \frac{2}{3}\,\left(-\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) = -\frac{2}{9}\,\vec{a} - \frac{2}{9}\,\vec{b} + \frac{4}{9}\,\vec{c}$

(c) Hay que demostrar que $\vec{BM} = \lambda\vec{BT}$:

$$\begin{aligned}
\vec{BM} &= \vec{BA} + \vec{AM} = \vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC}\\
&= \vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a})\\
&= \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\\
\vec{BT} &= \vec{BR} + \vec{RT} = \frac{2}{3}\vec{BA} + \vec{RT}\\
&= \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{2}{9}\,\vec{a} - \frac{2}{9}\,\vec{b} + \frac{4}{9}\,\vec{c}\\
&= \frac{4}{9}\vec{a} - \frac{8}{9}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}\\
&= \frac{8}{9}\vec{BM}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (19 puntos)

(a) Show that

$$(1 + i\tan\theta)^n + (1 - i\tan\theta)^n = \frac{2\cos n\theta}{\cos^n\theta}\ ; \qquad \cos\theta \neq 0$$

(b) (I) Use the double angle identity

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

to show that

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

(II) Show that $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

(III) Hence find the value of

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{2\cos 4x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
&(1 + i\tan\theta)^n + (1 - i\tan\theta)^n\\
&= \left(1 + i\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^n + \left(1 - i\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^n\\
&= \left(\frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\right)^n + \left(\frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)\right)^n\\
&= \frac{1}{\cos^n\theta}\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n + \frac{1}{\cos^n\theta}\,(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)^n\\
&= \frac{1}{\cos^n\theta}\,(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta) + \frac{1}{\cos^n\theta}\,(\cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta)\\
&= \frac{2\cos n\theta}{\cos^n\theta}
\end{aligned}$$

(b) (I) Sustituyendo $\theta = \frac{\pi}{8}$

$$1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}\ ; \qquad 1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8} = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\ ; \qquad \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8} + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} - 1 = 0$$

y de aquí, puesto que la tangente debe ser positiva en el primer cuadrante:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{-2+\sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}-1$$

(II) De la fórmula de Moivre

$$(\cos x + i\operatorname{sen} x)^4 = \cos 4x + i\operatorname{sen} 4x$$

Desarrollando por la formula de Newton e igualando las partes reales resulta

$$\begin{aligned}\cos 4x &= \cos^4 x - 6\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x\\ &= \cos^4 x - 6\cos^2 x(1-\cos^2 x) + (1-\cos^2 x)^2\\ &= \cos^4 x - 6\cos^2 x + 6\cos^4 x + 1 + \cos^4 x - 2\cos^2 x\\ &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1\end{aligned}$$

(III) Sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{2\cos 4x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 2}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left(16\cos^2 x - 16 + \frac{2}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x\\ &= 16\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) - 16x + 2\operatorname{tg} x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}\\ &= 8\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) - 16\,\frac{\pi}{8} + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\\ &= \pi + 2\sqrt{2} - 2\pi + 2\sqrt{2} - 2\\ &= 4\sqrt{2} - 2 - \pi\end{aligned}$$

♠♠♠♠

2. Examen con calculadora

2.1. Section A

Ejercicio 1. (6 puntos)

Consider the two planes

$$\pi_1 : \ 4x + 2y - z = 8$$
$$\pi_2 : \ x + 3y + 3z = 3$$

Find the angle between π_1 and π_2, giving your answer correct to the nearest degree.

Solución:

Los vectores normales a los planos son:

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ ; \qquad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

El ángulo entre los planos es

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{7}{\sqrt{21}\sqrt{19}} \ ; \qquad \varphi \simeq 69^{\text{o}}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (6 puntos)

The wingspans of a certain species of bird can be modelled by a normal distribution with mean 60,2 cm and standard deviation 2,4 cm.

According to this model, 99 % of wingspans are greater than x cm.

(a) Find the value of x.

In a field experiment, a research team studies a large sample of these birds. The wingspans of each bird are measured correct to the nearest 0,1 cm.

(b) Find the probability that a randomly selected bird has a wingspan measured as 60,2 cm.

Solución:

(a) Sabemos que $\mathrm{p}\,(X > x) = 0{,}99$ o bien $\mathrm{p}\,(X < x) = 0{,}01$. Con ayuda de la calculadora obtenemos $x \simeq 54{,}6$ cm.

(b) $\mathrm{p}\,(60{,}15 < X < 60{,}25) \simeq 0{,}0166$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (8 puntos)

The lines l_1 and l_2 are defined as

$$l_1 : \ \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-12}{-2}$$
$$l_2 : \ \frac{x-1}{8} = \frac{y-5}{11} = \frac{z-12}{6}$$

The plane π contains both l_1 and l_2.

(a) Find the Cartesian equation of π.

The line l_3 passing through the point $(4, 0, 8)$ is perpendicular to π.

(b) Find the coordinates of the point where l_3 meets π.

Solución:

(a) En forma de determinante

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 8 \\ y-5 & 2 & 11 \\ z-12 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x-2y+z=4$$

(b) En forma paramétrica la perpendicular puede escribirse

$$\begin{cases} x = 4+2t \\ y = 0-2t \\ z = 8+t \end{cases}$$

Su intersección con el plano es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x = 4+2t \\ y = 0-2t \\ z = 8+t \\ 2x-2y+z=4 \end{cases}$$

que es el punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{20}{3}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

Consider $p(x) = 3x^3 + ax + 5a$, $a \in \mathbb{R}$.
The polynomial $p(x)$ leaves a remainder of -7 when divided by $(x - a)$.
Show that only one value of a satisfies the above condition and state its value.

Solución:

De acuerdo con el teorema del resto, el valor numérico del polinomio para $x = a$ debe ser -7:

$$3a^3 + a^2 + 5a = -7 \quad \Longrightarrow \quad 3a^3 + a^2 + 5a + 7 = 0$$

Sea la función $F(x) = 3x^3 + x^2 + 5x + 7$. Puesto que es una función polinómica de grado impar tiene al menos un cero. Por otra parte, su derivada es

$$F'(x) = 9x^2 + 2x + 5$$

que es mayor que cero para todo x. Según el teorema de Rolle entre dos ceros de la función debería haber al menos un cero de la derivada. Puesto que la derivada no tiene ceros, no puede haber dos ceros de la función.

Con la calculadora resolvemos la ecuación y resulta $a = -1$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (9 puntos)

The seventh, third and first terms of an arithmetic sequence form the first three terms of a geometric sequence.

The arithmetic sequence has first term a and non-zero common difference d.

(a) Show that $d = \frac{a}{2}$.

The seventh term of the arithmetic sequence is 3. The sum of the first n terms in the arithmetic sequence exceeds the sum of the first n terms in the geometric sequence by at least 200.

(b) Find the least value of n for which this occurs.

Solución:

(a) Llamemos $a+6d$, $a+2d$ y a al séptimo, tercer y primer términos de la progresión aritmética. Puesto que forman una progresión geométrica

$$\frac{a+2d}{a+6d}=\frac{a}{a+2d}$$

De aquí resulta $a=2d$ o $d=\frac{a}{d}$. Una manera sencilla de obtener esto es aplicar las propiedades de las proporciones para ver que

$$\frac{a+2d}{a+6d}=\frac{a}{a+2d}=\frac{2d}{4d}=\frac{1}{2}$$

donde hemos restado numeradores y denominadores. De aquí resulta que la razón de la progresión geométrica es igual a $\frac{1}{2}$.

(b) Puesto que $a+6d=3$ y $a=2d$ tenemos que $a=\frac{3}{4}$ y $d=\frac{3}{8}$. El término enésimo de la progresión aritmética es

$$a_n=\frac{3}{4}+\frac{3(n-1)}{8}=\frac{3n+3}{8}$$

y la suma de los n primeros términos

$$S_n=\frac{n}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{3n+3}{8}\right)=\frac{3n^2+9n}{16}$$

La suma de los n primeros términos de la progresión geométrica es

$$S'_n=\frac{3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

Debemos buscar el menor valor de n tal que

$$\frac{3n^2+12n}{16}>6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+200$$

Con la calculadora se obtiene que el menor valor de n que cumple esta condición es 32.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (7 puntos)

A particle moves in a straight line such that its velocity, v m s^{-1}, at time t seconds, is given by

$$v(t)=\begin{cases}5-(t-2)^2 & 0\leq t\leq 4\\ 3-\frac{t}{2} & t>4\end{cases}$$

(a) Find the value of t when the particle is instantaneously at rest.

The particle returns to its initial position at $t=T$.

(b) Find the value of T .

Solución:

(a) Igualando a cero la velocidad

$$5-(t-2)^2=0\ ;\qquad 5-t^2+4t-4=0\ ;t^2-4t-1=0$$

Esta ecuación no tiene soluciones comprendidas entre 0 y 4. Por consiguiente, la velocidad no se anula para $t<4$. Veamos para $t>4$:

$$3-\frac{t}{2}=0\ ;\qquad 6$$

La velocidad se anula para $t=6$ s.

(b) Tomemos $s=0$ para $t=0$. La posición de la partícula en el tiempo t es:

$$s=\int_0^4(5-(t-2)^2)\ \mathrm{d}t+\int_4^t\left(3-\frac{t}{2}\right)\ \mathrm{d}t=\left[5t-\frac{(t-2)^3}{3}\right]_0^4+\left[3t-\frac{t^2}{4}\right]_4^t$$

Haciendo operaciones

$$s=20-\frac{8}{3}-\frac{8}{3}+3t-\frac{t^2}{4}-12+4=-\frac{t^2}{4}+3t+\frac{44}{3}$$

La partícula vuelve a la posición inicial cuando

$$-\frac{t^2}{4}+3t+\frac{20}{3}=0\ ;\qquad 3t^2-36t-80=0$$

Resolviendo se obtiene $T\simeq 13{,}9$ s

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (8 puntos)

Compactness is a measure of how compact an enclosed region is.

The compactness, C, of an enclosed region can be defined by $C = \frac{4A}{\pi d^2}$, where A is the area of the region and d is the maximum distance between any two points in the region.

For a circular region, $C = 1$.

Consider a regular polygon of n sides constructed such that its vertices lie on the circumference of a circle of diameter x units.

(a) If $n > 2$ and even, show that

$$C = \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}$$

If $n > 1$ and odd, it can be shown that

$$C = \frac{n \sin \frac{2\pi}{n}}{\pi \left(1 + \cos \frac{\pi}{n}\right)}$$

(b) Find the regular polygon with the least number of sides for which the compactness is more than 0,99.

(c) Comment briefly on whether C is a good measure of compactness.

Solución:

(a) El área de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferecia de radio x es

$$S = n \cdot \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

Si n es par $d = 2x$. Por tanto

$$C = \frac{4 \cdot n \cdot \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}{4\pi x^2} = \frac{n}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

(b) El primer polígono de un número par de lados que cumple la condición es:

$$\frac{n}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} > 0{,}99 \quad \Longrightarrow \quad n = 26$$

Si probamos con n impar debe ocurrir

$$\frac{n \sin \frac{2\pi}{n}}{\pi \left(1 + \cos \frac{\pi}{n}\right)} > 0{,}99 \quad \Longrightarrow \quad n = 21$$

La respuesta es $n = 21$.

(c) La medida de la compacidad parece que es dependiente de si el número de lados es par o impar. En este sentido no parece muy buena.

♠♠♠♠

2.2. Section B

Ejercicio 8. (12 puntos)

Consider the triangle PQR where $Q\hat{P}R = 30^{\text{o}}$, $PQ = (x+2)$ cm and $PR = (5-x)^2$ cm, where $-2 < x < 5$.

(a) Show that the area, A cm^2, of the triangle is given by

$$A = \frac{1}{4}\left(x^3 - 8x^2 + 5x + 50\right)$$

(b) (I) State $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}$

(II) Verify that $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$ when $x = \frac{1}{3}$

(c) (I) Find $\dfrac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}x^2}$ and hence justify that $x = \frac{1}{3}$ gives the maximum area of triangle PQR.

(II) State the maximum area of triangle PQR.

(III) Find QR when the area of triangle PQR is a maximum.

Solución:

(a) El área es igual a la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido:

$$A = \frac{1}{2}\,(x+2)(5-x)^2\,\text{sen}\,30^{\text{o}} = \frac{1}{4}\,(x+2)(25+x^2-10x) = \frac{1}{4}\,(x^3-8x^2+5x+50)$$

(b) (I) Derivando

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4}\,(3x^2-16x+5)$$

(II) Sustituyendo $x = \frac{1}{3}$:

$$3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 16\cdot\frac{1}{3} + 5 = \frac{1}{3} - \frac{16}{3} + 5 = -\frac{15}{3} + 5 = 0$$

(c) (I) La derivada segunda es:

$$\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}x^2} = 6x - 16$$

La derivada segunda en $x = \frac{1}{3}$ vale:

$$6\cdot\frac{1}{3} - 16 < 0$$

Puesto que la derivada es cero y la derivada segunda es menor que cero hay un máximo en $x = \frac{1}{3}$.

(II) El valor máximo del área es:

$$A_{max} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^3} - 8\cdot\frac{1}{3^2} + 5\cdot\frac{1}{3} + 50\right) = \frac{343}{27}$$

(III) Para $x = \frac{1}{3}$ los lados miden:

$$PQ = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

$$PR = \left(5 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{196}{9}$$

El tercer lado se obtiene por el teorema del coseno:

$$QR^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{196}{9}\right)^2 - 2\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{196}{9}$$

Haciendo la raíz cuadrada resulta $QR \simeq 19{,}8$ cm

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (10 puntos)

The number of complaints per day received by customer service at a department store follows a Poisson distribution with a mean of 0,6.

(a) On a randomly chosen day, find the probability that

(I) there are no complaints;

(II) there are at least three complaints.

(b) In a randomly chosen five-day week, find the probability that there are no complaints.

(c) On a randomly chosen day, find the most likely number of complaints received. Justify your answer.

The department store introduces a new policy to improve customer service. The number of complaints received per day now follows a Poisson distribution with mean λ.

On a randomly chosen day, the probability that there are no complaints is now 0,8.

(d) Find the value of λ.

Solución:

(a) En la distribución Po(0,6):

(I) $\mathrm{p}\,(X=0)\simeq 0{,}549$

(II) $\mathrm{p}\,(X\geq 3)=\mathrm{p}\,(X\leq 2)\simeq 0{,}0231$

(b) En este caso en Po(3) la probabilidad es $\mathrm{p}\,(X=0)\simeq 0{,}0498$.

(c) Basta ver las probabilidades en Po(0,6). El valor más probable es $X=0$.

(d) Teniendo en cuenta que en una distribución de Poisson Po(m)

$$\mathrm{p}\,(X=k)=\frac{m^k e^{-m}}{k!}$$

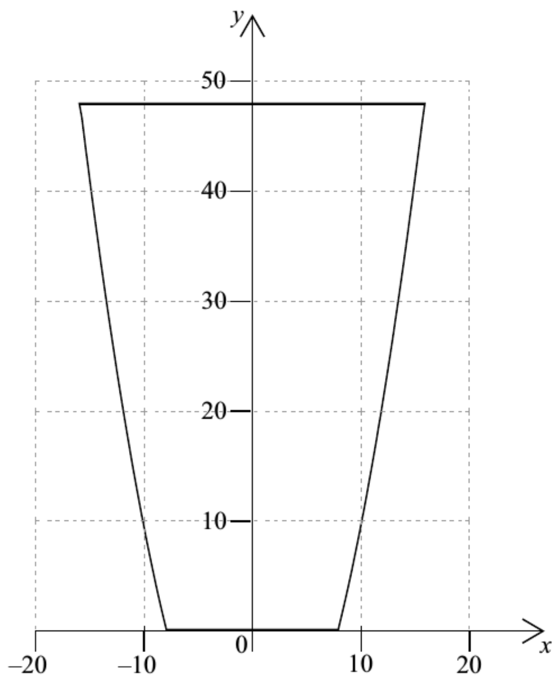
Haciendo $m=\lambda$ y $k=0$:

$$e^{-\lambda}=0{,}8 \quad\Longrightarrow\quad \lambda=-\ln 0{,}8\simeq 0{,}223$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (17 puntos)

The vertical cross-section of a container is shown in the following diagram.



The curved sides of the cross-section are given by the equation $y = 0{,}25x^2 - 16$.
The horizontal cross-sections are circular. The depth of the container is 48 cm.

(a) If the container is filled with water to a depth of h cm, show that the volume, V cm^3, of the water is given by

$$V = 4\pi\left(\frac{h^2}{2} + 16h\right)$$

The container, initially full of water, begins leaking from a small hole at a rate given by

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)}$$

where t is measured in seconds.

(b) (I) Show that

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{250\sqrt{h}}{4\pi^2(h+16)^2}$$

(II) State $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ and hence show that

$$t = \frac{-4\pi^2}{250}\int\left(h^{\frac{3}{2}} + 32h^{\frac{1}{2}} + 256h^{-\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}h$$

(III) Find, correct to the nearest minute, the time taken for the container to become empty.

Once empty, water is pumped back into the container at a rate of 8,5 cm$^3 s^{-1}$. At the same time, water continues leaking from the container at a rate of

$$\frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)}\ \mathrm{cm}^3\ \mathrm{s}^{-1}$$

(c) Using an appropriate sketch graph, determine the depth at which the water ultimately stabilizes in the container.

Solución:

(a) El volumen está dado por la siguiente integral

$$V = \pi\int_0^h x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^h 4(y+16)\,\mathrm{d}y = 4\pi\left[\frac{y^2}{2} + 16y\right]_0^h = 4\pi\left(\frac{h^2}{2} + 16h\right)$$

(b) (I) Derivando respecto al tiempo en

$$V = 4\pi\left(\frac{h^2}{2} + 16h\right)$$

resulta

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi\,(h+16)\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi(h+16)}\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

Sustituyendo:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi(h+16)}\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi(h+16)}\left(-\frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)}\right) = -\frac{250\sqrt{h}}{4\pi^2(h+16)^2}$$

(II) De la expresión anterior obtenemos que:

$$\mathrm{d}t = -\frac{4\pi^2(h+16)^2}{250\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h = -\frac{4\pi^2}{250}\cdot\frac{(h+16)^2}{\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h$$

e integrando

$$t = -\frac{4\pi^2}{250}\int\frac{(h+16)^2}{\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h = -\frac{4\pi^2}{250}\int\left(h^{\frac{3}{2}} + 32h^{\frac{1}{2}} + 256h^{-\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}h$$

(III) La altura debe pasar de 48 a 0. Así:

$$t = -\frac{4\pi^2}{250}\int_{48}^{0}\frac{(h+16)^2}{\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h = \frac{4\pi^2}{250}\int_{0}^{48}\frac{(h+16)^2}{\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h = \frac{4\pi^2}{250}\left[\frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{32h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{256h^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{48}$$

Lo más sencillo es utilizar la calculadora. Así obtenemos $t \simeq 45\,\text{mín}$.

(c) La altura se estabiliza cuando

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 8{,}5 - \frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)} = 0$$

Resolviendo con la calculadora se obtiene $h \simeq 5{,}06$ cm

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (11 puntos)

In triangle ABC,

$$3\sin B + 4\cos C = 6$$
$$4\sin C + 3\cos B = 1$$

(a) Show that

$$\sin(B+C) = \frac{1}{2}$$

Robert conjectures that $C\hat{A}B$ can have two possible values.

(b) Show that Robert's conjecture is incorrect by proving that $C\hat{A}B$ has only one possible value.

Solución:

(a) Elevando al cuadrado ambas igualdades:

$$9\,\mathrm{sen}^2 B + 16\cos^2 C + 24\,\mathrm{sen}\,B\cos C = 36$$
$$16\,\mathrm{sen}^2 C + 9\cos^2 B + 24\,\mathrm{sen}\,C\cos B = 1$$

Sumando ambas igualdades resulta

$$9 + 16 + 24(\mathrm{sen}\,B\cos C + \cos B\,\mathrm{sen}\,C) = 37\,; \qquad 25 + 24\,\mathrm{sen}(B+C) = 37$$

y de aquí $\mathrm{sen}(B+C) = \frac{1}{2}$

(b) Puede ocurrir que $B + C = 30^{\mathrm{o}}$ o que $B + C = 150^{\mathrm{o}}$. Veamos que lo primero es imposible.
Si $B + C = 30^{\mathrm{o}}$ entonces $B < 30^{\mathrm{o}}$ y $\mathrm{sen}\,B < \frac{1}{2}$. Pero entonces

$$\begin{aligned} 3\sin B + 4\cos C = 6 \quad &\Longrightarrow \quad 3\,\mathrm{sen}\,B = 6 - 4\cos C \\ &\Longrightarrow \quad 3\,\mathrm{sen}\,B > 2 \\ &\Longrightarrow \quad \mathrm{sen}\,B > \frac{2}{3} \end{aligned}$$

que es imposible porque $\mathrm{sen}\,B < \frac{1}{2}$.

♠♠♠♠