

# Matemáticas 2º Bachillerato. Exámenes

Curso 2020-2021

[www.five-fingers.es](http://www.five-fingers.es)

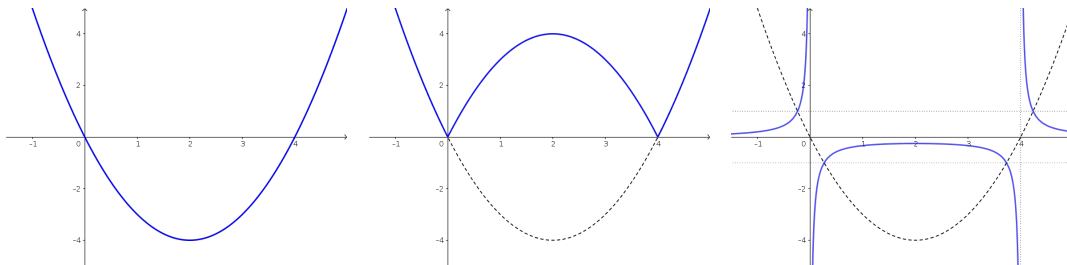
# 1. Límites. Derivadas

1. Representar la curva  $y = x^2 - 4x$ . A partir de esta curva representar:

(a)  $y = |x^2 - 4x|$

(b)  $y = \frac{1}{x^2 - 4x}$

**Solución:**



2. Calcular la función inversa de:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

**Solución:**

Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = \ln(y^2 + 1); \quad y^2 + 1 = e^x; \quad y = f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$$



3. Calcular los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{2-x}}{x^2 - 3x + 2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x-1} \right)^{2x+1}$

**Solución:**

$$\begin{aligned} (a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{2-x}}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{2-x})(1 + \sqrt{2-x})}{(x^2 - 3x + 2)(1 + \sqrt{2-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 2 + x}{(x^2 - 3x + 2)(1 + \sqrt{2-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x - 2)(1 + \sqrt{2-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 2)(1 + \sqrt{2-x})} \\ &= \frac{1}{(1 - 2)(1 + \sqrt{1})} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) Es una indeterminación del tipo  $1^\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x-1} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\left( \frac{x+5}{x-1} - 1 \right) \cdot 2x} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{(x+5-x+1)(2x)}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{12x}{x}} = e^{12}$$



4. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$$

**Solución:**

Los puntos de discontinuidad son  $x = -1$  y  $x = 2$ .

En  $x = -1$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = \frac{-6}{0} = \infty$$

Hay una indeterminación de salto infinito.

En  $x = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+1)}{(x+1)} = \frac{5}{3}$$

En  $x = 2$  hay una discontinuidad evitable



5. Demostrar que las gráficas de las funciones  $f(x) = 1 - x^2$  y  $g(x) = \cos x - 1$  se cortan en un punto  $c$ .

**Solución:**

El problema es equivalente a demostrar que la función

$$F(x) = g(x) - f(x) = \cos x - 1 - 1 + x^2 = \cos x + x^2 - 2$$

se hace cero en algún punto.

- $F$  es continua en  $[0, \pi]$
- $F(0) = \cos 0 + 0 - 2 = 1 - 2 < 0$
- $F(\pi) = \cos \pi + 4 - 2 = -1 + 2 > 0$

Por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (0, \pi)$  tal que  $F(c) = 0$ . Las dos curvas se cortan en  $x = c$ .



6. Derivar las siguientes funciones

(a)  $y = 3e^{\cos^2 x}$

(b)  $y = \operatorname{sen}^3 x$

(c)  $y = \frac{(\ln x)^2}{x}$

(d)  $y = x^2 \operatorname{artg} 3x$

**Solución:**

(a)  $y' = 3e^{\cos^2 x} \cdot 2 \cos x (-\operatorname{sen} x)$

(b)  $y' = 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x$

(c)  $y' = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$

(d)  $y' = 2x \operatorname{artg} 3x + \frac{3}{1+9x^2} x^2$



7. La curva  $C$  está definida por la ecuación  $xy - \ln y = 1$ ,  $y > 0$ .

(a) Calcular  $\frac{dy}{dx}$  en función de  $x$  e  $y$ .

(b) Determinar la ecuación de la tangente a  $C$  en el punto de ordenada  $e$ .

**Solución:**

(a) Derivamos la función:

$$y + xy' - \frac{1}{y}y' = 0$$

$$y^2 + xyy' - y' = 0$$

$$y^2 = y' - xyy'$$

$$y^2 = (1 - xy)y'$$

$$y' = \frac{y^2}{1 - xy}$$

(b) Si  $y = e$  la abscisa es:

$$x \cdot e - \ln e = 1 \quad x = \frac{2}{e}$$

La pendiente de la tangente es:

$$m = \frac{e^2}{1 - e \cdot \frac{2}{e}} = -e^2$$

La ecuación de la tangente es:

$$y - e = -e^2 \left( x - \frac{2}{e} \right)$$



8. Dada la función  $f(x) = xe^{2x}$  dibujar su gráfica indicando, sus asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos.

**Solución:**

(a) El dominio de la función son todos los números reales.

No hay asíntotas verticales. Veamos las horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{2x} = \infty$$

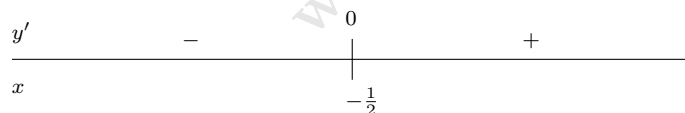
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = 0$$

La recta  $y = 0$  es asíntota en  $-\infty$ .

(b) Calculemos la derivada:

$$f'(x) = e^{2x} + 2e^{2x}x = e^{2x}(1 + 2x)$$

La derivada se anula en  $x = -\frac{1}{2}$ . El signo de la derivada está dado por:



La función es decreciente en  $(-\infty, -\frac{1}{2})$  y creciente en  $(-\frac{1}{2}, \infty)$ . Hay un mínimo en  $x = -\frac{1}{2}$ . La gráfica de la función es como sigue:

