Matemáticas 2º Bachillerato.
Exámenes

Curso 2018-2019

1. Funciones. Límites. Continuidad

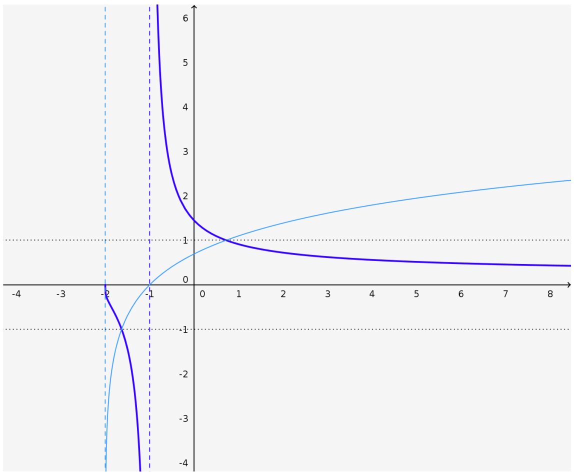
Ejercicio 1. Dibuje la gráfica de las funciones:

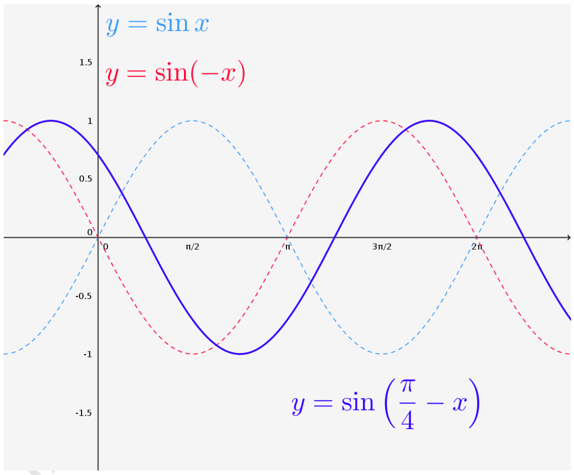
(a) $y = \dfrac{1}{\ln(x+2)}$

(b) $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right), \quad (x \in [0, 2\pi])$

(indicación: dibujar primero la gráfica de $\operatorname{sen}(-x)$)

Solución:





♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcule la función inversa de:

$$f(x) = \ln(x^2+1)$$

Determine el dominio y recorrido de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

Solución:

Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = \ln(y^2+1)\ ; \qquad y^2+1 = e^x\ ; \qquad y = f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$$

El dominio de la función f son los reales positivos y el recorrido, puesto que $x^2+1 \geq 1$ son los reales no negativos, es decir, el intervalo $[0, \infty)$.

Pero en este dominio la función no es inyectiva ya que, por ejemplo, $f(-2) = f(2)$. Para que sea inyectiva tenemos que restringir su dominio a $[0, \infty)$, es decir considerar:

$$f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

en cuyo caso es inyectiva y sobreyectiva. Por consiguiente, el dominio de f^{-1} es $[0, \infty)$ (el recorrido de f) y su recorrido $[0, \infty)$ (el dominio de f).

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcule los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{4-x}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x\ln(1+x)}{1-\cos x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+4}{3x+2}\right)^{\frac{2}{x-1}}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{2x+1}$

Solución:

(a) Multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{4-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{(2-\sqrt{4-x})(2+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{4-4+x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}(2+\sqrt{4-x})=4$$

(b) Aplicando las equivalencias $\operatorname{sen}u\sim u$, $\ln(1+u)\sim u$ y $1-\cos u\sim\frac{u^2}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}=4$$

(c) Se trata deuna indeterminación del tipo 1^∞. Aplicando la aproximación del logaritmo:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+4}{3x+2}\right)^{\frac{2}{x-1}}=\lim_{x\to 1}e^{\left(\frac{x+4}{3x+2}-1\right)\frac{2}{x-1}}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{x+4-3x-2}{3x+2}\frac{2}{x-1}}$$
$$=\lim_{x\to 1}e^{\frac{-2x+2}{3x+2}\frac{2}{x-1}}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{-2(x-1)}{3x+2}\frac{2}{x-1}}$$
$$=\lim_{x\to 1}e^{\frac{-4}{3x+2}}=e^{-\frac{4}{5}}$$

(d) También es una indeterminación 1^∞:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{x+5}{x-1}-1\right)(2x+1)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{(x+5-x+1)(2x+1)}{x-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{12x}{x}}=e^{12}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcule las asíntotas de la función:

$$y=\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}$$

Solución:

Las posibles asíntotas verticales son $x=-1$ y $x=1$:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}=\frac{-1+2+1}{0}=\infty$$

La recta $x=-1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

La recta $x=1$ no es asíntota vertical. En el punto $x=1$ hay una discontinuidad evitable.

La asíntota oblicua es $y=x$ ya que:

$$\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}=\frac{x^2+x-1}{x+1}=x-\frac{1}{x+1}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Demuestre que la función $f(x) = \cos x - x + 1$ corta al eje OX en al menos un punto y calcule la parte entera de la abscisa de ese punto.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función $f(x) = \cos x - x + 1$ se hace cero para algún valor de x:

$$\begin{cases} f \text{ es continua en } [1,2] \\ f(1) = \cos 1 - 1 + 1 = \cos 1 > 0 \\ f(2) = \cos 2 - 2 + 1 = \cos 2 - 1 < 0 \end{cases}$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (1,2)$ tal que $f(c) = 0$. La curva corta al eje al eje OX en $(c,0)$. La parte entera de c es igual a 1.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Estudie los puntos de discontinuidad de la función:

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}$$

Solución:

Los puntos de discontinuidad son $x = -3$ y $x = 3$. Veamos qué tipo de discontinuidad se presenta:

$$\lim_{x\to -3}\left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}\right) = \lim_{x\to -3}\frac{2x+6-12}{x^2-9} = \lim_{x\to -3}\frac{2(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x\to -3}\frac{2}{x+3} = \infty$$

En $x = -3$ hay un salto infinito.

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}\right) = \lim_{x\to 3}\frac{2}{x+3} = \frac{1}{3}$$

En $x = 3$ hay una discontinuidad evitable.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. La función g se define mediante:

$$g(x) = \frac{2x-3}{x-2}\,; \qquad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 2$$

(a) (I) Exprese g en la forma

$$g(x) = A + \frac{B}{x-2}$$

donde A y B son constantes.

(II) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = g(x)$. Indique la ecuación de cada una de las asíntotas y las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes.

La función h se define mediante $h(x) = \sqrt{x}$, para $x \geq 0$.

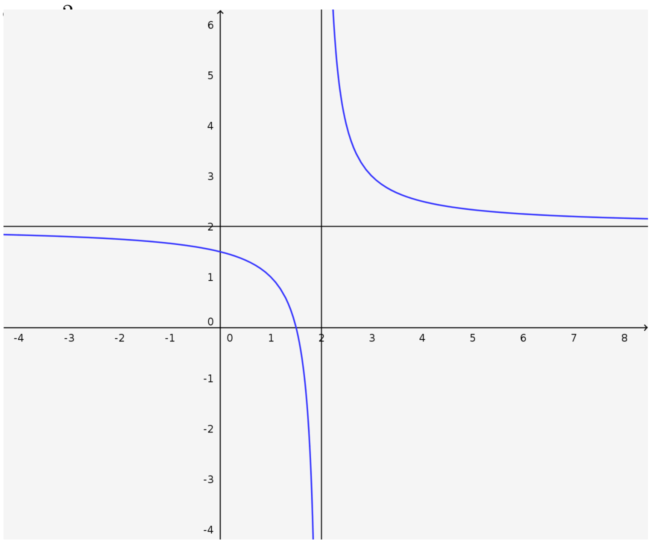
(b) Indique el dominio y recorrido de $h \circ g$

Solución:

(a) (I) Efectuando la división se obtiene

$$g(x) = 2 + \frac{1}{x-2}$$

(II) Las asíntotas son $x = 2$



Las intersecciones con los ejes son los puntos $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

(b) La función $h \circ g$ es:

$$h \circ g(x) = h[g(x)] = \sqrt{\frac{2x-3}{x-2}}$$

El dominio de esta función es la solución de la inecuación

$$\frac{2x-3}{x-2} \geq 0$$

Estudiemos el signo de esta función:

	$\frac{3}{2}$		2	
$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

El dominio es el conjunto $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup (2, \infty)$. Al hacer la raíz la asíntota es $y = \sqrt{2}$. El recorrido de la función es $\left[0, \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right)$

♠♠♠♠

2. Derivadas

Ejercicio 1. Derivar las siguientes funciones

(a) $y = \dfrac{1}{x^2}$

(b) $y = e^{2x} + 3e^x - 2$

(c) $y = 4\cos^3 2x$

(d) $y = 3e^{2\cos^2 x}$

(e) $y = \cos x \ \operatorname{artg} x$

(f) $y = \dfrac{\operatorname{artg} x}{x^2}$

(g) $y = (3x^2 - 1)\ln(1 - x)$

(h) $y = \left(\dfrac{3 - x^2}{3 + x^2}\right)^3$

Solución:

(a) $y' = \dfrac{-2}{x^3}$

(b) $y' = e^{2x} \cdot 2 + 3e^x$

(c) $y' = 4 \cdot 3\cos^2 2x(-\operatorname{sen} 2x) \cdot 2$

(d) $y' = 3e^{2\cos^2 x} 2\cos x(-\operatorname{sen} x)$

(e) $y' = (-\operatorname{sen} x)\operatorname{artg} x + \dfrac{1}{1 + x^2} \cdot \cos x$

(f) $y' = \dfrac{\frac{1}{1+x^2} \cdot x^2 - 2x \cdot \ \operatorname{artg} x}{x^4}$

(g) $y' = 6x\ln(1 - x) + \dfrac{-1}{1 - x} \cdot (3x^2 - 1)$

(h) $y' = 3\left(\dfrac{3 - x^2}{3 + x^2}\right)^2 \cdot \dfrac{-2x(3 + x^2) - 2x(3 - x^2)}{(3 + x^2)^2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. La curva C esta dada por la ecuación

$$\frac{x^2}{y} - 2x = \ln y \qquad \text{para } y > 0$$

(a) Exprese $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en función de x e y.

(b) Calcule el valor de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en el punto de C en que $y = 1$ y $x > 0$.

Solución:

(a) Derivamos en forma implícita

$$\frac{2xy - x^2y'}{y^2} - 2 = \frac{y'}{y}\ ; \qquad 2xy - x^2y' - 2y^2 = yy'\ ; \qquad 2xy - 2y^2 = yy' + x^2y'$$

y, despejando y':

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2xy - 2y^2}{y + x^2}$$

(b) Para $y = 1$, x vale:

$$\frac{x^2}{1} - 2x = \ln 1\ ; \qquad x^2 - 2x = 0\ ; \qquad x = 2$$

Entonces:

$$y'(2, 1) = \frac{4 - 2}{1 + 4} = \frac{2}{5}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ que son paralelas a $2x + y - 1 = 0$.

Solución:

La pendiente de la recta tangente es igual a -2. La derivada en el punto de tangencia debe ser -2:

$$\frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = -2\ ; \qquad \frac{-2}{(x-1)^2} = -2\ ; \qquad \frac{1}{(x-1)^2} = 1\ ; \qquad (x-1)^2 = 1$$

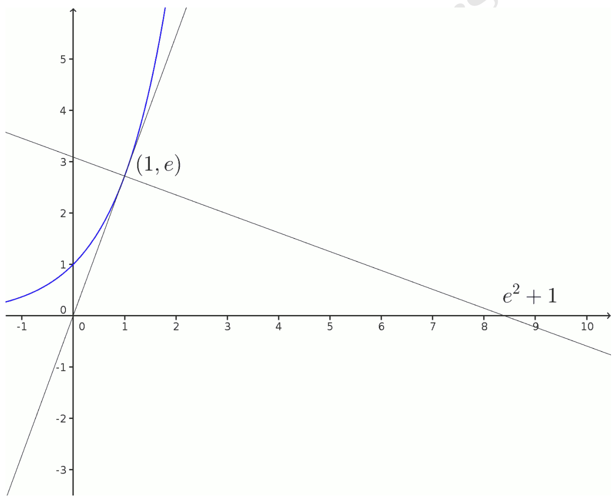
y así obtenemos $x = 2$ y $x = 0$. Los puntos de tangencia son $(0,0)$ y $(2,4)$. Las rectas tangentes son:

$$y = -2x\ ; \qquad y - 4 = -2(x-2)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Halla el área del triángulo formado por el eje X y las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $y = e^x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:



El punto de tangencia es $(1, e)$. La ecuación de la recta tangente en ese punto es:

$$y - e = e(x-1) \quad \Longrightarrow \quad y = ex$$

y la normal:

$$y - e = \frac{-1}{e}(x-1) \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{e}\,x + e + \frac{1}{e}$$

La intersección de la tangente con el eje de abscisas es el origen de coordenadas. La intersección de la normal es:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{e}\,x + e + \frac{1}{e} \\ y = 0 \end{cases}$$

La intersección es el punto $(e^2 + 1, 0)$.

El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}(e^2+1)e = \frac{e^3+e}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Determinar los valores de a, b y c para que la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en $x = -1$ y su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3.

Solución:

Calculamos las dos primeras derivadas:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$
$$f''(x) = 6x + 2a$$

Las condiciones que nos dan las podemos interpretar como:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f''(-1) = 0 \\ f'(1) = 3 \end{cases}$$

de modo que tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 0 = c \\ -6 + 2a = 0 \\ 3 + 2a + b = 3 \end{cases}$$

que tiene como solución $a = 3$, $b = -6$ y $c = 0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

Solución:

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

La raíz del numerador es:

$$1 - 2 \ln x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln x = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{e}$$

El denominador tiene una raíz triple $x = 0$ pero en ese punto no existe la función. El signo de la derivada se representa en el siguiente esquema:

	0		$\sqrt{e}$	
$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$

La función es creciente en $(0, \sqrt{e})$ y decreciente en $(\sqrt{e}, \infty)$. En el punto $x = \sqrt{e}$ hay un máximo local.

♠♠♠♠

Ejercicio 7.

(a) Calcular los valores de a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \ge \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x.

(*b*) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

(*a*) Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (3x+2) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+2a\cos x) = 2a$$

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-} (x^2+2a\cos x) = \pi^2 - 2a$$

$$\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} (ax^2+b) = \pi^2 a + b$$

e igualando los límites por la derecha y por la izquierda resulta $a=1$ y $b=-2$.

(*b*) Ahora tenemos la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x<0 \\ x^2+2\cos x & \text{si } 0\le x<\pi \\ x^2-2 & \text{si } x\ge\pi \end{cases}$$

Para $x\neq 0$ y $x\neq\pi$ la derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x<0 \\ 2x-2\operatorname{sen} x & \text{si } 0\le x<\pi \\ 2x & \text{si } x\ge\pi \end{cases}$$

En $x=0$:

$$f'(0^-) = 3\ ; \qquad f'(0^+) = 0$$

la función no es derivable.
En $x=\pi$:

$$f'(\pi^-) = 2\pi\ ; \qquad f'(\pi^+) = 2\pi$$

La función es derivable.

♠♠♠♠

3. Derivadas e integrales

Ejercicio 1. Derivar las siguientes funciones

(*a*) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(*b*) $y = \operatorname{sen}^3 x$

(*c*) $y = 1 - \ln \operatorname{tg} x$

(*d*) $y = 3e^{\cos^2 x}$

(*e*) $y = \operatorname{arsen}\dfrac{1}{x}$

(*f*) $y = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

(*g*) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}^2 x}{1-\operatorname{sen}^2 x}}$

(*h*) $y = x^2 \operatorname{artg} 3x$

Solución:

(*a*) $y' = -\dfrac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$

(*b*) $y' = 3\operatorname{sen}^2 x\cos x$

(*c*) $y' = -\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(*d*) $y' = 3e^{\cos^2 x} \cdot 2\cos x(-\operatorname{sen} x)$

(*e*) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(*f*) $y' = \dfrac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^2}{x^2} = \dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$

(*g*) $y' = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{-2\operatorname{sen} x\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}$

(*h*) $y' = 2x\operatorname{artg} x + \dfrac{3}{1+9x^2\,x^2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} (x^2-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$

Solución:

(*a*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}$

(*b*) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} (x^2-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{-\left(1+\operatorname{cotg}^2\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi}$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Se considera la función

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$$

se pide:

(*a*) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

(*b*) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.

(*c*) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Solución:

(*a*) Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2+1) - 2xe^{-x}}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)^2}{(x^2+1)^2}$$

La pendiente en el punto $x_0 = 0$ es:

$$m = f'(0) = -1$$

y la ordenada del punto de tangencia es:

$$y_0 = f(0) = 1$$

La ecuación de la tangente es $y - 1 = -x$.

(*b*) No hay asíntotas verticales.

La recta $y = 0$ es asíntota cuando $x \to \infty$ pueesto que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x(x^2+1)} = 0$$

Sin embargo no es asíntota cuando $x \to -\infty$.

(c) La derivada se anula en $x = -1$. Este punto no es un extremo local pues el signo de la derivada responde al siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ - & | & - \\ & -1 & \end{array}$$

La función es siempre decreciente.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dada la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

se pide:

(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.

(b) Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado anterior con los dos ejes coordenados.

(c) Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.

Solución:

(a) En el punto $x = a$ la función toma el valor $\frac{1}{a}$. La derivada de la función es $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. La pendiente de la tangente en el punto a será

$$m = -\frac{1}{a^2}$$

y la ecuación de la tangente es

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

(b) Las intersecciones de esta recta con el eje de abscisas:

$$\begin{cases} y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a) \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A(2a, 0)$$

y con el eje de ordenadas

$$\begin{cases} y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a) \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B\left(0, \frac{2}{a}\right)$$

(c) El cuadrado de la distancia entre estos dos puntos es:

$$F(a) = 4a^2 + \frac{4}{a^2}$$

Si la distancia es mínima, la derivada debe ser cero:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a} = 8a - \frac{8}{a^3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a^4 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad = 1$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular las integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + 9x^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 - 9}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\ln(x^2+1) + C$

(b) Por partes

$$u = \ln x \quad \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x \quad v = \frac{x^3}{3}$$

Entonces

$$\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3} + C$$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{artg}\,(3x) + C$

(d) Descomponemos en fracciones:

$$\frac{x+1}{x^2-9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+3)}{(x-3)(x+3)} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{3}\,; \quad B = \frac{2}{3}$$

Entonces:

$$\int \frac{x+1}{x^2-9} = \frac{1}{3}\ln|x+3| + \frac{2}{3}\ln|x-3| + C$$

♠♠♠♠

4. Examen de Cálculo

1. (8 puntos) Una curva viene dada por $xy = y^2 + 4$.
   - (a) Muestre que no hay ningún punto en el que la tangente a la curva sea horizontal.
   - (b) Halle las coordenadas de aquellos puntos en los que la tangente a la curva es vertical.

Solución:

(a) Derivando de forma implícita se obtiene:

$$\begin{aligned} &y + xy' = 2yy' \\ &2yy' - xy' = y \\ &y'(2y - x) = y \\ &y' = \frac{y}{2y - x} \end{aligned}$$

Según esta expresión, la derivada se anula para $y = 0$. Sin embargo no hay ningún punto de la curva con ordenada cero pues al sustituir este valor en la ecuación de la curva se obtiene $0 = 4$. No hay entonces ningún punto de tangente horizontal.

(b) La tangente es vertical cuando la derivada tiende a infinito, es decir, en este caso, cuando $2y - x = 0$. Sustituyendo $x = 2y$ en la ecuación de la curva:

$$\begin{aligned} &2y^2 = y^2 + 4 \\ &y^2 = 4 \\ &y = -2\,; \quad y = 2 \end{aligned}$$

Los puntos son $(-4, -2)$ y $(4, 2)$.

♠♠♠♠

2. (6 puntos) La variable aleatoria continua X tiene la función de distribución de probabilidad

$$f(x) = A \operatorname{sen}(\ln x), \qquad 1 \leq x \leq 5$$

   - (a) Halle el valor de A con una aproximación de tres cifras decimales.
   - (b) Halle la moda de X.
   - (c) Halle el valor $\mathrm{p}\,(X \leq 3 \mid x \geq 2)$.

Solución:

(a) Con la calculadora vemos que

$$I = \int_1^5 \operatorname{sen} \ln x \, \mathrm{d}x \simeq 3{,}09$$

Entonces, A debe valer

$$A = \frac{1}{I} \simeq 0{,}323$$

(b) Calculamos el máximo de la función de densidad. Con la calculadora obtenemos que la moda es 4,81.

(c) La probabilidad es:

$$\mathrm{p}\,(X \leq 3 \mid x \geq 2) = \frac{\mathrm{p}\,(2 \leq X \leq 3)}{\mathrm{p}\,(X \geq 2)}$$

Las probabilidades las calculamos mediante integrales:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}\,(2 \leq X \leq 3) &= \int_2^3 A \operatorname{sen} \ln x \, \mathrm{d}x \simeq 0{,}253 \\ \mathrm{p}\,(X \geq 2) &= \int_2^5 A \operatorname{sen} \ln x \, \mathrm{d}x \simeq 0{,}881 \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathrm{p}\,(X \leq 3 \mid x \geq 2) = \frac{\mathrm{p}\,(2 \leq X \leq 3)}{\mathrm{p}\,(X \geq 2)} \simeq 0{,}288$$

♠♠♠♠

3. (12 puntos)

Una partícula A se mueve de modo tal que su velocidad v m s^{-1}, en el instante t segundos, viene dada por

$$v(t) = \frac{t}{12+t^4}, \qquad t \geq 0.$$

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = v(t)$. Indique claramente el máximo local y escriba sus coordenadas.

(b) Utilice la sustitución $u = t^2$ para hallar $\displaystyle\int \frac{t}{12+t^4}\,\mathrm{d}t$.

(c) Halle la distancia exacta que recorre la partícula A entre $t = 0$ y $t = 6$ segundos. Dé la respuesta de la forma k artg (b), $\quad k, b \in \mathbb{R}$.

(d) La partícula B se mueve de tal modo que su velocidad v m s^{-1} y su desplazamiento s m están relacionados mediante la ecuación $v(s) = \operatorname{arsen}(\sqrt{s})$. Halle la aceleración de la partícula B cuando $s = 0{,}1$ m.

Solución:

(a) La derivada de la función es:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{12+t^4-4t^3\cdot t}{(12+t^4)^2} = \frac{12-3t^4}{(12+t^4)^2}$$

La derivada se anula en $t = \sqrt{2}$. La función tiene un máximo en $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{16}\right)$.

(b) Con el cambio $u = t^2$, $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$ tenemos:

$$\int \frac{t}{12+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{12+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}\operatorname{artg}\frac{u}{\sqrt{12}} + C = \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{artg}\frac{t^2}{2\sqrt{3}} + C$$

(c) Calculamos la integral definida:

$$s = \int_0^6 \frac{t}{12+t^4}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{artg}\frac{x^2}{2\sqrt{3}}\right]_0^6 = \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{artg} 6\sqrt{3}$$

(d) Teniendo en cuenta que

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot v$$

Derivando y sustituyendo v:

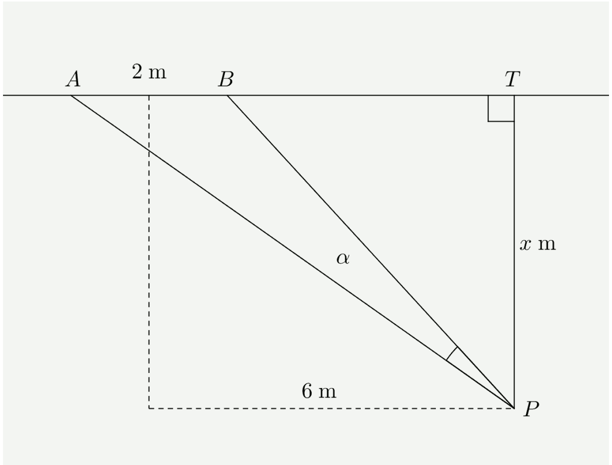
$$a = \frac{1}{\sqrt{1-s}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{s}}\cdot\operatorname{arsen}\sqrt{s}$$

Sustituyendo $s = 0{,}1$ se obtiene $a \simeq 0{,}536$ m s^{-2}.

♠♠♠♠

4. (22 puntos)

Los puntos A, B y T se encuentran sobre una línea de una cancha de fútbol sala. La portería AB, tiene 2 m de ancho. Un jugador situado en el punto P patea el balón en dirección a la portería. PT es perpendicular a la recta AB y se encuentra a 6 m de una recta paralela que pasa por el centro de AB. Sea PT igual a x metros y sea $\alpha = \widehat{APB}$, medido en grados. Suponga que el balón se desplaza por el piso.



(a) Halle el valor de α cuando $x = 10$.

(b) Muestre que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2x}{x^2+35}$$

El valor de α es máximo cuando el valor de $\operatorname{tg}\alpha$ es máximo.

(c) (I) Halle $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{tg}\alpha)$.

(II) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de α tal que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{tg}\alpha) = 0$.

(III) Halle $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\operatorname{tg}\alpha)$ y, a partir de lo anterior, muestre que el valor de α nunca supera los 10°.

(d) Halle el conjunto de valores de x para los cuales $\alpha \geq 7^{\circ}$

Solución:

(a) De la figura se deduce:

$$\alpha = \operatorname{artg}\frac{7}{x} - \operatorname{artg}\frac{5}{x}$$

y para $x = 10$ resulta $\alpha \simeq 8{,}43^{\circ}$

(b) Llamemos $\widehat{TPA} = \alpha_1$ y $\widehat{TPB} = \alpha_2$. Entonces $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ y

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\frac{7}{x}-\frac{5}{x}}{1+\frac{7}{x}\frac{5}{x}} = \frac{2x}{x^2+35}$$

(c) (I)

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{tg}\alpha)}{\mathrm{d}x} = \frac{2(x^2+35)-2x\cdot 2x}{(x^2+35)^2} = \frac{70-2x^2}{(x^2+35)^2}$$

(II) La derivada se anula para $x = \sqrt{35}$ m.

(III) La derivada segunda es igual a:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2(\operatorname{tg}\alpha)}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{-4x(x^2+35)^2 - 2(x^2+35)\cdot 2x\cdot(70-2x^2)}{(x^2+35)^4}\\ &= \frac{-4x(x^2+35) - 2\cdot 2x\cdot(70-2x^2)}{(x^2+35)^3}\\ &= \frac{4x^3-420x}{(x^2+35)^3}\\ &= \frac{4x(x^2-105)}{(x^2+35)^3}\end{aligned}$$

La derivada segunda para $x = \sqrt{35}$ es negativa. Por consiguiente α es máximo para este valor de x. El valor máximo de α es:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{35}}{35+35} = \frac{\sqrt{35}}{35} \quad\Longrightarrow\quad \alpha \simeq 9{,}59^{\circ}$$

Por tanto, α nunca es mayor de 10°.

(*d*) Representamos con la calculadora las curvas

$$y_1 = \text{ artg}\,\frac{2x}{x^2+35}\ ; \qquad y_2 = 7$$

y vemos que el ángulo es mayor de 7° entre 2,55 m y 13,7 m.

♠♠♠♠

5. Matrices y determinantes

Ejercicio 1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcular $(A+B)C^t$.

Solución:

$$\begin{aligned}(A+B)C^t &= \left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 0 & -3 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Hallar los valores de k para los cuales la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

no posee inversa. Calcular A^{-1} para $k=0$.

Solución:

La matriz no tiene inversa cuando su determinante sea cero. Así pues, calculamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2\cdot(k-1)\cdot 2 + k(k-2) - 2(k-2) + 2 - k(k-1)(-1) = 2k^2 - 9k + 9$$

Igualando a cero resulta:

$$2k^2 - 9k + 9 = 0 \quad\Longrightarrow\quad k = 3,\ k = \frac{3}{2}$$

Para estos valores de k no existe la matriz inversa.

Calculemos la inversa para $k=0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \text{adj}\,A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que el determinante para $k = 0$ vale 9 tenemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -4 & -2 \\ 7 & 0 & 1 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -4 & -2 \\ 7 & 0 & 1 & 11 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{poniendo ceros en la 3}^{\text{a}} \text{ columna}$$

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad F_3 = F_2$$

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{intercambiamos } C_1 \text{ y } C_3$$

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad F_3 \to F_3 - F_2$$

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

Solución:

Poniendo ceros en la primera fila:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -5 & 4 \\ 3 & 11 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} \qquad \text{desarrollamos por la 1}^{\text{a}}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} -5 & -5 & 4 \\ 11 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 133$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

calcular:

(a) La matriz inversa de A.

(b) La matriz X que verifica la ecuación:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

El determinante de A es igual a 1, de modo que la inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \implies X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

6. Matrices. Sistemas

Ejercicio 1. Dado el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en esos casos.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k+1 & k-1 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(k + 1 - k^2 + 1) = k^2 - k - 2$$

El determinante se anula para $k = -1$ y $k = 2$. Para estos valores, el rango de la matriz de coeficientes sera menor que 3 y el sistema será compatible indeterminado.

Sea $k = -1$. Elegimos dos ecuaciones independientes:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

Una solución particular del sistema es:

$$x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\ ; \qquad y = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\ ; \qquad z = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2\ ;$$

Por las propiedades de los sistemas homogéneos otra solución es ésta dividida por -2, o sea $(1, 0, 1)$.
La solución general es $(\lambda, 0, \lambda)$

Sea ahora $k = 2$. Elegimos dos ecuaciones independientes:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Calculamos una solución particular del sistema:

$$x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\ ; \qquad y = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\ ; \qquad z = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5\ ;$$

La solución general es $(\lambda, -3\lambda, -5\lambda)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Dada la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

(b) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

Solución:

(a) Calculamos el determinado de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2\,(1 - a^3 - 1 + a + a - a) = 2a(1 - a^2)$$

El determinante se anula para $a = 0$, $a = -1$ y $a = 1$.

- Si $a \notin \{0, -1, 1\}$ el determinante es distinto de cero y el rango de la matriz es 3.
- Si $a = 0$:
$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\\2 & 0 & 1\end{pmatrix} = 2$$
- Si $a = -1$:
$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\-2 & 1 & -1\\2 & -1 & 1\end{pmatrix} = 2$$
- Si $a = 1$:
$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\2 & 1 & -1\\2 & 1 & 1\end{pmatrix} = 2$$

(b) La matriz inversa existe si $a \notin \{-1, 0, 1\}$.
Para $a = 2$ el determinante de la matriz es -12. La matriz es
$$M = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\4 & 1 & -1\\2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$
Calculamos la matriz adjunta:
$$\operatorname{adj} M = \begin{pmatrix}3 & -6 & 6\\-5 & 6 & -2\\1 & -6 & -2\end{pmatrix}$$
La matriz inversa es:
$$M^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}-3 & 5 & -1\\6 & -6 & 6\\-6 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3.

(a) Hallar todas las matrices $A = \begin{bmatrix}a & a\\0 & b\end{bmatrix}$ distintas de $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ tales que $A^2 = A$.

(b) Para una cualquiera de las matrices calculadas en el apartado anterior calcular:
$$A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10}$$

Solución:

(a) Calculamos A^2:
$$A^2 = \begin{pmatrix}a & a\\0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & a\\0 & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2 & a^2 + ab\\0 & b^2\end{pmatrix}$$
Para que $A^2 = A$ debe cumplirse:
$$\begin{cases}a^2 = a\\a^2 + ab = a\\b^2 = b\end{cases}$$
Las soluciones son $a = 0,\ b = 1$ o $a = 1,\ b = 0$, es decir, las matrices
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\ ; \qquad \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

(b) Si $A^2 = A$ también las demas potencias son iguales a A. Entonces:
$$A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10} = 10A$$

Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \qquad 10A = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$$

se pide:

(a) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

(b) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4k + k^2 - 1 - 2(k-1) + 2 + k^2 + k = 2k^2 - 5k + 2$$

El determinante se anula para $k = 2$ y para $k = \frac{1}{2}$. Pueden darse los siguientes casor:

- Si $k \neq 2$ y $k \neq \frac{1}{2}$, rango $(A) =$ rango $(A^*) = 3$. El sistema es compatible determinado.
- Si $k = 2$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. En cuanto a la matriz ampliada:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

  El sistema es compatible indeterminado.
- Si $k = \frac{1}{2}$ el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 2 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

  El rango es igual a 3 y el sistema es incompatible. Para calcular este rango primero hemos suprimido la primera columna que es dependiente de la tercera, luego hemos multiplicado la primera y la tercera columna por 2 para operar con enteros y hemos puesto ceros en la segunda columna.
- El sistema tiene infinitas soluciones para $k = 2$. Elegimos dos ecuaciones independientes, por ejemplo, la primera y la segunda:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

  Tomamos $x = \lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} 3y + 2z = -1 - \lambda \\ y + z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

  El determinante de la matriz de coeficientes es igual a 1. Entonces:

$$y = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2-2\lambda & 1 \end{vmatrix} = -5 + 3\lambda \; ; \qquad z = \begin{vmatrix} 3 & -1-\lambda \\ 1 & 2-2\lambda \end{vmatrix} = 7 - 5\lambda$$

  La solución del sistema es $(\lambda, -5 + 3\lambda, 7 - 5\lambda)$.

♠♠♠♠

7. Geometría

Ejercicio 1. Dado el punto $P(-1,0,2)$ y las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

se pide:

(a) Determinar la posición relativa de r y s.

(b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s.

(c) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s

Solución:

(a) Sea A un punto de la primera recta y $\vec{u}$ su vector director, B un punto de la segunda recta y $\vec{v}$ el vector director:

$$A(1,-1,0), \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad B(1,0,3), \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Las rectas no son paralelas. Para saber si se cortan o se cruzan, calculamos el producto mixto:

$$\left[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Las rectas se cruzan.

(b) Calculamos el plano que contiene a r y P:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ y & 1 & -1 \\ z-2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0\,; \qquad x - 4y + 3z - 5 = 0$$

Calculamos el plano que contiene a s y P:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ y & 1 & 0 \\ z-2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\,; \qquad x - y - 2z + 5 = 0$$

La recta que nos piden, si existe, es la intersección de estos dos planos:

$$\begin{cases} x - 4y + 3z - 5 = 0 \\ x - y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

(c) El vector director de la perpendicuar común es:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & 1 \\ \vec{\jmath} & 1 & 1 \\ \vec{k} & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El plano que contiene a r y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,; \qquad x + y - 2z = 0$$

El plano que contiene a s y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & 1 & 1 \\ z-3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,; \qquad z - 3 = 0$$

La perpendicuarcomún es la intersecciones de los dos planos:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Una de las caras del paralelepípedo H tiene vértices en los puntos $A(4,2,8)$, $B(6,4,12)$, $C(6,0,10)$ y $D(8,2,14)$.

(a) Si el punto $E(6,8,28)$ es otro de los vértices, hallar el volumen de H.

(b) Hallar el punto E' simétrico de E respecto del plano que contiene a la cara $ABCD$.

Solución:

(a) Calculamos el producto mixto:

$$\left[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AE}\right]=\begin{vmatrix}2&2&2\\2&-2&6\\4&2&20\end{vmatrix}=-112$$

El volumen del paralelepípedo es igual a 112.

(b) El plano ABC tiene como ecuación:

$$\begin{vmatrix}x-4&2&2\\y-2&2&-2\\z-8&4&2\end{vmatrix}=0\ ;\qquad \begin{vmatrix}x-4&1&1\\y-2&1&-1\\z-8&2&1\end{vmatrix}=0\ ;\qquad 3x+y-2z+2=0$$

La perpendicular a este plano por el punto E es:

$$\begin{cases}x=6+3\lambda\\y=8+\lambda\\z=28-2\lambda\end{cases}$$

Y la intersección del plano y la perpendicular:

$$\begin{cases}3x+y-2z+2=0\\x=6+3\lambda\\y=8+\lambda\\z=28-2\lambda\end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos el punto $M(12,10,24)$. Este punto es punto medio entre $E(6,8,28)$ y $E'(x',y',z')$. Entonces:

$$12=\frac{6+x'}{2}\ ;\qquad 10=\frac{8+y'}{2}\ ;\qquad 24=\frac{28+z'}{2}$$

El punto simétrico es $E'\,(18,12,20)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Dados los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(a,2,0)$, $P_3(1,5,4)$ y $P_4(2,0,2)$, se pide:

(a) Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

(b) Hallar el valor de a para que el tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 tenga volumen igual a 7.

(c) Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

Solución:

(a) Debe ocurrir que $\left[\vec{P_1P_2},\vec{P_1P_3},\vec{P_1P_4}\right]=0$:

$$\begin{vmatrix}a-1&0&1\\-1&2&-3\\1&5&3\end{vmatrix}=7(3a-4)=0\quad\Longrightarrow\quad a=\frac{4}{3}$$

(b) En este caso:

$$\frac{1}{6}\,|7(3a-4)|=7\quad\Longrightarrow\quad a=\frac{10}{3},\ a=-\frac{2}{3}$$

(c) Es el plano mediador de P_1 y P_3:

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=(x-1)^2+(y-5)^2+(z-4)^2$$
$$4y+10z-31=0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4.

(a) Determinar la posición relativa de los siguientes planos según los valores del parámetro k:

$$\begin{aligned}\pi_1 &\equiv 2x + 3y + kz = 3\\ \pi_2 &\equiv x + ky - z = -1\\ \pi_3 &\equiv 3x + y - 3z = -k\end{aligned}$$

(b) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

Solución:

(a) Basta estudiar la compatibilidad del sistema. Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & k \\ 1 & k & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6k + k - 9 - 3k^2 + 2 + 9 = -(3k^2 + 5k - 2)$$

El determinante se hace cero para $k = -2$ y $k = \frac{1}{3}$:

- Para $k \neq -2$ y $k \neq \frac{1}{3}$ el sistema es compatible determinado y los tres planos se cortan en un punto.
- Para $k = -2$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. En cuanto a la matriz ampliada:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

El sistema es compatible indeterminado y los tres planos se cortan en una recta.

- Si $k = \frac{1}{3}$ el rango de la matriz de coeficientes es 2 yel de la matriz ampliada:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 3 & \frac{1}{3} & 3 \\ 1 & \frac{1}{3} & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & -3 & -3 \\ 9 & 3 & -9 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

El segundo y el tercer planos son paralelos y el primero los corta. El sistema es incompatible

(b) Para $k = -2$ el vector director de la recta intersección de los planos es:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 2 & 1 \\ \vec{\jmath} & 3 & -2 \\ \vec{k} & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = -7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El vector:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector director de la recta.

♠♠♠♠