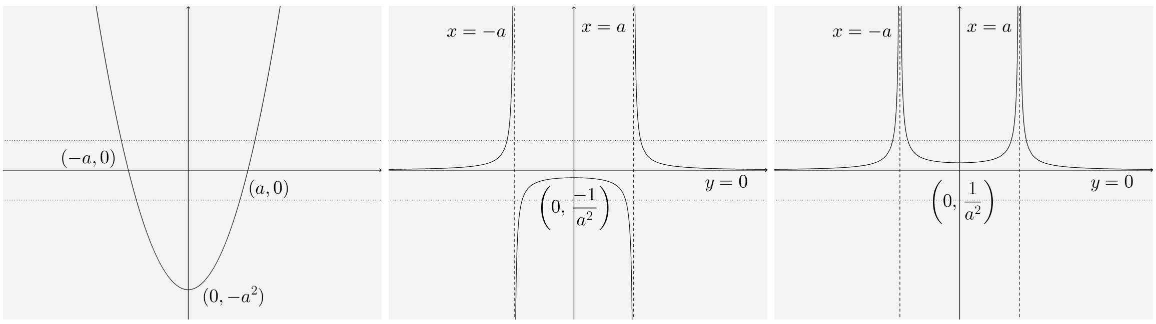
1. Funciones

Ejercicio 1. Considere la función f definida por $f(x) = x^2 - a^2$, $x \in \mathbb{R}$. Dibuje aproximadamente las siguientes curvas en sistemas de ejes separados, mostrando todos los cortes con los ejes x e y, los máximos, los mínimos y las asíntotas que haya:

(a) $y = f(x)$ $\qquad$ (b) $y = \frac{1}{f(x)}$ $\qquad$ (c) $y = \left|\frac{1}{f(x)}\right|$

Solución:

Las gráficas son las siguientes:



♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} \right)$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x+2}{2x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

Solución:

(a) Hacemos la diferencia racionalizando la segunda fracción:

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) = \lim_{x\to 2} \frac{1-\sqrt{x-2}}{x-2} = \infty$$

(b) Es una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicando la aproximación del logaritmo:

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{x+2}{2x} \right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2} e^{\left(\frac{x+2}{2x}-1\right)\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{2-x}{2x(x-2)}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{-1}{2x}} = e^{-\frac{1}{4}}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}$$

Solución:

La función es continua salvo en $x = -3$ y en $x = 3$. Calculemos los límites en esos puntos para ver el tipo de discontinuidad:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} \right) &= \lim_{x\to -3} \frac{2(x+3)-12}{x^2-9} \\ &= \lim_{x\to -3} \frac{2x-6}{x^2-9} \\ &= \infty \end{aligned}$$

En $x=-3$ hay un salto infinito. Gráficamente esto significa que $x=-3$ es una asíntota vertical.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3}-\frac{12}{x^2-9}\right)&=\lim_{x\to 3}\frac{2(x+3)-12}{x^2-9}\\&=\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{x^2-9}\\&=\lim_{x\to 3}\frac{2}{x+3}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

En $x=3$ la función tiene una discontinuidad evitable.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Demostrar que la función $f(x)=xe^{-x}+3$ toma el valor $\frac{3}{2}$ en el intervalo $(-1,0)$.

Solución:

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y, por consiguiente, en $[-1,0]$. Además:

$$\begin{aligned}f(-1)&=-e+3\\f(0)&=3\end{aligned}$$

Por el teorema de Bolzano, la función toma en $(-1,0)$ toma todos los valores comprendidos entre $-e+3$ y 3. Por tanto toma en algún punto el valor $\frac{3}{2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & x<1\\ cx & x\geq 1\end{cases}$$

Calcular a, b y c para que la función sea derivable en $x=1$, sabiendo que $f(0)=f(4)$.

Solución:

Puesto que la función es continua en $x=1$ tenemos que:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)\quad\Longrightarrow\quad 1+a+b=c$$

La derivada de la función en los puntos distintos de 1 es:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+a & x<1\\ c & x>1\end{cases}$$

Puesto que la función es derivable en $x=1$ se verifica que:

$$f'(1^-)=f(1^+)\quad\Longrightarrow\quad 2+a=c$$

Como además:

$$f(0)=f(4)\quad\Longrightarrow\quad b=4c$$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones resulta $a=-\frac{7}{4}$, $b=1$, $c=\frac{1}{4}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular las asíntotas de la función

$$y=\frac{2x^3-3x+2}{x^2-x}$$

Solución:

La función tiene dos asíntotas verticales $x = 0$ y $x = 1$. No tiene asíntotas horizontales puesto que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x + 2}{x^2 - x} = \infty$$

Calculemos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x + 2}{x^2 - x} \cdot \frac{1}{x} = 2$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3 - 3x + 2}{x^2 - x} - 2x\right) = 2$$

La asíntota oblicua es $y = 2x + 2$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Derivar las siguientes funciones:

$(a)\ f(x) = \ln \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad (b)\ f(x) = (x^2 - 3x)e^{3x^2-x}$

Solución:

(a) La función puede escribirse:

$$f(x) = 2\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$$

Su derivada es:

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2 + 1}$$

(b) Derivamos como producto:

$$f'(x) = (2x - 3)\,e^{3x^2-x} + e^{3x^2-x}(6x - 1)\,(x^2 - 3x)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Comprobar que los puntos $(0, 0)$ y $(\sqrt{2\pi}, -\sqrt{2\pi})$ de la curva $e^{x+y} = \cos(xy)$ tienen una tangente común.

Solución:

Calculemos la derivada:

$$e^{x+y}(1 + y') = -\operatorname{sen}(xy)(y + xy')$$

En el punto $(0, 0)$ calculamos la derivada sustituyendo x e y por 0:

$$1 + y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -1$$

y, en consecuencia la tangente en ese punto es $y = -x$.

Calculamos ahora la derivada en $\left(\sqrt{2\pi}, -\sqrt{2\pi}\right)$:

$$1 + y' = -\operatorname{sen}(-2\pi)(\ldots) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -1$$

La ecuación de la tangente es:

$$y + \sqrt{2\pi} = (-1)(x - \sqrt{2\pi}) \quad \Longrightarrow \quad y = -x$$

y vemos que en ambos puntos la tangente es la misma.

♠♠♠♠

2. Derivadas

Ejercicio 1. Una curva viene dada por la ecuación $3x - 2y^2e^{x-1} = 2$.

(a) Hallar una expresión para $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en función de x e y.

(b) Hallar las ecuaciones de las tangentes a esta curva en aquellos puntos donde la curva corta a la recta $x = 1$.

Solución:

(a) Derivamos:

$$3 - 4yy'e^{x-1} - 2y^2e^{x-1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3 - 2y^2e^{x-1}}{4ye^{x-1}}$$

(b) Las ordenadas de los puntos de abscisa 1 son:

$$3 - 2y^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La pendiente de la tangente cuando $x = 1$ es:

$$m = \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{4\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Las ecuaciones de las tangentes son:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(x-1) \ ; \qquad y + \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,(x-1)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Obtener los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x\,(\ln x)^2$$

siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x.

Solución:

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2x\ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln x(\ln x + 2)$$

El signo de la derivada está dado en el siguiente esquema:

$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$
	0		e^{-2}		1	

Hay un máximo relativo en $\left(e^{-2}, \frac{e^{-2}}{4}\right)$ y un mínimo en $(1, 0)$.

derivamos de nuevo:

$$f''(x) = \frac{1}{x}\,(\ln x + 2) + \frac{1}{x}\,\ln x = \frac{1}{x}\,(2\ln x + 2)$$

La segunda derivada se anula en $x = e^{-1}$. El signo de la segunda derivada es:

$\nexists$	$\nexists$	$-$	0	$+$
	0		e^{-1}	

Hay un punto de inflexión en $\left(e^{-1}, e^{-1}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Dada la función

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide dibujar la gráfica de f estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

Solución:

Vamos a estudiar el signo de la derivada:

$$f'(x) = -e^{-x}\left(x^2 + 1\right) + 2xe^{-x} = e^{-x}\left(-x^2 + 2x - 1\right) = -e^{-x}(x - 1)^2$$

La derivada tiene una sola raíz $x = 1$ (doble). El signo de la derivada está dado por:

$-$	0	$-$
	1	

La función es decreciente para todo $x \in \mathbb{R}$. En $x = 1$ también es decreciente pese a que la derivada es igual a cero.

Derivamos de nuevo:

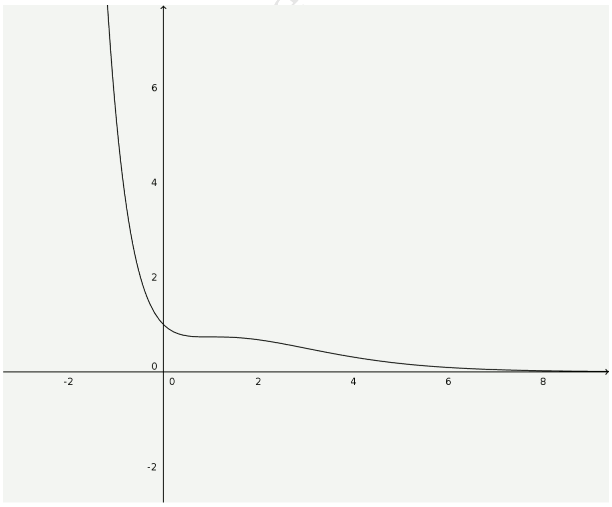
$$f''(x) = e^{-x}\,(x - 1)^2 - e^{-x}2\,(x - 1) = e^{-x}(x - 1)(x - 3)$$

El signo dela derivada segunda es:

$+$	0	$-$	0	$+$
	1		3	

Hay dos puntos de inflexión en $x = 1$ y $x = 3$.

La función tiene una asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$.



♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular los límites:

$(a)\ \lim_{x\to 0}(1+\ \operatorname{artg} x)^{1/x}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to\infty}\dfrac{3x+2e^x}{7x+5e^x}$

Solución:

(a) Es una indeterminación del tipo 1^∞:

$$\lim_{x\to 0}(1+\ \operatorname{artg} x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\operatorname{artg} x}{x}} = e^1 = e$$

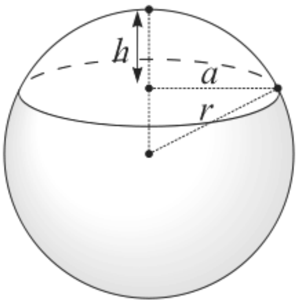
(b) Es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Puesto que el infinito exponencial es de orden superior:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2e^x}{7x+5e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2e^x}{5e^x} = \frac{2}{5}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. El volumen de un casquete esférico está dado por:

$$V = \frac{\pi h^2}{3}\,(3r-h)$$



Un depósito de forma esférica tiene un radio de 50 cm y se llena de agua con un caudal de 2 litro s^{-1}. Calcular la velocidad a que aumenta la altura de agua cuando $h = 25$ cm.

Solución:

Antes de derivar escribimos el volumen como:

$$V = \pi r h^2 - \frac{\pi}{3}h^3$$

Derivando respecto al tiempo (tenemos en cuenta que r es constante):

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \left(\pi r\cdot 2h - \frac{\pi}{3}\cdot 3h^2\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \pi h(2r-h)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\pi h(2r-h)}\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

Entonces:

$$\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)_{h=25} = \frac{2000}{\pi 25(100-25)} \simeq 0{,}340\ \mathrm{cm\ s}^{-1}$$

♠♠♠♠

3. Integrales

Ejercicio 1. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt{2x+1}}$

Solución:

(a) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+1}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln|3x+1| + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt{2x+1}} = 4\int \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = 4\sqrt{2x+1} + C$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x = x - 2\operatorname{artg} x + C$

(b) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Por partes:

$$u = \ln x \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^2\ln x - \frac{1}{4}\,x^2 + C$$

(b) Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1} \quad \Longrightarrow \quad A = 2\,; \quad B = -1$$

Entonces:

$$\int \frac{x-3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)\,\mathrm{d}x = 2\ln|x+1| - \ln|x-1| * C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, \mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1} \, \mathrm{d}x$

Solución:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, \mathrm{d}x = \int \operatorname{sen}^3 x \, \mathrm{d}(\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C$

(b) Llamando $x+1 = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t \, \mathrm{d}t$;

$$\int x\sqrt{x+1} \, \mathrm{d}x = \int (t^2-1)t \cdot 2t \, \mathrm{d}t = \int (2t^4 - 2t^2) \, \mathrm{d}t = \frac{2t^5}{5} - \frac{2t}{3} + C = \frac{2\sqrt{(x+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \left(1 + e^{-x}\right) \, \mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x)^2} \, \mathrm{d}x$

Solución:

(a) $\displaystyle\int \left(1 + e^{-x}\right) \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x + \int e^{-x} \, \mathrm{d}x = x - e^{-x} + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{1-x} + C$

♠♠♠♠

Ejercicio 6.

(a) Utilizando la sustitución $x = \operatorname{tg}\theta$, muestre que:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta$$

(b) A partir de lo anterior, halle el valor de:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} \, \mathrm{d}x$$

Solución:

(a) Efectuando el cambio $x = \operatorname{tg}\theta$, $\mathrm{d}x = \sec^2\theta \, \mathrm{d}\theta$, si $x = 0$, $\theta = 0$, si $x = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2} \sec^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta} \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^2\theta} \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta$$

(b) Calculamos la integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Considérese la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$. La gráfica de $y = f(x)$ corta al eje x en el punto A.

(a) Calcular la ecuación de la tangente a la curva en el punto A.

(b) Calcular el área encerrada por la curva $y = f(x)$, la tangente en A, y la recta $x = e$.

Solución:

(a) El punto de corte con el eje x es el punto $(1, 0)$. Calculamos la derivada:

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

La pendiente en el punto de abscisa 1 es $m = 1$. La ecuación de la tangente es $y = x - 1$.

(b) El área es:

$$S = \int_1^e \left(x - 1 - \frac{\ln x}{x} \right) \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{e^2}{2} - e$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8.

(a) Calcular $\displaystyle\int x \sec^2 x \, \mathrm{d}x$

(b) Determinar el valor de m si

$$\int_0^m x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = 0{,}5 \qquad \text{donde } m > 0$$

Solución:

(a) Por partes:

$$\begin{array}{ll} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sec^2 x \, \mathrm{d}x & v = \operatorname{tg} x \end{array}$$

$$\int x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$$

(b) Debemos resolver la ecuación:

$$\Big[x \operatorname{tg} x + \ln \cos x \Big]_0^m = \frac{1}{2} \, ; \qquad m \operatorname{tg} m + \ln \cos m = \frac{1}{2}$$

Con la calculadora obtenemos $m \simeq 0{,}822$.

♠♠♠♠

4. Examen global de cálculo

Ejercicio 1. (Sin calculadora) Sea $y = e^x \operatorname{sen} x$.

(*a*) Halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

(*b*) Muestre que $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2e^x \cos x$

Considere la función f, definida mediante $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$.

(*c*) Muestre que la función f alcanza un valor máximo local en $x = \frac{3\pi}{4}$.

(*d*) Halle la coordenada x del punto de inflexión del gráfico de f.

(*e*) Dibuje aproximadamente el gráfico de f, indicando claramente la posición del punto máximo local, del punto de inflexión y de los puntos de corte con los ejes.

(*f*) Halle el área de la región delimitada por el gráfico de f y el eje x.

La curvatura de un gráfico en un punto cualquiera (x, y) se define como

$$\kappa = \frac{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}{\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

(*g*) Halle el valor de la curvatura del gráfico de f en el punto máximo local.

(*h*) Halle el valor de κ para $x = \frac{\pi}{2}$ y comente acerca de su significado en lo que respecta a la forma del gráfico.

Solución:

(*a*) Derivando el producto:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$$

(*b*) Derivando de nuevo:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + e^x (\cos x - \operatorname{sen} x) = 2e^x \cos x$$

(*c*) Basta ver que en $\frac{3\pi}{4}$ se anula la primera derivada puesto que

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} = 0$$

y la derivada segunda en ese punto es negativa. Por consiguiente, en $x = \frac{3\pi}{4}$ hay un máximo local.

(*d*) La segunda derivada se anula en $x = \frac{\pi}{2}$. El signo de la segunda derivada lo representamos en el siguiente esquema:

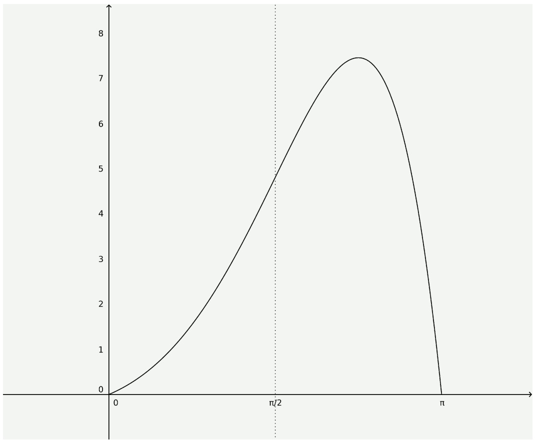
$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ + & \big| & - \\ & \frac{\pi}{2} & \end{array}$$

En $x = \frac{\pi}{2}$ la curva pasa de cóncava a convexa y es, por tanto, un punto de inflexión.

(*e*) La curva corta al eje OX en $x = 0$ $x = \pi$, tiene un máximo en $x = \frac{3\pi}{4}$ y un punto de inflexión en $x = \frac{\pi}{2}$:

(*f*) Calcularemos el área mediante una integral. Calculemos primero por partes la integral indefinida:

$$\begin{array}{ll} u = e^x & \mathrm{d}u = e^x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x & v = -\cos x \end{array}$$



de forma que:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$$

Integrando de nuevo por partes:

$$u = e^x \qquad \mathrm{d}u = e^x \, \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \cos x \, \mathrm{d}x \quad v = \operatorname{sen} x$$

resulta:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$$

Pasando la integral al primer miembro y despejando obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

entonces, el área es:

$$\int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)\right]_0^\pi = \frac{1}{2} e^\pi (\operatorname{sen} \pi - \cos \pi) - \frac{1}{2} e^0 (\operatorname{sen} 0 - \cos 0) = \frac{1}{2} (e^\pi + 1)$$

(*g*) En $x = \frac{3\pi}{4}$ la derivada primera es cero y la derivada segunda:

$$2e^{\frac{3\pi}{4}} \cos \frac{3\pi}{4} = 2e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$$

La curvatura en $x = \frac{3\pi}{4}$ es $\sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$.

(*h*) La curvatura en el punto de inflexión es 0. Eso significa que alrededor de ese punto la función se representa aproximadamente por una recta.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (Con calculadora) Sea f la función definida mediante $f(x) = \frac{2-e^x}{2e^x-1}$ $\quad x \in D$

(*a*) Determine D, el mayor dominio posible de f.

(*b*) Muestre que el gráfico de f tiene tres asíntotas e indique sus ecuaciones.

(*c*) Muestre que $f'(x) = -\frac{3e^x}{(2e^x-1)^2}$.

(*d*) Utilice las respuestas dadas en los apartados (*b*) y (*c*) para justificar que f tiene una inversa e indique su dominio.

(*e*) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$.

(*f*) Considere la región R delimitada por el gráfico de $y = f(x)$ y los ejes. Halle el volumen del sólido de revolución que se obtiene cuando R se rota 2π alrededor del eje y.

Solución:

(a) El valor de x que anula el denominador no pertenece al dominio:

$$2e^x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^x = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$.

(b) La recta $x = -\ln 2$ es asíntota vertical de la curva pues

$$\lim_{x\to -\ln 2} \frac{2-e^x}{2e^x-1} = \infty$$

Cuando x tiende a $+\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-e^x}{2e^x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^x}{2e^x} = -\frac{1}{2}$$

La recta $y = -\frac{1}{2}$ es asíntota horizontal en $+\infty$.
Cuando x tiende a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-e^x}{2e^x-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

La recta $y = -2$ es asíntota horizontal de la curva en $-\infty$.

(c) Derivando el cociente:

$$f'(x) = \frac{-e^x(2e^x-1) - 2e^x(2-e^x)}{(2e^x-1)^2} = -\frac{3e^x}{(2e^x-1)^2}$$

(d) Puesto que la derivada es siempre negativa, la función es decreciente y, considerando las asíntotas, inyectiva. En consecuencia puede definirse la función inversa. El dominio de f^{-1} será el recorrido de la función f es decir $\mathbb{R} \setminus \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$.

(e) Intercambiamos las variables:

$$x = \frac{2-e^y}{2e^y-1}$$

y despejamos y:

$$x(2e^y-1) = 2 - e^y \; ; \qquad e^y(2x+1) = 2 + x \; ; \qquad e^y = \frac{x+2}{2x+1}$$

La función inversa es:

$$f^{-1}(x) = \ln\frac{x+2}{2x+1}$$

(f) El punto de corte de la curva con el eje OY es $(0, \ln 2)$. El volumen se calcula mediante la integral:

$$V = \pi\int_0^{\ln 2} x^2 \, \mathrm{d}y = \pi\int_0^{\ln 2} \left(\ln\frac{y+2}{2y+1}\right)^2 \mathrm{d}y$$

Con la calculadora obtenemos $V \simeq 0{,}327$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (Con calculadora) La función densidad de probabilidad de una variable aleatoria X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax\cos x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ donde } a \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

(a) Muestre que $a = \dfrac{2}{\pi - 2}$.

(b) Halle $\mathrm{p}\left(X < \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(c) Halle:

(i) la moda de X;

(ii) la mediana de X.

(d) Halle $\mathrm{p}\left(X < \dfrac{\pi}{8} \mid X < \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solución:

(a) Puesto que la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1:

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \, \mathrm{d}x = 1$$

Integrando por partes:

$$a\Big[x \operatorname{sen} x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$$

y de aquí:

$$a = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 1} = \frac{2}{\pi - 2}$$

La función de distribución es entonces:

$$\mathrm{p}\,(X < x) = \frac{2}{\pi - 2}\Big[x \operatorname{sen} x + \cos x\Big]_0^{x} = \frac{2}{\pi - 2}\,(x \operatorname{sen} x + \cos x - 1)$$

(b) Con esa función de distribución:

$$\mathrm{p}\,\left(X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi - 2}\left(\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \simeq 0{,}460$$

(c) (I) La moda es el máximo de la función de densidad. Con la calculadora obtenemos:

$$\text{moda} \simeq 0{,}860$$

(II) La mediana cumple que

$$\mathrm{p}\,(X < \text{med}) = 0{,}5$$

es decir, es la solución de la ecuación

$$\frac{2}{\pi - 2}\,(x \operatorname{sen} x + \cos x - 1) = 0{,}5$$

Con la calculadora obtenemos

$$\text{med} \simeq 0{,}826$$

(III) En este caso

$$\mathrm{p}\left(X < \frac{\pi}{8}\,\middle|\, X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathrm{p}\,\left(X < \frac{\pi}{8}\right)}{\mathrm{p}\,\left(X < \frac{\pi}{4}\right)} \simeq 0{,}283$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (Con calculadora) Una partícula se puede mover a lo largo de una línea recta partiendo de un punto O. La velocidad v, en $\mathrm{m\,s^{-1}}$, viene dada por la función $v(t) = 1 - e^{-\operatorname{sen} t^2}$ donde el tiempo $t \geq 0$ se mide en segundos.

(a) Escriba los dos primeros instantes $t_1, t_2 > 0$ en los que la partícula cambia de sentido.

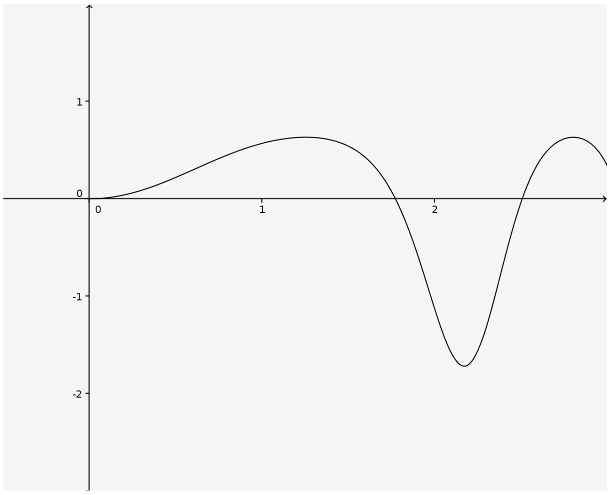
(b) (I) Halle el instante $t < t_2$ en el que la partícula tiene una velocidad máxima.

(II) Halle el instante $t < t_2$ en el que la partícula tiene una velocidad mínima.

(c) Halle la distancia que ha recorrido la partícula entre los instantes $t = t_1$ y $t = t_2$.

Solución:

(a) La gráfica de la velocidad es



La partícula cambia de sentido cuando la velocidad se hace cero. Estos valores son $t_1 \simeq 1{,}77$ y $t_2 = 2{,}51$ s.

(b) (i) La velocidad máxima se da para $t \simeq 1{,}25$ s.

(ii) La velocidad mínima se da para $t \simeq 2{,}17$ s.

(c) Como no hay cambio de sentido, la distancia recorrida es igual al cambio en la posición:

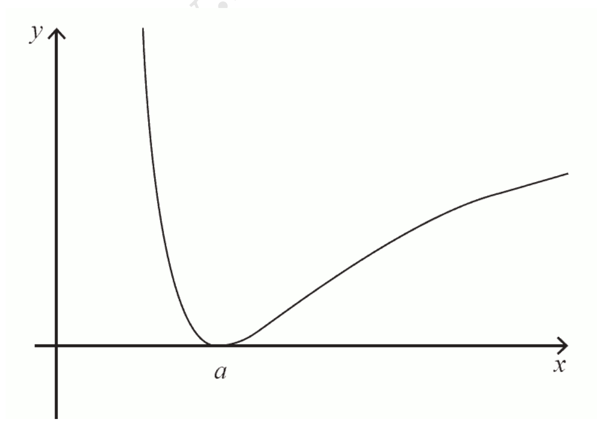
$$\int_{t_1}^{t_2} \left(1 - e^{-\operatorname{sen} t^2}\right) \, \mathrm{d}t \simeq -0{,}711$$

La distancia recorrida es aproximadamente 0,711 m.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (Sin calculadora) El diagrama muestra la gráfica de la función:

$$y = \frac{(\ln x)^2}{x} \; ; \qquad x > 0$$



(a) Sabiendo que la curva pasa por el punto $(a, 0)$, calcular el valor de a.

Sea R la región encerrada por la curva, el eje x y la recta $x = e$.

(b) Mediante la sustitución $u = \ln x$ calcule el área de la región R.

Solución:

(a) $a = 1$

(*b*) Calculamos la integral con la sustitución:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\ \mathrm{d}x = \int (\ln x)^2\ \mathrm{d}(\ln x) = \int u^2\ \mathrm{d}u = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$$

El área es igual a:

$$S = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^e = \frac{1}{3}$$

♠♠♠♠