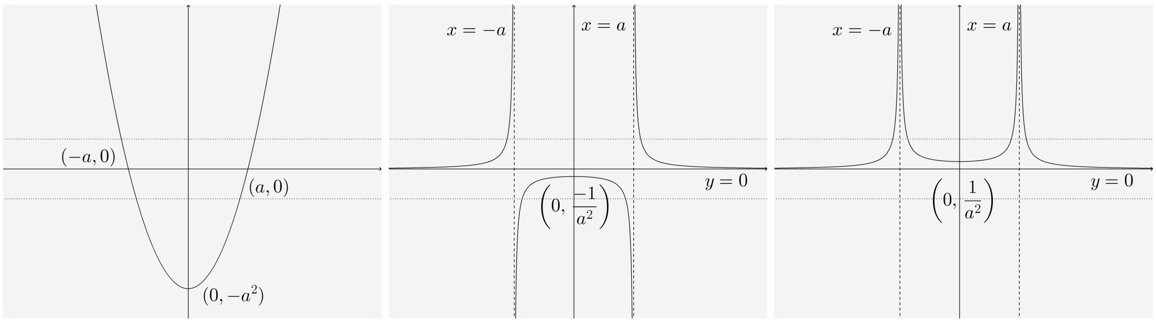
1. Funciones

Ejercicio 1. Considere la función f definida por $f(x) = x^2 - a^2$, $x \in \mathbb{R}$. Dibuje aproximadamente las siguientes curvas en sistemas de ejes separados, mostrando todos los cortes con los ejes x e y, los máximos, los mínimos y las asíntotas que haya:

(a) $y = f(x)$ $\qquad (b)$ $y = \frac{1}{f(x)}$ $\qquad (c)$ $y = \left|\frac{1}{f(x)}\right|$

Solución:

Las gráficas son las siguientes:



♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right)$ $\qquad (b)$ $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x+2}{2x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

Solución:

(a) Hacemos la diferencia racionalizando la segunda fracción:

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) = \lim_{x\to 2} \frac{1-\sqrt{x-2}}{x-2} = \infty$$

(b) Es una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicando la aproximación del logaritmo:

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{x+2}{2x} \right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2} e^{\left(\frac{x+2}{2x}-1\right)\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{2-x}{2x(x-2)}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{-1}{2x}} = e^{-\frac{1}{4}}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}$$

Solución:

La función es continua salvo en $x = -3$ y en $x = 3$. Calculemos los límites en esos puntos para ver el tipo de discontinuidad:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} \right) &= \lim_{x\to -3} \frac{2(x+3)-12}{x^2-9} \\ &= \lim_{x\to -3} \frac{2x-6}{x^2-9} \\ &= \infty \end{aligned}$$

En $x=-3$ hay un salto infinito. Gráficamente esto significa que $x=-3$ es una asíntota vertical.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3}-\frac{12}{x^2-9}\right) &= \lim_{x\to 3}\frac{2(x+3)-12}{x^2-9}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{x^2-9}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{2}{x+3}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

En $x=3$ la función tiene una discontinuidad evitable.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Demostrar que la función $f(x)=xe^{-x}+3$ toma el valor $\frac{3}{2}$ en el intervalo $(-1,0)$.

Solución:

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y, por consiguiente, en $[-1,0]$. Además:

$$\begin{aligned}f(-1)&=-e+3\\ f(0)&=3\end{aligned}$$

Por el teorema de Bolzano, la función toma en $(-1,0)$ toma todos los valores comprendidos entre $-e+3$ y 3. Por tanto toma en algún punto el valor $\frac{3}{2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & x<1\\ cx & x\geq 1\end{cases}$$

Calcular a, b y c para que la función sea derivable en $x=1$, sabiendo que $f(0)=f(4)$.

Solución:

Puesto que la función es continua en $x=1$ tenemos que:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x) \quad\Longrightarrow\quad 1+a+b=c$$

La derivada de la función en los puntos distintos de 1 es:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+a & x<1\\ c & x>1\end{cases}$$

Puesto que la función es derivable en $x=1$ se verifica que:

$$f'(1^-)=f(1^+) \quad\Longrightarrow\quad 2+a=c$$

Como además:

$$f(0)=f(4) \quad\Longrightarrow\quad b=4c$$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones resulta $a=-\frac{7}{4}$, $b=1$, $c=\frac{1}{4}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular las asíntotas de la función

$$y=\frac{2x^3-3x+2}{x^2-x}$$

Solución:

La función tiene dos asíntotas verticales $x = 0$ y $x = 1$. No tiene asíntotas horizontales puesto que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x + 2}{x^2 - x} = \infty$$

Calculemos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x + 2}{x^2 - x} \cdot \frac{1}{x} = 2$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3 - 3x + 2}{x^2 - x} - 2x \right) = 2$$

La asíntota oblicua es $y = 2x + 2$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Derivar las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $\qquad$ (b) $f(x) = (x^2 - 3x)e^{3x^2 - x}$

Solución:

(a) La función puede escribirse:

$$f(x) = 2\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$$

Su derivada es:

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2 + 1}$$

(b) Derivamos como producto:

$$f'(x) = (2x - 3)\, e^{3x^2 - x} + e^{3x^2 - x}(6x - 1)\,(x^2 - 3x)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Comprobar que los puntos $(0, 0)$ y $(\sqrt{2\pi}, -\sqrt{2\pi})$ de la curva $e^{x+y} = \cos(xy)$ tienen una tangente común.

Solución:

Calculemos la derivada:

$$e^{x+y}(1 + y') = -\operatorname{sen}(xy)(y + xy')$$

En el punto $(0, 0)$ calculamos la derivada sustituyendo x e y por 0:

$$1 + y' = 0 \implies y' = -1$$

y, en consecuencia la tangente en ese punto es $y = -x$.

Calculamos ahora la derivada en $\left(\sqrt{2\pi}, -\sqrt{2\pi}\right)$:

$$1 + y' = -\operatorname{sen}(-2\pi)(\ldots) = 0 \implies y' = -1$$

La ecuación de la tangente es:

$$y + \sqrt{2\pi} = (-1)(x - \sqrt{2\pi}) \implies y = -x$$

y vemos que en ambos puntos la tangente es la misma.

♠♠♠♠

2. Derivadas

Ejercicio 1. Una curva viene dada por la ecuación $3x - 2y^2 e^{x-1} = 2$.

(a) Hallar una expresión para $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en función de x e y.

(b) Hallar las ecuaciones de las tangentes a esta curva en aquellos puntos donde la curva corta a la recta $x = 1$.

Solución:

(a) Derivamos:

$$3 - 4yy'e^{x-1} - 2y^2e^{x-1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3 - 2y^2e^{x-1}}{4ye^{x-1}}$$

(b) Las ordenadas de los puntos de abscisa 1 son:

$$3 - 2y^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La pendiente de la tangente cuando $x = 1$ es:

$$m = \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{4\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Las ecuaciones de las tangentes son:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(x-1) \ ; \qquad y + \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,(x-1)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Obtener los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x\,(\ln x)^2$$

siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x.

Solución:

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2x\ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln x(\ln x + 2)$$

El signo de la derivada está dado en el siguiente esquema:

		0		e^{-2}		1	
f'	$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hay un máximo relativo en $\left(e^{-2}, \frac{e^{-2}}{4}\right)$ y un mínimo en $(1, 0)$.

derivamos de nuevo:

$$f''(x) = \frac{1}{x}\,(\ln x + 2) + \frac{1}{x}\,\ln x = \frac{1}{x}\,(2\ln x + 2)$$

La segunda derivada se anula en $x = e^{-1}$. El signo de la segunda derivada es:

		0		e^{-1}	
f''	$\nexists$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Hay un punto de inflexión en $\left(e^{-1}, e^{-1}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Dada la función

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide dibujar la gráfica de f estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

Solución:

Vamos a estudiar el signo de la derivada:

$$f'(x) = -e^{-x}\left(x^2 + 1\right) + 2xe^{-x} = e^{-x}\left(-x^2 + 2x - 1\right) = -e^{-x}(x - 1)^2$$

La derivada tiene una sola raíz $x = 1$ (doble). El signo de la derivada está dado por:

	1	
$-$	0	$-$

La función es decreciente para todo $x \in \mathbb{R}$. En $x = 1$ también es decreciente pese a que la derivada es igual a cero.

Derivamos de nuevo:

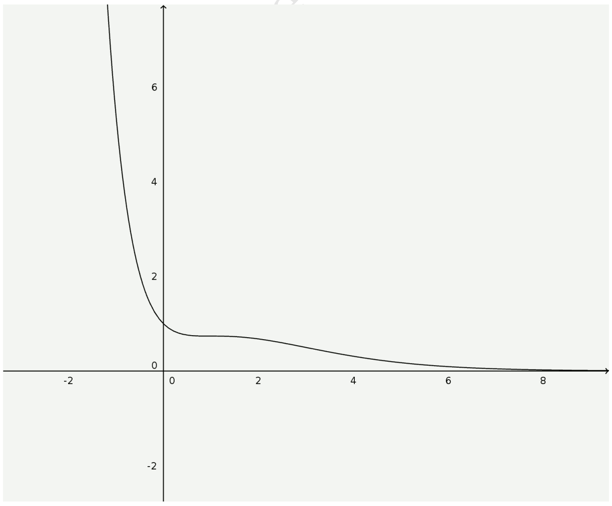
$$f''(x) = e^{-x}\,(x - 1)^2 - e^{-x}2\,(x - 1) = e^{-x}(x - 1)(x - 3)$$

El signo dela derivada segunda es:

	1		3	
$+$	0	$-$	0	$+$

Hay dos puntos de inflexión en $x = 1$ y $x = 3$.

La función tiene una asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$.



♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular los límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{artg} x)^{1/x}$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2e^x}{7x+5e^x}$

Solución:

(a) Es una indeterminación del tipo 1^∞:

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{artg} x)^{1/x}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\operatorname{artg} x}{x}}=e^1=e$$

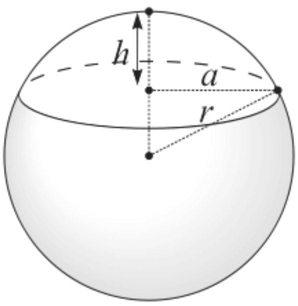
(b) Es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Puesto que el infinito exponencial es de orden superior:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2e^x}{7x+5e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^x}{5e^x}=\frac{2}{5}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. El volumen de un casquete esférico está dado por:

$$V=\frac{\pi h^2}{3}\,(3r-h)$$



Un depósito de forma esférica tiene un radio de 50 cm y se llena de agua con un caudal de 2 litro s^{-1}. Calcular la velocidad a que aumenta la altura de agua cuando $h=25$ cm.

Solución:

Antes de derivar escribimos el volumen como:

$$V=\pi r h^2-\frac{\pi}{3}h^3$$

Derivando respecto al tiempo (tenemos en cuenta que r es constante):

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\left(\pi r\cdot 2h-\frac{\pi}{3}\cdot 3h^2\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\pi h(2r-h)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\quad\Longrightarrow\quad\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\pi h(2r-h)}\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

Entonces:

$$\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)_{h=25}=\frac{2000}{\pi 25(100-25)}\simeq 0{,}340\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$$

♠♠♠♠

3. Integrales

Ejercicio 1. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt{2x+1}}$

Solución:

(a) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+1}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln|3x+1| + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt{2x+1}} = 4\int \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = 4\sqrt{2x+1} + C$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x = x - 2\operatorname{artg} x + C$

(b) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Por partes:

$$u = \ln x \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

(b) Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1} \quad\Longrightarrow\quad A = 2\,; \quad B = -1$$

Entonces:

$$\int \frac{x-3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)\,\mathrm{d}x = 2\ln|x+1| - \ln|x-1| * C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, \mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1} \, \mathrm{d}x$

Solución:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, \mathrm{d}x = \int \operatorname{sen}^3 x \, \mathrm{d}(\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C$

(b) Llamando $x+1 = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t \, \mathrm{d}t$;

$$\int x\sqrt{x+1} \, \mathrm{d}x = \int (t^2-1)t \cdot 2t \, \mathrm{d}t = \int (2t^4 - 2t^2) \, \mathrm{d}t = \frac{2t^5}{5} - \frac{2t}{3} + C = \frac{2\sqrt{(x+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \left(1 + e^{-x}\right) \, \mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x)^2} \, \mathrm{d}x$

Solución:

(a) $\displaystyle\int \left(1 + e^{-x}\right) \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x + \int e^{-x} \, \mathrm{d}x = x - e^{-x} + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{1-x} + C$

♠♠♠♠

Ejercicio 6.

(a) Utilizando la sustitución $x = \operatorname{tg}\theta$, muestre que:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta$$

(b) A partir de lo anterior, halle el valor de:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} \, \mathrm{d}x$$

Solución:

(a) Efectuando el cambio $x = \operatorname{tg}\theta$, $\mathrm{d}x = \sec^2\theta \, \mathrm{d}\theta$, si $x = 0$, $\theta = 0$, si $x = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2} \sec^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta} \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^2\theta} \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta$$

(b) Calculamos la integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Considérese la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$. La gráfica de $y = f(x)$ corta al eje x en el punto A.

(a) Calcular la ecuación de la tangente a la curva en el punto A.

(b) Calcular el área encerrada por la curva $y = f(x)$, la tangente en A, y la recta $x = e$.

Solución:

(a) El punto de corte con el eje x es el punto $(1, 0)$. Calculamos la derivada:

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

La pendiente en el punto de abscisa 1 es $m = 1$. La ecuación de la tangente es $y = x - 1$.

(b) El área es:

$$S = \int_1^e \left(x - 1 - \frac{\ln x}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{e^2}{2} - e$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8.

(a) Calcular $\displaystyle\int x\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

(b) Determinar el valor de m si

$$\int_0^m x\sec^2 x\,\mathrm{d}x = 0{,}5 \qquad \text{donde } m > 0$$

Solución:

(a) Por partes:

$$\begin{array}{ll} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sec^2 x\,\mathrm{d}x & v = \operatorname{tg} x \end{array}$$

$$\int x\sec^2 x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$$

(b) Debemos resolver la ecuación:

$$\Big[x\operatorname{tg} x + \ln\cos x\Big]_0^m = \frac{1}{2}\,; \qquad m\operatorname{tg} m + \ln\cos m = \frac{1}{2}$$

Con la calculadora obtenemos $m \simeq 0{,}822$.

♠♠♠♠

4. Examen global de cálculo

Ejercicio 1. (Sin calculadora) Sea $y = e^x \operatorname{sen} x$.

(a) Halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

(b) Muestre que $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2e^x \cos x$

Considere la función f, definida mediante $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$.

(c) Muestre que la función f alcanza un valor máximo local en $x = \frac{3\pi}{4}$.

(d) Halle la coordenada x del punto de inflexión del gráfico de f.

(e) Dibuje aproximadamente el gráfico de f, indicando claramente la posición del punto máximo local, del punto de inflexión y de los puntos de corte con los ejes.

(f) Halle el área de la región delimitada por el gráfico de f y el eje x.

La curvatura de un gráfico en un punto cualquiera (x, y) se define como

$$\kappa = \frac{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}{\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

(g) Halle el valor de la curvatura del gráfico de f en el punto máximo local.

(h) Halle el valor de κ para $x = \frac{\pi}{2}$ y comente acerca de su significado en lo que respecta a la forma del gráfico.

Solución:

(a) Derivando el producto:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$$

(b) Derivando de nuevo:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + e^x (\cos x - \operatorname{sen} x) = 2e^x \cos x$$

(c) Basta ver que en $\frac{3\pi}{4}$ se anula la primera derivada puesto que

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} = 0$$

y la derivada segunda en ese punto es negativa. Por consiguiente, en $x = \frac{3\pi}{4}$ hay un máximo local.

(d) La segunda derivada se anula en $x = \frac{\pi}{2}$. El signo de la segunda derivada lo representamos en el siguiente esquema:

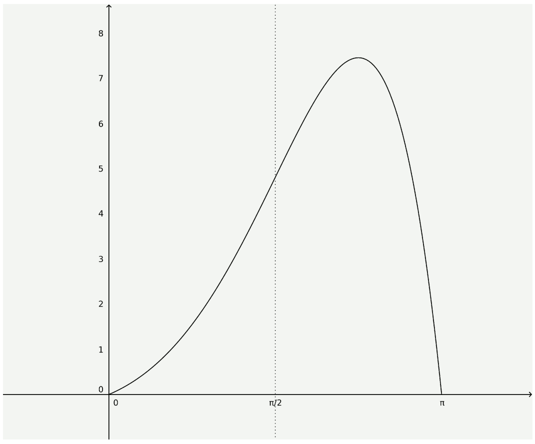
$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ + & | & - \\ & \frac{\pi}{2} & \end{array}$$

En $x = \frac{\pi}{2}$ la curva pasa de cóncava a convexa y es, por tanto, un punto de inflexión.

(e) La curva corta al eje OX en $x = 0$ $x = \pi$, tiene un máximo en $x = \frac{3\pi}{4}$ y un punto de inflexión en $x = \frac{\pi}{2}$:

(f) Calcularemos el área mediante una integral. Calculemos primero por partes la integral indefinida:

$$\begin{array}{ll} u = e^x & \mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x & v = -\cos x \end{array}$$



de forma que:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$$

Integrando de nuevo por partes:

$$u = e^x \qquad \mathrm{d}u = e^x \, \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \cos x \, \mathrm{d}x \quad v = \operatorname{sen} x$$

resulta:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$$

Pasando la integral al primer miembro y despejando obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

entonces, el área es:

$$\int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)\right]_0^\pi = \frac{1}{2} e^\pi (\operatorname{sen} \pi - \cos \pi) - \frac{1}{2} e^0 (\operatorname{sen} 0 - \cos 0) = \frac{1}{2} (e^\pi + 1)$$

(g) En $x = \frac{3\pi}{4}$ la derivada primera es cero y la derivada segunda:

$$2e^{\frac{3\pi}{4}} \cos \frac{3\pi}{4} = 2e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$$

La curvatura en $x = \frac{3\pi}{4}$ es $\sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$.

(h) La curvatura en el punto de inflexión es 0. Eso significa que alrededor de ese punto la función se representa aproximadamente por una recta.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (Con calculadora) Sea f la función definida mediante $f(x) = \frac{2-e^x}{2e^x-1} \quad x \in D$

(a) Determine D, el mayor dominio posible de f.

(b) Muestre que el gráfico de f tiene tres asíntotas e indique sus ecuaciones.

(c) Muestre que $f'(x) = -\frac{3e^x}{(2e^x-1)^2}$.

(d) Utilice las respuestas dadas en los apartados (b) y (c) para justificar que f tiene una inversa e indique su dominio.

(e) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$.

(f) Considere la región R delimitada por el gráfico de $y = f(x)$ y los ejes. Halle el volumen del sólido de revolución que se obtiene cuando R se rota 2π alrededor del eje y.

Solución:

(a) El valor de x que anula el denominador no pertenece al dominio:

$$2e^x - 1 = 0 \implies e^x = \frac{1}{2} \implies x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$.

(b) La recta $x = -\ln 2$ es asíntota vertical de la curva pues

$$\lim_{x\to -\ln 2} \frac{2-e^x}{2e^x-1} = \infty$$

Cuando x tiende a $+\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-e^x}{2e^x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^x}{2e^x} = -\frac{1}{2}$$

La recta $y = -\frac{1}{2}$ es asíntota horizontal en $+\infty$.
Cuando x tiende a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-e^x}{2e^x-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

La recta $y = -2$ es asíntota horizontal de la curva en $-\infty$.

(c) Derivando el cociente:

$$f'(x) = \frac{-e^x(2e^x-1) - 2e^x(2-e^x)}{(2e^x-1)^2} = -\frac{3e^x}{(2e^x-1)^2}$$

(d) Puesto que la derivada es siempre negativa, la función es decreciente y, considerando las asíntotas, inyectiva. En consecuencia puede definirse la función inversa. El dominio de f^{-1} será el recorrido de la función f es decir $\mathbb{R} \setminus \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$.

(e) Intercambiamos las variables:

$$x = \frac{2-e^y}{2e^y-1}$$

y despejamos y:

$$x(2e^y-1) = 2 - e^y \ ; \qquad e^y(2x+1) = 2 + x \ ; \qquad e^y = \frac{x+2}{2x+1}$$

La función inversa es:

$$f^{-1}(x) = \ln\frac{x+2}{2x+1}$$

(f) El punto de corte de la curva con el eje OY es $(0, \ln 2)$. El volumen se calcula mediante la integral:

$$V = \pi\int_0^{\ln 2} x^2 \,\mathrm{d}y = \pi\int_0^{\ln 2}\left(\ln\frac{y+2}{2y+1}\right)^2 \mathrm{d}y$$

Con la calculadora obtenemos $V \simeq 0{,}327$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (Con calculadora) La función densidad de probabilidad de una variable aleatoria X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax\cos x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \text{ donde } a \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

(a) Muestre que $a = \dfrac{2}{\pi - 2}$.

(b) Halle $\mathrm{p}\left(X < \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(c) Halle:

 (i) la moda de X;

 (ii) la mediana de X.

(d) Halle $\mathrm{p}\left(X < \dfrac{\pi}{8} \mid X < \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solución:

(a) Puesto que la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1:

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = 1$$

Integrando por partes:

$$a\Big[x\operatorname{sen} x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=1$$

y de aquí:

$$a=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-1}=\frac{2}{\pi-2}$$

La función de distribución es entonces:

$$\mathrm{p}\,(X<x)=\frac{2}{\pi-2}\Big[x\operatorname{sen} x+\cos x\Big]_0^x=\frac{2}{\pi-2}\,(x\operatorname{sen} x+\cos x-1)$$

(b) Con esa función de distribución:

$$\mathrm{p}\,\left(X<\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{\pi-2}\left(\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\simeq 0{,}460$$

(c) (I) La moda es el máximo de la función de densidad. Con la calculadora obtenemos:

$$\text{moda}\simeq 0{,}860$$

(II) La mediana cumple que

$$\mathrm{p}\,(X<\text{med})=0{,}5$$

es decir, es la solución de la ecuación

$$\frac{2}{\pi-2}\,(x\operatorname{sen} x+\cos x-1)=0{,}5$$

Con la calculadora obtenemos

$$\text{med}\simeq 0{,}826$$

(III) En este caso

$$\mathrm{p}\,\left(X<\frac{\pi}{8}\,\middle|\,X<\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\mathrm{p}\,\left(X<\frac{\pi}{8}\right)}{\mathrm{p}\,\left(X<\frac{\pi}{4}\right)}\simeq 0{,}283$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (Con calculadora) Una partícula se puede mover a lo largo de una línea recta partiendo de un punto O. La velocidad v, en $\mathrm{m\,s^{-1}}$, viene dada por la función $v(t)=1-e^{-\operatorname{sen} t^2}$ donde el tiempo $t\geq 0$ se mide en segundos.

(a) Escriba los dos primeros instantes $t_1, t_2>0$ en los que la partícula cambia de sentido.

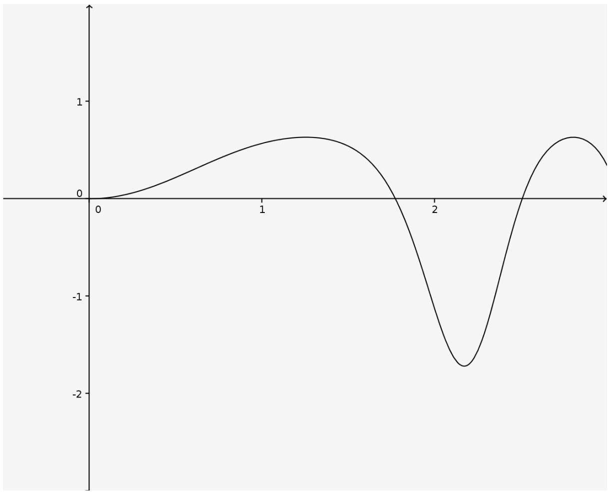
(b) (I) Halle el instante $t<t_2$ en el que la partícula tiene una velocidad máxima.

(II) Halle el instante $t<t_2$ en el que la partícula tiene una velocidad mínima.

(c) Halle la distancia que ha recorrido la partícula entre los instantes $t=t_1$ y $t=t_2$.

Solución:

(a) La gráfica de la velocidad es



La partícula cambia de sentido cuando la velocidad se hace cero. Estos valores son $t_1 \simeq 1{,}77$ y $t_2 = 2{,}51$ s.

(b) (I) La velocidad máxima se da para $t \simeq 1{,}25$ s.

(II) La velocidad mínima se da para $t \simeq 2{,}17$ s.

(c) Como no hay cambio de sentido, la distancia recorrida es igual al cambio en la posición:

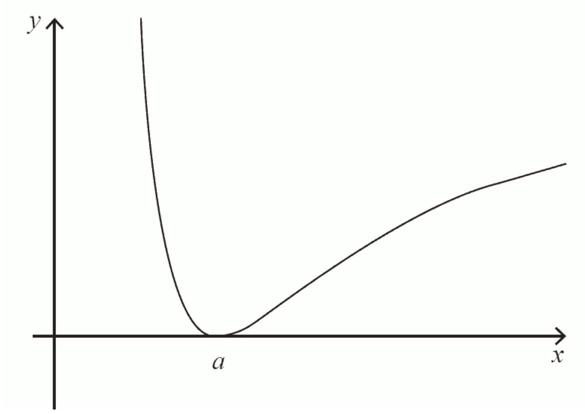
$$\int_{t_1}^{t_2} \left(1 - e^{-\operatorname{sen} t^2}\right) \, \mathrm{d}t \simeq -0{,}711$$

La distancia recorrida es aproximadamente 0,711 m.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (Sin calculadora) El diagrama muestra la gráfica de la función:

$$y = \frac{(\ln x)^2}{x} \; ; \qquad x > 0$$



(a) Sabiendo que la curva pasa por el punto $(a, 0)$, calcular el valor de a.

Sea R la región encerrada por la curva, el eje x y la recta $x = e$.

(b) Mediante la sustitución $u = \ln x$ calcule el área de la región R.

Solución:

(a) $a = 1$

(*b*) Calculamos la integral con la sustitución:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int (\ln x)^2\,\mathrm{d}(\ln x) = \int u^2\,\mathrm{d}u = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$$

El área es igual a:

$$S = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^e = \frac{1}{3}$$

♠♠♠♠

5. Matrices

Ejercicio 1. Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

Ponemos ceros en la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ -5 & -5 & 0 & -5 \\ -4 & -12 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando y sacando factor común:

$$= 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 12 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 12 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Ponemos ceros en la primera columna:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 3$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Hallar todas las matrices $A = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ distintas de $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tales que $A^2 = A$.

Solución:

Calculamos A^2:

$$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

y por consiguiente:

$$\begin{cases} a^2 = a \\ a^2 + ab = a \\ b^2 = b \end{cases}$$

Las soluciones son $a = 0,\ b = 1$ o $a = 1,\ b = 0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

se pide:

(*a*) *Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.*

(*b*) *Calcular la matriz inversa de A, en el caso $a = 2$.*

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & a \\ 0 & 5 & -2a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = 5 - 2a^2$$

El determinante se anula para $a = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Existe inversa para todos los valores de a excepto para estos.

Calculamos ahora la inversa para $a = 2$. El determinante de la matriz vale -3.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \\ -6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & -4 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

se pide:

(*a*) *Hallar el rango de A en función de los valores de k.*

(*b*) *Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución de la ecuación $AX = B$.*

Solución:

Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2k \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & k \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2k \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & -2 & 0 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2k(-2)(1 - k^2)$$

El determinante se anula para $k = 0$, $k = -1$ y $k = 1$. Entonces tenemos:

- ⋄ Si $k \notin \{0, -1, 1\}$ el rango de la matriz es igual a 3.

◇ Si $a = 0$:

$$\text{rango}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix} = 2$$

◇ Si $k = -1$

$$\text{rango}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix} = 2$$

◇ Si $k = 1$:

$$\text{rango}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix} = 2$$

Resolvamos ahora el sistema para $k = 2$. Por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 4 & 12\\ 1 & -1 & 2 & 6\\ 4 & -2 & 2 & 8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 4 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 6\\ 0 & 2 & -6 & -16\end{pmatrix}$$

que da $x = \frac{2}{3}$, $y = 0$, $z = \frac{8}{3}$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $XA^2 + BA = A^2$. siendo

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Solución:

Hay que tener en cuenta que $B = 2A$ por lo que $BA = 2A^2$. Entonces:

$$XA^2 + BA = A^2$$
$$XA^2 + 2A^2 = A^2$$
$$XA^2 = -A^2$$

Y, puesto que:

$$A^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I$$

resulta

$$X = -I = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7.

(a) Demostrar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

verifica una ecuación del tipo $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, determinando α y β.

(b) Utilizar el apartado anterior para calcular la inversa de A.

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos $\alpha = -4$ y $\beta = 3$. Entonces:

$$\begin{aligned} &A^2 - 4A + 3I = 0 \\ &3I = 4A - A^2 \\ &3I = A(4I - A) \\ &I = \frac{1}{3}A(4I - A) \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\,(4I - A) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b-1 & c & d+1 \\ a+1 & b & c-1 & d \\ a & b+1 & c & d-1 \\ a-1 & b & c+1 & d \end{vmatrix}$$

Solución:

Sumando a la primera las otras tres columnas se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a & b-1 & c & d+1 \\ a+1 & b & c-1 & d \\ a & b+1 & c & d-1 \\ a-1 & b & c+1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b-1 & c & d+1 \\ a+b+c+d & b & c-1 & d \\ a+b+c+d & b+1 & c & d-1 \\ a+b+c+d & b & c+1 & d \end{vmatrix}$$

Sacando factor común:

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b-1 & c & d+1 \\ 1 & b & c-1 & d \\ 1 & b+1 & c & d-1 \\ 1 & b & c+1 & d \end{vmatrix}$$

(restando la primera fila a las otras tres)

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b-1 & c & d+1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

(desarrollando por la primera columna)

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

(y puesto que la primera y la tercera columna son dependientes)

$$= 0$$

♠♠♠♠

6. Sistemas de ecuaciones

Ejercicio 1. Dado el sistema:

$$\begin{aligned} x+y+z&=-2\\ -\lambda x+3y+z&=-7\\ x+2y+(\lambda+2)z&=-5 \end{aligned}$$

(a) Estudiar el sistema según los valores del parámetro λ.

(b) Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ -\lambda & 3 & 1\\ 1 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ -\lambda & 3+\lambda & 1+\lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 3+\lambda & 2\\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

Podemos distinguir los siguientes casos:

- Si $\lambda\neq-1$ y $\lambda\neq-2$ el rango de ambas matrices es 3 y el sistema es compatible determinado.
- Si $\lambda=-1$ el rango $A=2$. La matriz ampliada:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 1 & -7\\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -5\\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 3$$

  El sistema es incompatible.
- Si $\lambda=-2$ el rango $A=2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 1 & -7\\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -5\\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = 2$$

  El sistema es compatible indeterminado.

(b) Vamos a resolver el sistema en el caso $\lambda=-2$. Como el rango de las matrices del sistema es 2, solo hay dos ecuaciones independientes. Escogemos la primera y la tercera:

$$\begin{cases} x+y+z=-2\\ x+2y=-5 \end{cases}$$

Podemos tomar $z=t$ como parámetro:

$$\begin{cases} x+y=-2-t\\ x+2y=-5 \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene:

$$\begin{cases} x=1-2t\\ y=-3+t\\ z=t \end{cases}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Estudiar la compatibilidad según los valores de a y resolver cuando sea posible el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 5x+2y-z&=0\\ x+ay-3z&=0\\ 3x+5y-2z&=0 \end{aligned}$$

Solución:

Es un sistema homogéneo y, por consiguiente, será siempre compatible. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1\\ 1 & a & -3\\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -10a-18-5+3a+75+4=-7a+56$$

El determinante se anula para $a=8$. Podemos distinguir los siguientes casos:

– Si $a \neq 8$ el rango de la matriz es 3. El sistema es compatible determinado y solo tiene la solución trivial $x = y = z = 0$-
– Si $a = 8$, el rango de la matriz es 2. Hay dos ecuaciones independientes. Tomando las dos primeras, el sistema queda:

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ x + 8y - 3z = 0 \end{cases}$$

La solución es:

$$x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} \lambda = 2\lambda$$

$$y = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \lambda = 14\lambda$$

$$z = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \lambda = 38\lambda$$

La solución puede escribirse también $(t, 7t, 19t)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3.

(a) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

escribir una tercera ecuación de la forma $ax + by = c$, distinta de las anteriores, de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

(b) Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ distinta de las dos anteriores, de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante sea compatible indeterminado.

Solución:

(a) El sistema es compatible determinado. Si queremos que siga siendo compatible deberemos añadir una combinación lineal de las dos ecuaciones que no cambiará las soluciones. Por ejemplo la suma de las dos ecuaciones $4x + y = 3$.

(b) El sistema que tenemos es compatible indeterminado. Si añadimos una ecuación independiente de las que tenemos el rango aumentará a 3 y se convertirá en uno compatible determinado o incompatible. Entonces, debemos añadir una ecuación que no cambie los rangos, una combinación lineal de las anteriores y que dé 1 como término independiente. Por ejemplo, multiplicando la primera ecuación por 2 y restándole la segunda se onbtiene:

$$3x + 3y - 4z = 1$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (m+2)x + (m-1)y - z &= 3 \\ mx - y + z &= 2 \\ x + my - z &= 1 \end{aligned}$$

(a) Discutirlo para los distintos valores de m.

(b) Resolverlo para $m = 1$.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - m = m(-m-1)$$

El determinante se hace cero para $m = 0$ y $m = -1$. Pueden distinguirse los siguientes casos:

- ⋄ $m \neq 0$ y $m \neq -1$. En este caso el rango de las dos matrices, la matriz de coeficientes y la matriz ampliada, es igual a 3. El sistema es compatible determinado.
- ⋄ Si $m = 0$ el rango de las matrices es:

$$\text{rango } A = \text{rango } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rango } A^* = \text{rango } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se ha suprimido la tercera columna puesto que sabemos que entre las tres primeras sólo hay dos independientes y las dos primeras lo son. Calculamos el determinante de esta matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Por consiguiente, el rango de la matriz ampliada A^* es 3, distinto del rango de la matriz A. El sistema es incompatible.

- ⋄ Hacemos lo mismo para $m = -1$:

$$\text{rango } A = \text{rango } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rango } A^* = \text{rango } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde hemos suprimido la tercera columna por la misma razón que en el caso anterior. Calculamos este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3 mayor que el rango de la matriz de coeficientes. El sistema es incompatible.

Vamos a resolver ahora el sistema para $m = 1$. El sistema es compatible determinado y podemos aplicar la regla de Cramer. Para $m = 1$ el determinante de la matriz de coeficientes es -2 así que:

$$x = \frac{1}{-2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{-2} \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$z = \frac{1}{-2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

♠♠♠♠

7. Geometría

Ejercicio 1. Dado el punto $P(-1,0,2)$ y las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

se pide:

(a) Determinar la posición relativa de r y s.

(b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s.

Solución:

(a) Podemos escribir las ecuaciones paramétricas de la primera recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Un punto y un vector director de esta recta son:

$$A(1,-1,0)\ ; \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un punto y un vector director de la segunda recta son:

$$B(1,0,3)\ ; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las rectas no son paralelas. Para saber si se cortan o se cruzan calculamos el producto mixto:

$$[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Las dos rectas se cruzan.

(b) Determinamos el plano que contiene a P y a r:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y+1 & 1 & -1 \\ z & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0\ ; \qquad -1(x-1) + 4(y+1) - 3z = 0\ ; \qquad -x + 4y - 3z + 5 = 0$$

y el plano que contiene a P y a s:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & 1 & 0 \\ z-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ; \qquad 1(x-1) - 1y - 2(z-3) = 0\ ; \qquad x - y - 2z + 5 = 0$$

La recta que buscamos es la intersección de los dos planos:

$$\begin{cases} -x + 4y - 3z + 5 = 0 \\ x - y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Dados los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(a,2,0)$, $P_3(1,5,4)$ y $P_4(2,0,2)$, se pide:

(a) Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

(b) Hallar el valor de a para que el tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 tenga volumen igual a 7.

(c) Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

Solución:

(a) Para que sean coplanarios el producto mixto de $\vec{P_1P_2}$, $\vec{P_1P_3}$ y $\vec{P_1P_4}$ debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 6(a-1) - 5 - 2 + 15(a-1) = 21a - 28 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

(b) En este caso:

$$\frac{1}{6}\,|21a - 28| = 7\ ; \qquad 21a - 28 = \pm 42\ ; \qquad 3a - 4 = \pm 6$$

lo que nos da $a = \frac{10}{3}$ y $a = -\frac{2}{3}$.

(c) El plano que nos piden es el plano mediador del segmento P_1P_3:

$$\begin{aligned} &(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 \\ &-2x + 1 - 6y + 9 + 2z + 1 = -2x + 1 - 10y + 25 - 8z + 16 \\ &4y + 10z - 31 = 0 \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. La recta r pasa por P y tiene vector director $\vec{u}$ siendo:

$$P(2,-1,0)\ ; \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ -2 \end{pmatrix}$$

La recta s pasa por Q y tiene vector director $\vec{v}$:

$$Q(1,0,-1)\ ; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre r y s sea $\dfrac{9}{\sqrt{59}}$.

(b) Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y por Q.

Solución:

(a) Calculamos el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & 1 \\ \vec{\jmath} & \lambda & 2 \\ \vec{k} & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 4 \\ -3 \\ 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

y el producto mixto de $\vec{PQ}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$[\vec{PQ}, \vec{u}, \vec{v}] = \vec{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = -1(\lambda + 4) - 3 - 1(2 - \lambda) = -9$$

Entonces:

$$\frac{9}{\sqrt{59}} = \frac{9}{\sqrt{(\lambda+4)^2 + 9 + (2-\lambda)^2}} = \frac{9}{\sqrt{2\lambda^2 + 4\lambda + 29}}$$

es decir:

$$2\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 59\ ; \qquad 2\lambda^2 + 4\lambda - 30 = 0\ ; \qquad \lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$$

y obtenemos $\lambda = -5$ y $\lambda = 3$. Como λ debe ser mayor que cero solo es válida $\lambda = 3$.

(b) Tiene que cumplirse que $\vec{u} \cdot \vec{PQ} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -1 + \lambda + 2 = 0$$

y, de aquí, $\lambda = -1$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}\ ; \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$$

(a) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

(b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

Solución:

(a) Escribimos la segunda recta en forma paramétrica. Tomamos $x = \lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$$

Sea $A(1, -1, k)$ un punto de r y $B(0, -2, 1)$ un punto de s. Si las dos rectas se encuentran en el mismo plano, el producto mixto de $\vec{AB}$ y los dos vectores directores debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1-k & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -k & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 - k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 4$$

(b) El plano que contiene a las dos rectas es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y+1 & 1 & -2 \\ z-4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad -1(x-1) - 2(y+1) + z - 4 = 0$$

El plano que contiene a las dos rectas es $x + 2y - z + 5 = 0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Dado el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$, y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$, se pide:

(a) Calcular el punto Q en que se cortan el plano π y la recta r.

(b) Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

Solución:

(a) Basta resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

La solución es el punto $Q(1, 0, -1)$.

(b) Si el punto Q' se encuentra a distancia 2 de Q, se encuentra en la superficie esférica:

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$$

Como además se encuentra sobre la recta dada, es la solución del sistema:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \\ x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$(1 + t - 1)^2 + 4t^2 + (-1 + 2t + 1)^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad t = \pm\frac{2}{3}$$

Obtenemos los puntos $Q'_1\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ y $Q'_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}\right)$

Los planos paralelos a π que pasan por estos puntos son:

$$3x + 3y + 3z - 10 = 0$$

$$3x + 3y + 3z + 10 = 0$$

♠♠♠♠