Matemáticas 2º Bachillerato. Exámenes

Curso 2018-2019

1. Funciones. Límites. Continuidad

Ejercicio 1.

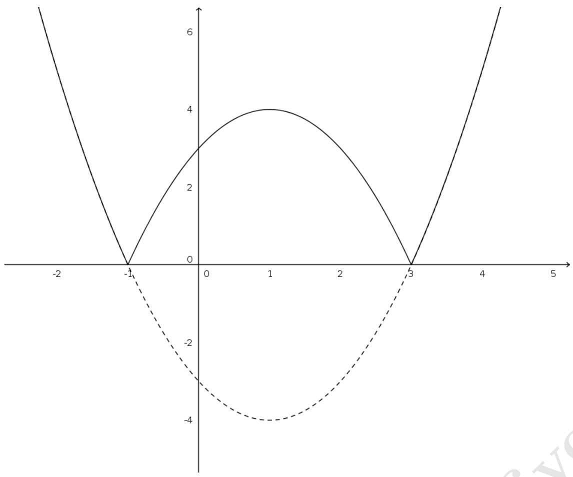
(a) Dibujar la gráfica de la función $y = x^2 - 2x - 3$ y, a partir de ella, dibujar la gráfica de:

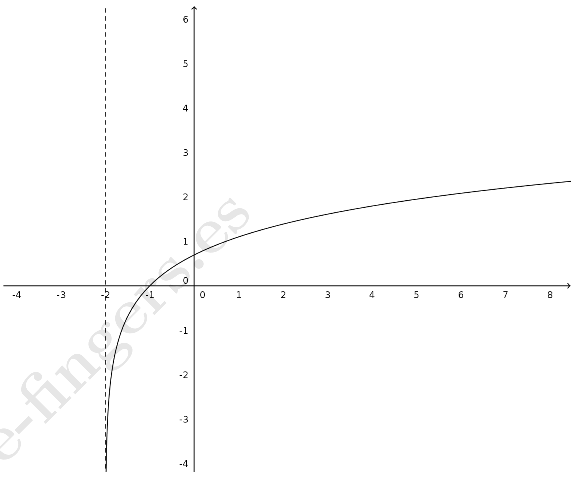
$$y = |x^2 - 2x - 3|$$

(b) Representar la función:

$$f(x) = \ln(x + 2)$$

Solución:





♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular el dominio de definición de la función:

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x-3)^2(x+2)}{x^2-1}}$$

Solución:

El dominio de la función es el conjunto:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{(x-3)^2(x+2)}{x^2-1} \geq 0 \right\}$$

El signo de la fracción está dado por el siguiente esquema:

	-2		-1		1		3	
$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$+$

El dominio es el conjunto $[-2, -1) \cup (1, \infty)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular la función inversa de:

$$f(x) = \ln(x^2+1)\ ; \qquad g(x) = \frac{x-3}{x+3}$$

Solución:

Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = \ln(y^2+1)\ ; \qquad y^2+1 = e^x\ ; \qquad y = f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$$

Procedemos de la misma manera con la función g:

$$x = \frac{y-3}{y+3}\ ; \qquad 3x + xy = y - 3\ ; \qquad 3x + 3 = y - xy\ ; \qquad y = g^{-1}(x) = \frac{3x+3}{1-x}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular los siguientes límites:

$$(a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+1} - \sqrt{x^2+3}\right) \qquad\qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x \ln(1+x)}{1-\cos x}$$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+1} - \sqrt{x^2+3}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-5x+1} - \sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2-5x+1} + \sqrt{x^2+3}\right)}{\sqrt{x^2-5x+1} + \sqrt{x^2+3}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1-x^2-3}{\sqrt{x^2-5x+1} + \sqrt{x^2+3}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{2x} \\
&= -\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x \ln(1+x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x}{\frac{x^2}{2}} = 4$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular los siguientes límites:

$$(a)\ \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{2-x}}{x^2-3x+2} \qquad\qquad (b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{2x+1}$$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{2-x}}{x^2-3x+2} &= \lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{2-x})(1+\sqrt{2-x})}{(x^2-3x+2)(1+\sqrt{2-x})} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1-2+x}{(x^2-3x+2)(1+\sqrt{2-x})} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x-2)(1+\sqrt{2-x})} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-2)(1+\sqrt{2-x})} \\
&= \frac{1}{(1-2)(1+\sqrt{1})} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(b) Es una indeterminación del tipo 1^∞:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x+5}{x-1}-1\right)\cdot 2x} \lim_{x\to\infty} e^{\frac{(x+5-x+1)(2x)}{x-1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{12x}{x}} = e^{12}$$

Ejercicio 6. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$$

Solución:

Los puntos de discontinuidad son $x = -1$ y $x = 2$.

En $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = \frac{-6}{0} = \infty$$

Hay una indeterminación de salto infinito.

En $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2+1)}{(x+1)} = \frac{5}{3}$$

En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = \cos x - 1$ se cortan en un punto c. Calcular la parte entera de c.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función

$$F(x) = 1 - x^2 - \cos x + 1 = -x^2 - \cos x + 2$$

se hace cero en algún punto.

- F es continua en $[0, \pi]$
- $F(1) = -1 - \cos 1 + 2 = 1 - \cos 1 > 0$
- $F(2) = -4 - \cos 2 + 2 = -2 - \cos 2 < 0$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (1, 2)$ tal que $F(c) = 0$. Las dos curvas se cortan en $x = c$. La parte entera de c es igual a 1.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular las asíntotas de la función

$$y = \frac{x^3 - x + 2}{x^2 - x}$$

Solución:

Las rectas $x = 0$ y $x = 1$ son asíntotas verticales porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x + 2}{x^2 - x} = \infty \ ; \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x + 2}{x^2 - x} = \infty$$

No hay asíntota horizontal porque

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x + 2}{x^2 - x} = \infty$$

Calculemos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x + 2}{x^2 - x} \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - x + 2}{x^2 - x} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x + 2 - x^3 + x^2}{x^2 - x} = 1$$

La asíntota es $y = x + 1$.

♠♠♠♠

2. Derivadas

Ejercicio 1. (2 puntos) Derivar las siguientes funciones

$(a)\ y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad (b)\ y = e^{2x} + 3e^{-x} - 2$

$(c)\ y = 4\operatorname{tg}^3 2x$ $\qquad (d)\ y = 3e^{2\operatorname{sen}^2 x}$

$(e)\ y = \operatorname{artg}\dfrac{1}{x}$ $\qquad (f)\ y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

$(g)\ y = \ln\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$ $\qquad (h)\ y = x^{\cos x}$

Solución:

$(a)\ y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}: \qquad y' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

$(b)\ y = e^{2x} + 3e^{-x} - 2: \qquad y' = e^{2x}\cdot 2 + 3e^{-x}(-1)$

$(c)\ y = 4\operatorname{tg}^3 2x: \qquad y' = 4\cdot 3\operatorname{tg}^2 2x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2$

$(d)\ y = 3e^{2\operatorname{sen}^2 x}: \qquad y' = 3e^{2\operatorname{sen}^2 x}\cdot 2\cdot 2\operatorname{sen}x\cdot\cos x$

$(e)\ y = \operatorname{artg}\dfrac{1}{x}: \qquad y' = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$(f)\ y = \dfrac{\ln x}{x^2}: \qquad y' = \dfrac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4}$

$(g)\ y = \ln\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)\right): \qquad y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x}{x^2-1} - \dfrac{2x}{x^2+1}\right)$

$(h)\ y = x^{\cos x} = e^{\ln x\cos x}: \qquad y' = e^{\ln x\cos x}\left(\dfrac{1}{x}\cos x - \operatorname{sen}x\ln x\right)$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Hallar a, b y c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

Solución:

Las derivadas de la función son:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$
$$f''(x) = 6x + 2a$$

Tenemos las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \\ f''(2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 + a + b + c = 2 \\ 3 + 2a + b = 0 \\ 18 + 2a = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene $a = -9$, $b = 15$ y $c = -5$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

Solución:

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{(6x+1)(x^2+1) - 2x(3x^2+x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

El signo de la derivada está dado por:

$-$	0	$+$	0	$-$
	-1		1	

Hay un mínimo en $x = -1$ y un máximo en $x = 1$.

Calculemos ahora la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{(-2x)(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)\cdot 2x(-x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{(-2x)(x^2+1) - 2\cdot 2x(-x^2+1)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

El signo de la derivada segunda está dado por:

$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	

Hay puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (2 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$$

se pide:

(a) Hallar las asíntotas de su gráfica.

(b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

(a) Hay una asíntota vertical $x = 3$ y una asíntota oblicua $y = x + 6$.

(b) El punto de tangencia es $(2, 8)$. La derivada de la función es

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-3)^2 - 2(x-3)x^3}{(x-3)^4} = \frac{3x^2(x-3) - 2x^3}{(x-3)^3} = \frac{x^3 - 9x^2}{(x-3)^3}$$

La pendiente de la recta tangente es

$$m = f'(2) = 28$$

y la ecuación de la tangente es

$$y - 8 = 28(x - 2)$$

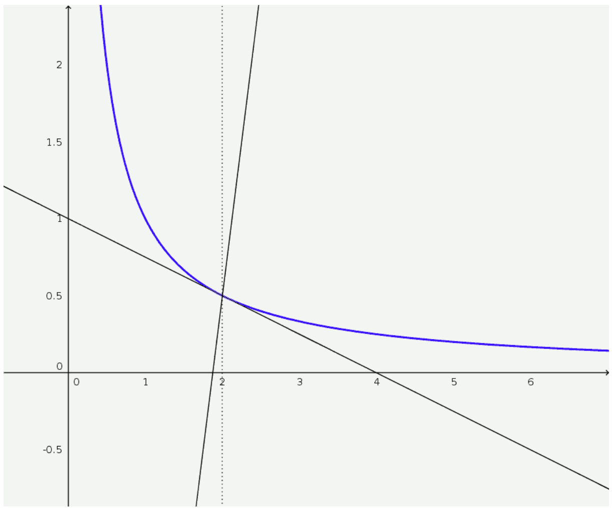
♠♠♠♠

Ejercicio 5. Halla el área del triángulo formado por el eje X y las rectas tangente y normal a la curva de ecuación

$$y = \frac{1}{x}$$

en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:



- La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 2 es:
$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2)$$
y la ecuación de la normal:
$$y - \frac{1}{2} = 4(x-2)$$
- Las intersecciones de estas rectas con el eje de abscisas son
$$\begin{cases} y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2) \\ y = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y - \frac{1}{2} = 4(x-2) \\ y = 0 \end{cases}$$
y obtenemos los puntos $A_1\,(4,0)$ y $A_2\left(\frac{15}{8},0\right)$.
- El área del triángulo es:
$$S = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{15}{8}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{17}{32}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función
$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

Solución:

Calculamos la derivada:
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$
La raíz del numerador es:
$$1 - 2\ln x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ln x = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad x = \sqrt{e}$$
El denominador tiene una raíz triple $x = 0$ pero en ese punto no existe la función. El signo de la derivada se representa en el siguiente esquema:

	$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$
		0		$\sqrt{e}$	

La función es creciente en $(0, \sqrt{e})$ y decreciente en $(\sqrt{e}, \infty)$. En el punto $x = \sqrt{e}$ hay un máximo local.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función

$$F(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

se anula para un único valor de x.

- La función $F(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y además $F(0) = 1 > 0$ y $F(-1) = -2 < 0$. Por el teorema de Bolzano, existe un punto $\xi \in (-1, 0)$ en donde $F(\xi) = 0$.
- La función $F(x)$ es derivable y su derivada es

  $$F'(x) = 2 + 6x + 12x^2$$

  Como el discriminante del polinomio de segundo grado es negativo la derivada no se anula para ningún valor de x. Entonces, por el teorema de Rolle, no puede haber dos ceros de la función pues, entre ellos, debería haber un cero de la derivada.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular:

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x - x}{2x^2 + x^4}$

Solución:

$$(a)\quad \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x\to 1} \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$(b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x - x}{2x^2 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - 1}{4x + 4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) - 1}{4x + 4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)}{4 + 12x^2} = \frac{1}{2}$$

En ambos límites hemos aplicado la regla de l'Hopital.

♠♠♠♠

3. Derivadas e integrales

Ejercicio 1. Derivar las siguientes funciones

(a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(b) $y = \operatorname{sen}^3 x$

(c) $y = 1 - \ln \operatorname{tg} x$

(d) $y = 3e^{\cos^2 x}$

(e) $y = \operatorname{arsen} \dfrac{1}{x}$

(f) $y = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

(g) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}^2 x}{1-\operatorname{sen}^2 x}}$

(h) $y = x^2 \operatorname{artg} 3x$

Solución:

(a) $y' = -\dfrac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$

(b) $y' = 3\operatorname{sen}^2 x \cos x$

(c) $y' = -\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(d) $y' = 3e^{\cos^2 x} \cdot 2\cos x(-\operatorname{sen} x)$

(e) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(f) $y' = \dfrac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^2}{x^2} = \dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$

(g) $y' = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{-2\operatorname{sen} x\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}$

(h) $y' = 2x \operatorname{artg} x + \dfrac{3}{1+9x^2\,x^2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

Solución:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{-\left(1+\operatorname{cotg}^2\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{4}{\pi}$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Se considera la función

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$$

se pide:

(a) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

(b) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.

(c) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Solución:

(a) Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2+1) - 2xe^{-x}}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)^2}{(x^2+1)^2}$$

La pendiente en el punto $x_0 = 0$ es:

$$m = f'(0) = -1$$

y la ordenada del punto de tangencia es:

$$y_0 = f(0) = 1$$

La ecuación de la tangente es $y - 1 = -x$.

(b) No hay asíntotas verticales.
La recta $y = 0$ es asíntota cuando $x \to \infty$ pueesto que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x(x^2+1)} = 0$$

Sin embargo no es asíntota cuando $x \to -\infty$.

(c) La derivada se anula en $x = -1$. Este punto no es un extremo local pues el signo de la derivada responde al siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ - & | & - \\ & -1 & \end{array}$$

La función es siempre decreciente.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dada la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

se pide:

(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.

(b) Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado anterior con los dos ejes coordenados.

(c) Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.

Solución:

(a) En el punto $x = a$ la función toma el valor $\frac{1}{a}$. La derivada de la función es $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. La pendiente de la tangente en el punto a será

$$m = -\frac{1}{a^2}$$

y la ecuación de la tangente es

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

(b) Las intersecciones de esta recta con el eje de abscisas:

$$\begin{cases} y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a) \\ y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A(2a, 0)$$

y con el eje de ordenadas

$$\begin{cases} y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a) \\ x = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad B\left(0, \frac{2}{a}\right)$$

(c) El cuadrado de la distancia entre estos dos puntos es:

$$F(a) = 4a^2 + \frac{4}{a^2}$$

Si la distancia es mínima, la derivada debe ser cero:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a} = 8a - \frac{8}{a^3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a^4 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad = 1$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular las integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\ln(x^2+1) + C$

(b) Por partes

$$u = \ln x \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

Entonces

$$\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3} + C$$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{artg}\,(3x) + C$

(d) Descomponemos en fracciones:

$$\frac{x+1}{x^2-9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+3)}{(x-3)(x+3)} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{3}\,; \quad B = \frac{2}{3}$$

Entonces:

$$\int \frac{x+1}{x^2-9} = \frac{1}{3}\ln|x+3| + \frac{2}{3}\ln|x-3| + C$$

♠♠♠♠

4. Examen global de cálculo

Ejercicio 1. Dada la función $f(x) = xe^{2x}$ dibujar su gráfica indicando

(*a*) Su dominio y asíntotas

(*b*) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos

(*c*) Intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

Solución:

(*a*) El dominio de la función son todos los números reales.
No hay asíntotas verticales. Veamos las horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} xe^{2x} = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} xe^2x = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota en $-\infty$.

(*b*) Calculemos la derivada:

$$f'(x) = e^{2x} + 2e^{2x}x = e^{2x}(1 + 2x)$$

La derivada se anula en $x = -\frac{1}{2}$. El signo de la derivada está dado por:

$-$ 0 $+$

$-\frac{1}{2}$

La función es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$. Hay un mínimo en $x = -\frac{1}{2}$.

(*c*) Calculemos la segunda derivada:

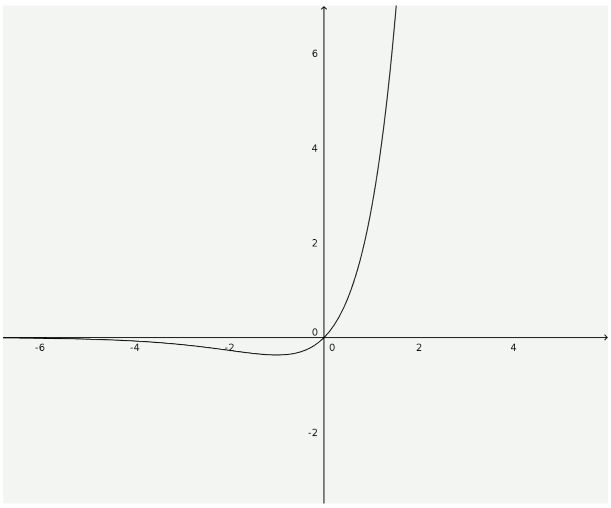
$$f''(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x}(2x + 1) = e^{2x}(4x + 4)$$

La segunda derivada se anula en $x = -1$. Su signo es:

$-$ 0 $+$

-1

La función es convexa en $(-\infty, -1)$ cóncava en $(-1, \infty)$. Hay un punto de inflexión en $x = -1$. La gráfica de la función es como sigue:



♠♠♠♠

Ejercicio 2. (2 puntos) Hallar a, b y c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

Solución:

Tenemos las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \\ f'(1) &= 0 \\ f''(3) &= 0 \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b \\ f''(x) &= 6x + 2a \end{aligned}$$

Sustituyendo se obtiene $a = -9$, $b = 15$, $c = -5$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

se pide:

(a) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

(b) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

(c) Calcular $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Para que exista el logaritmo debe ser $x > -1$. Además, los denominadores deben ser distintos de cero. El dominio es el conjunto:

$$(-1, \infty) - \{2\}$$

(b) La ordenada del punto de tangencia es $f(0) = 0$. Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4 - 2x \cdot x}{(x^2-4)^2} + \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

la pendiente es:

$$m = f'(0) = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

La recta tangente es:

$$y = \frac{3}{4}\,x$$

(c) Calculamos la integral:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x + \int \ln(x+1)\,\mathrm{d}(\ln(x+1)) \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 - 4| + \frac{\ln^2(x+1)}{2} + C \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int e^{2x}\cos x\ \mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 2x}\ \mathrm{d}x$

Solución:

(a) Integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= e^{2x} \qquad \mathrm{d}u = 2e^{2x}\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \cos x\ \mathrm{d}x \quad v = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\int e^{2x}\cos x\ \mathrm{d}x = e^{2x}\operatorname{sen} x - 2\int e^{2x}\operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x$$

De nuevo por partes:

$$\begin{aligned} u &= e^{2x} \qquad \mathrm{d}u = 2e^{2x}\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x \quad v = -\cos x \end{aligned}$$

$$\int e^{2x}\cos x\ \mathrm{d}x = e^{2x}\operatorname{sen} x - 2\int e^{2x}\operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x = e^{2x}\operatorname{sen} x - 2\left(-e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\ \mathrm{d}x\right)$$

Es decir:

$$\int e^{2x}\cos x\ \mathrm{d}x = e^{2x}\operatorname{sen} x + 2e^{2x}\cos x - 4\int e^{2x}\cos x\ \mathrm{d}x$$

Pasando la integral al primer miembro y despejando:

$$\int e^{2x}\cos x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,e^{2x}\left(\operatorname{sen} x + 2\cos x\right) + C$$

(b) Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} t &= \cos 2x \\ \mathrm{d}t &= -2\operatorname{sen} 2x\ \mathrm{d}x \\ \operatorname{sen} 2x\ \mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 2x}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\operatorname{artg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{artg}\,\cos 2x + C$$

♠♠♠♠

5. Cálculo. Problemas de selectividad

Ejercicio 1. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$$

y se pide:

(a) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

(b) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.

(c) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Solución:

(a) Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2+1) - 2xe^{-x}}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)^2}{(x^2+1)^2}$$

La pendiente en el punto $x_0 = 0$ es:

$$m = f'(0) = -1$$

y la ordenada del punto de tangencia es:

$$y_0 = f(0) = 1$$

La ecuación de la tangente es $y - 1 = -x$.

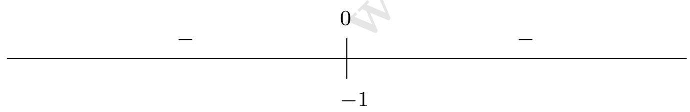
(b) No hay asíntotas verticales.

La recta $y = 0$ es asíntota cuando $x \to \infty$ pueesto que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x(x^2+1)} = 0$$

Sin embargo no es asíntota cuando $x \to -\infty$.

(c) La derivada se anula en $x = -1$. Este punto no es un extremo local pues el signo de la derivada responde al siguiente esquema:



La función es siempre decreciente.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & x < 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

(a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

(b) Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(c) Calcular

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Solución

(a) La función es continua en $x=0$ puesto que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} xe^{2x} = 0\\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0\\ f(0) &= 0\end{aligned}$$

La derivada de la función para $x \neq 0$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{2x}(1+2x) & x<0\\ \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} & x>0\end{cases}$$

Puesto que $f'(0^-) = f'(0^+) = 1$, la función es derivable en $x=0$.

(b) No hay asíntotas verticales. Calculamos los límites:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} xe^{2x} = 0\\ \lim_{x\to \infty} f(x) &= \lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0\end{aligned}$$

La recta $y=0$ es asíntota tanto en $-\infty$ como en $+\infty$.

(c) Integramos por partes:

$$\begin{aligned} u &= x & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v &= e^{2x} & v &= \frac{1}{2}e^{2x}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,xe^{2x}\right]_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,xe^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{e^{2x}(2x-1)}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{4e^2} - \frac{1}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{2}{x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \operatorname{sen}(x)$$

se pide:

(a)) Calcular

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x) - \frac{2}{g(x)}\right)$$

(b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $(\frac{1}{2}, 4)$.

(c) Calcular el área delimitada por la curva $y=f(x)$ y la recta $y=-x+3$.

Solución

(a) Sustituyendo:

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x) - \frac{2}{g(x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2(\operatorname{sen} x - x)}{x\operatorname{sen} x}$$

Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de l'Hopital:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(\cos x - 1)}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen} x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x} = 0$$

(b) Derivamos la función f:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

La pendiente de la recta tangente es:

$$m = f'\left(\frac{1}{2}\right) = -8$$

La ecuación de la tangente es:

$$y - 4 = -8\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

(c) Los puntos de corte entre la curva y la recta son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = -x + 3 \end{cases} \quad ; \qquad -x + 3 = \frac{2}{x} \; ; \qquad x^2 - 3x + 2 = 0$$

Las soluciones son $x = 1$ y $x = 2$. Calculamos la integral de la diferencia de ambas funciones:

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} + x - 3\right)\,\mathrm{d}x = \left[2\ln x + \frac{x^2}{2} - 3x\right]_1^2 = 2\ln 2 + 2 - 6 - \ln 1 - \frac{1}{2} + 3 = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$$

Como este número es negativo, el área es

$$S = \frac{3}{2} - 2\ln 2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (1,75 puntos) Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Solución

Derivamos la función:

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}t = e^{-\frac{t}{2}}\left(1 - \frac{t}{2}\right)$$

La derivada se anula para $t = 2$. Es fácil ver que se trata de un máximo. El valor de la función en el máximo es

$$c(2) = 2e^{-1} \simeq 0{,}736$$

Puesto que la concentración nunca alcanza el valor 1 hay que estimar que no hay riesgo para el paciente.

♠♠♠♠

6. Matrices y determinantes

Ejercicio 1. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ x & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ x & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 4 \\ x+1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ x+1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & -5 & 4 \\ x+1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ x+1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot (3 - x - 1) = 8 \cdot (2 - x)$$

Primero hemos puesto ceros y hemos desarrollado el determinante por la segunda columna. Después hemos puesto ceros y desarrollado por la tercera fila y hemos sacado factor común 4 de la primera fila.

Puesto que este determinante debe ser igual a cero:

$$8 \cdot (2 - x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular la matriz X en $AX = B$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Despejamos la matriz incógnita multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1}B$$

Calculamos la matriz inversa de A. Para ello, obtenemos en primer lugar el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \operatorname{adj} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^t = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, halla una matriz X tal que $AXA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución:

Multiplicando por la izquierda y por la derecha por A^{-1} resulta:

$$A^{-1}AXAA^{-1} = A^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}A^{-1} \quad\Longrightarrow\quad X = A^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}A^{-1}$$

La matriz A tiene determinante 1. Su inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

Entonces:

$$X = \begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -2\\1 & 1\end{bmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -1\\0 & 2 & -1 & 1 & 2\\-1 & 1 & 3 & 2 & 0\\0 & 8 & 7 & 9 & 4\end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\text{rango } A = \text{rango} &\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -1\\0 & 2 & -1 & 1 & 2\\-1 & 1 & 3 & 2 & 0\\0 & 8 & 7 & 9 & 4\end{bmatrix} && F_3 \longrightarrow F_3 + F_1\\
= \text{rango} &\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -1\\0 & 2 & -1 & 1 & 2\\0 & 1 & 5 & 3 & -1\\0 & 8 & 7 & 9 & 4\end{bmatrix} && F_2 \longleftrightarrow F_3\\
= \text{rango} &\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -1\\0 & 1 & 5 & 3 & -1\\0 & 2 & -1 & 1 & 2\\0 & 8 & 7 & 9 & 4\end{bmatrix} && F_3 \longrightarrow F_3 - 2F_2, \quad F_4 \to F_4 - 8F_2\\
= \text{rango} &\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -1\\0 & 1 & 5 & 3 & -1\\0 & 0 & -11 & -5 & 4\\0 & 0 & -33 & -15 & 12\end{bmatrix} && F_4 = 3F_3\\
= \text{rango} &\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -1\\0 & 1 & 5 & 3 & -1\\0 & 0 & -11 & -5 & 4\end{bmatrix}\\
= 3 &
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular el rango de la matriz:

$$M = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & m & 1 & 0\\1 & m+1 & m & m+1\end{bmatrix}$$

según los valores de m.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz formada por las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\0 & m & 1\\1 & m+1 & m\end{vmatrix} = m^2 + 1 - m - 1 = m^2 - m$$

El determinante se anula para $m = 0$ y $m = 1$. Por consiguiente:

- $m \neq 0,\ m \neq 1$. El rango de la matriz es 3.
- $m = 0$. El rango de la matriz es:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

  puesto que hay tres columnas iguales.
- $m = 1$:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

  Para calcular el rango hemos suprimido la segunda columna puesto que sabemos que, de las tres primeras, solo hay dos independientes. El determinante de la matriz es claramente distinto de cero luego el rango de la matriz es 3.

♠♠♠♠

7. Matrices. Sistemas de ecuaciones

Ejercicio 1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) Estudiar el rango de la matriz B en función de a.

(b) Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.

Solución:

(a) Escogemos tres columnas y calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & -7 & -8 \\ 3 & 3+a & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-22) - (3+a) \cdot (-36) + 3 \cdot (-26) = -12 + 12a$$

El determinante se anula para $a = 1$. Entonces tenemos que

- Si $a \neq 1$ el rango de la matriz es 3.
- Si $a = 1$:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -14 & 0 & -10 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

(b) $AX = B \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1}B$. Tenemos que calcular la matriz inversa de A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad |A| = 4 \; ; \qquad \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; \quad X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2.

(a) Despeje X en la ecuación matricial $X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A, B, C y D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.

(b) Para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

determine la matriz Y tal que $YB = A$.

Solución:

(a) Teniendo en cuenta que $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$:

$$XD^{-1}C^{-1} = A + XD^{-1}C^{-1} - XB$$
$$XB = A$$
$$X = AB^{-1}$$

(*b*) Calculamos la inversa de la matriz B:

$$|B|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\0&0&2\end{vmatrix}=2\ ;\qquad \operatorname{adj}B=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-2&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\quad;\qquad B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

Entonces

$$Y=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-4&1\\-2&-2&2\\-1&-2&3\end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases}3x+y+mz=1\\x-y+2z=-2\\5x+(m+1)y+2z=4\end{cases}$$

se pide:

(*a*) Discutirlo según los valores del parámetro m.

(*b*) Resolverlo en el caso $m=0$.

(*c*) Resolverlo en el caso $m=2$.

Solución:

(*a*) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix}3&1&m\\1&-1&2\\5&m+1&2\end{vmatrix}=m^2-4$$

El determinante se anula mpara $m=-2$ y $m=2$. Entonces:

- Para $m\neq-2$ y $m\neq2$ el rango de las matrices es 3 y el sistema es compatible determinado.
- Para $m=-2$ el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el rango de la ampliada:

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix}3&1&-2&1\\1&1&2&-2\\5&-1&2&4\end{pmatrix}=\operatorname{rango}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&2&-2\\-1&2&4\end{pmatrix}=\operatorname{rango}\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&4&-3\\0&0&3\end{pmatrix}=3$$

El sistema es incompatible.

- Para $m=2$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. Calculamos el rango de la matriz ampliada:

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix}3&1&2&1\\1&-1&2&-2\\5&3&2&4\end{pmatrix}=\operatorname{rango}\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&2&-2\\3&2&4\end{pmatrix}=\operatorname{rango}\begin{pmatrix}1&2&1\\-2&0&-3\\2&0&3\end{pmatrix}=2$$

El sistema es compatible indeterminado.

(*b*) Para $m=0$ el sistema es compatible determinado. Resolvemos por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}3&1&0&1\\1&-1&2&-2\\5&1&2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&1&0&1\\4&0&2&-1\\2&0&2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&1&0&1\\4&0&2&-1\\-2&0&0&4\end{pmatrix}$$

y así obtenemos $x=-2$, $y=7$, $z=\frac{7}{2}$.

(*c*) Para $m=2$ el sistema es compatible indeterminado. Como el rango de las matrices es 2, buscamos dos ecuaciones independientes:

$$\begin{cases}3x+y+2z=1\\x-y+2z=-2\end{cases}$$

Tomando $z=\lambda$ como parámetro resulta:

$$\begin{cases}3x+y=1-2\lambda\\x-y=2-2z\end{cases}$$

La solución es $\left(-\frac{1}{4}-\lambda,\ \frac{7}{4}+\lambda,\ \lambda\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{cases}$$

se pide:

(*a*) Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.

(*b*) Resolver el sistema para $\lambda = 5$.

Solución:

(*a*) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

El dwterminante se anula para $\lambda = 1$ y $\lambda = 5$. Para estos valores el sistema es compatible indeterminado y tiene soluciones distintas de la solución trivial.

(*b*) Para $\lambda = 5$ la matrizdel sistema tiene rango 2. Buscamos dos ecuaciones independientes:

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Una solución particular de este sistema es:

$$x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \ ; \qquad y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5 \ ; \qquad z = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -15$$

La solución general es $(5\lambda, -5\lambda, -15\lambda)$ o también $(\lambda, -\lambda, -3\lambda)$.

♠♠♠♠

8. Geometría: perpendicularidad y paralelismo

Ejercicio 1. Calcular el valor de m para que los puntos $A(0,1,2)$, $B(1,0,3)$, $C(1,m,1)$ y $D(m,-1,2m)$ pertenezcan a un mismo plano.

Solución:

Si los cuatro puntos son coplanarios, los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes. Entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ -1 & m-1 & -2 \\ 1 & -1 & 2m-2 \end{vmatrix} = 0$$

Ponemos ceros en la primera columna y resulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & m-2 \\ 0 & -2 & m-2 \end{vmatrix} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{vmatrix} m & m-2 \\ -2 & m-2 \end{vmatrix} = 0 \quad\Longrightarrow\quad (m-2)\begin{vmatrix} m & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando

$$(m-2)(m+2) = 0 \quad\Longrightarrow\quad m = 2, \quad m = -2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Escribir la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(3,1,-1)$ y $B(2,-1,4)$ y es paralelo a la recta de ecuaciones:

$$r\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{4}$$

Solución:

Podemos tomar como vectores directores el de la recta y $\vec{AB}$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ y-1 & 3 & -2 \\ z+1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad ; \qquad 23x - 9y + z - 59 = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta de ecuaciones implícitas:

$$r\colon \begin{cases} 3x - y - z - 1 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Solución:

El vector director de la recta es:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 3 & 1 \\ \vec{\jmath} & -1 & 1 \\ \vec{k} & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos un punto de la recta dando valores. Para $x = 0$:

$$\begin{cases} -y - z - 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad y = 1 \quad z = -2$$

El punto es $P(0,1,-2)$. La ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \qquad \text{o} \qquad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular la ecuación de la recta paralela a:

$$\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x + 3y - z + 7 = 0 \end{cases}$$

por el punto $P(0,1,2)$.

Solución:

El vector director de la recta es:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & 2 \\ \vec{\jmath} & 1 & 3 \\ \vec{k} & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

y pasa por el punto $P(1,3,-1)$.

Solución:

El haz de planos que contiene a la recta dada es:

$$\alpha(2x - y + z - 1) + \beta(x + y - z - 3) = 0$$

Si debe contener el punto $P(1,3,-1)$:

$$\alpha(2 - 3 - 1 - 1) + \beta(1 + 3 + 1 - 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -3\alpha + 2\beta = 0$$

Para $\alpha = 2$ y $\beta = 3$:

$$2(2x - y + z - 1) + 3(x + y - z - 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 7x + y - z - 11 = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Dados el plano:

$$\pi \equiv x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$r \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

Solución:

El vector director de la recta y el vector normal al plano que nos dan son vectores directores del plano que buscamos. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 6 & 1 \\ y-1 & 2 & 3 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -5(x+2) + 7(y-1) - 16z = 0$$

Haciendo operaciones la ecuación resulta $-5x + 7y - 16z - 17 = 0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \quad ; \quad \pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0 \; ; \quad \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

Determinar la posición relativa de la recta respecto a cada uno de los planos.

Solución:

- El vector director de la recta y el vecor normal al primer plano son:

  $$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  y su producto escalar:

  $$\vec{u} \cdot \vec{n} = -3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \neq 0$$

  La recta y el plano se cortan. Además, se cortan perpendicularmente puesto que el vector director de la recta es igual que el vector normal al plano.
- Para el segundo plano los vectores son:

  $$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

  y el producto escalar:

  $$\vec{u} \cdot \vec{n} = -3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) = 0$$

  Entonces, o bien son paralelos, o bien la recta está contenida en el plano. Un punto de la recta es $P(2, 1, 4)$. Veamos si esta recta está contenida en el plano:

  $$3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \neq 0$$

  La recta y el plano son paralelos.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Dado el punto $P(0, 1, 1)$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$$

determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

Solución:

- Calculamos la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a r:

  $$2(x-0) + 1(y-1) - 1(z-1) = 0 \; ; \qquad 2x + y - z = 0$$

– Ahora calculamos el punto de corte de este plano con la recta:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Resolviendo por sustitución resulta $\lambda = -\frac{1}{6}$. El punto de corte es $M\left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

– Este punto es punto medio entre el punto P y su simétrico. Entonces:

$$\frac{2}{3} = \frac{0 + x'}{2} \; ; \qquad -\frac{7}{6} = \frac{1 + y'}{2} \; ; \qquad \frac{1}{6} = \frac{1 + z'}{2}$$

El punto simétrico es $P'\left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

♠♠♠♠

9. Geometría

Ejercicio 1. Dados los planos $\pi_1 : ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 : x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a, para cada uno de los siguientes supuestos:

(a) Que π_1 y π_2 sean paralelos.

(b) Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.

(c) Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $x = y$.

Solución:

(a) Para que sean paralelos:

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \quad \Longrightarrow \quad a = -1$$

(b) Para que sean perpendiculares:

$$a \cdot 1 + 1 \cdot a - 1 \cdot 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

(c) El vector director de la recta intersección es:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & a & 1 \\ \vec{\jmath} & 1 & a \\ \vec{k} & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a + 1 \\ -a - 1 \\ a^2 - 1 \end{pmatrix}$$

El vector normal al plano $x = y$ es:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Debe cumplirse que los dos vectores tengan la misma dirección:

$$\begin{pmatrix} a + 1 \\ -a - 1 \\ a^2 - 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, de aquí, $a = 1$ o $a = -1$. La solución $a = -1$ no es válida porque el vector cero no puede ser un vector de dirección.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0 \,, \qquad \pi_2 \equiv 2x + y - 3z - 1 = 0$$

y la recta:

$$r \equiv \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z + 2}{2}$$

se pide:

(a) El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2.
(b) El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY, XZ e YZ.
(c) La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2.

Solución:

(a) Los puntos que equidistan de ambos planos forman los planos bisectores:

$$\frac{2x+3y+z-1}{\sqrt{14}}=\pm\frac{2x+y-3z-1}{\sqrt{14}}$$

Los planos bisectores son:

$$y+2z=0\ ; \qquad 2x+2y-z-1=0$$

Los puntos que nos piden son las intersecciones de la recta con estos planos:

$$\begin{cases} y+2z=0 \\ x=1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} 2x+2y-z-1=0 \\ x=1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$$

Los puntos son $P_1\,(3,0,0)$ y $P_2\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{4},-\frac{5}{2}\right)$

(b) Los puntos de intersección de π_1 con los ejes coordenados son $A\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $B\left(0,\frac{1}{3},0\right)$, y $C\,(0,0,1)$. El volumen del tetraedro es:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{36}$$

(c) El plano que contiene a r y π_2 es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z+2 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0\ ; \qquad -5(x-1)+10(y+1)=0\ ; \qquad x-2y-3=0$$

La proyección es la intersección de este plano con π_2:

$$\begin{cases} x-2y-3=0 \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Dadas las rectas:

$$r\ :\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}\ : \qquad s\ :\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$$

(a) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y el perpendicular a ambas.

(b) Calcular la mínima distancia entre r y s.

Solución:

(a) El vector director de la perpendicular común es:

$$\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 2 & 1 \\ \vec{\jmath} & 3 & -1 \\ \vec{k} & 4 & 2 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El plano que contiene a la primera recta y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y-1 & 0 & 3 \\ z-1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0\ ; \qquad 3x-10y+6z+1=0$$

El plano que contiene a la segunda recta y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ y-2 & 0 & -1 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix}=0\ ; \qquad x+5y+2z-9=0$$

La ecuación de la perpendicular común es la intersección de estos dos planos:

$$\begin{cases} 3x-10y+6z+1=0 \\ x+5y+2z-9=0 \end{cases}$$

(*b*) Calculamos el producto mixto $[\vec{PQ}, \vec{v_1}, \vec{v_2}]$ donde P y Q son puntos de la primera y la segunda recta:

$$[\vec{PQ}, \vec{v_1}, \vec{v_2}] = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -15$$

La distancia es el valor absoluto de este número dividido por el módulo del producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$d = \frac{15}{5\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dados el plano:

$$\pi \equiv x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$r \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

se pide:

(*a*) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

(*b*) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π'.

Solución:

(*a*) Podemos tomar como vectores directores del plano el vector director de la recta y el normal al plano dado:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 6 & 1 \\ y-1 & 2 & 3 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ; \qquad -5(x+2) + 7(y-1) + 16z = 0 \ ; \qquad -5x + 7y + 16z - 17 = 0$$

(*b*) Sea la recta:

$$\begin{cases} -5x + 7y + 16z - 17 = 0 \\ x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

El vector director de esta recta es:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -5 & 1 \\ \vec{\jmath} & 7 & 3 \\ \vec{k} & 16 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -55 \\ 11 \\ -22 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dando a z el valor 0 se obtiene el punto $P(-2, 1, 0)$. Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} x = -2 + 5\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

♠♠♠♠

10. Probabilidad

Ejercicio 1. En un experimento se sabe que $p(A) = 0{,}5$, $p(B) = 0{,}7$ y $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}15$. Calcular:

(*a*) $p(A \cap B)$
(*b*) $p(A \cap \overline{B})$
(*c*) $p(A \mid B)$

Solución

Si $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 0{,}15$, entonces:

$$p(A \cup B) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85 \quad \Longrightarrow \quad p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}7 - 0{,}85 = 0{,}35$$

A partir de aquí:

$$p(A \cap \overline{B}) = p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}35 = 0{,}15$$

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0{,}35}{0{,}7} = 0{,}50$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Una experiencia aleatoria consiste en lanzar tres monedas al aire. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

(*a*) obtener tres caras
(*b*) obtener dos caras y una cruz
(*c*) obtener al menos una cara

Solución

Llamando C al resultado cara y X al resultado cruz, el espacio muestral es:

$$E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$$

Entonces:

$$\text{p(obtener tres caras)} = \frac{1}{8}$$

$$\text{p(obtener dos caras y una cruz)} = \frac{3}{8}$$

$$\text{p(obtener al menos una cara)} = \frac{7}{8}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados se pide calcular la probabilidad de obtener:

(*a*) Tres unos.
(*b*) Al menos un dos.
(*c*) Tres números distintos.
(*d*) Una suma de diez.

Solución

La probabilidad de sacar tres unos es por la regla del producto:

$$\text{p(tres unos)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

La probabilidad de no sacar ningún dos es:

$$\text{p(ningún dos)} = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

de forma que la probabilidad de sacar algún dos es:

$$\text{p(algún dos)} = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

Al tirar el segundo dado, la probabilidad de obtener un número diferente que en el primer lanzamiento es $\frac{5}{6}$. Si lanzamos el tercer dado, la probabilidad de obtener un número diferente que en los dos primeros lanzamientos es $\frac{4}{6}$. Entonces:

$$\text{p(tres números diferentes)} = \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Una suma de 10 puede obtenerse de las siguientes maneras:

145	154	415	451	514	541
136	163	316	361	613	631
226	262	622			
235	253	325	352	523	532
244	424	442			
334	343	433			

En total, 27 resultados favorables de los 216 posibles. La probabilidad de obtener suma 10 es

$$\text{p(suma diez)} = \frac{27}{216}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Se consideran dos sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio con $\text{p}(A) = 0{,}7$, $\text{p}(B) = 0{,}6$ y $\text{p}(\overline{A}\cup\overline{B}) = 0{,}58$. ¿Son independientes A y B?

Solución

$$\text{p}(\overline{A}\cup\overline{B}) = 0{,}58 \quad\Longrightarrow\quad \text{p}(\overline{A\cap B}) = 0{,}58 \quad\Longrightarrow\quad \text{p}(A\cap B) = 1 - 0,58 = 0,42$$

Puesto que:

$$\text{p}(A)\cdot\text{p}(B) = 0{,}6\cdot 0{,}7 = 0{,}42 = \text{p}(A\cap B)$$

los sucesos son independientes.

♠♠♠♠

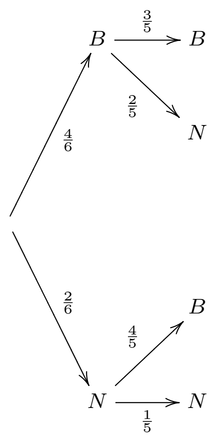
Ejercicio 5. De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?

(b) Si la segunda bola es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo sea?

Solución

El problema puede representarse mediante el siguiente esquema:



La probabilidad de que las dos sean blancas es:

$$p(B_1 \cap B_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Si la segunda es negra:

$$p(N_1 \mid N_2) = \frac{p(N_1 \cap N_2)}{p(N_2)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Una encuesta revela que el 35 % de los habitantes de una ciudad escucha la emisora A, el 28 % la emisora B y el 10 % oye ambas emisoras. Se elige al azar uno de esos ciudadanos. Calcular la probabilidad de que escuche:

(a) Alguna de esas emisoras.
(b) Ninguna de ellas.
(c) La emisora A sabiendo que no escucha la B.
(d) Solo una de las dos.

Solución

Llamando:

$A =$ la persona elegida escucha la emisora A

$B =$ la persona elegida escucha la emisora B

tenemos que $p(A) = 0{,}35$, $p(B) = 0{,}28$ y $p(A \cap B) = 0{,}10$. Entonces tenemos:

(a) p(escucha alguna de estas emisoras) $= p(A \cup B) = 0{,}35 + 0{,}28 - 0,10 = 0{,}53$
(b) p(no escucha ninguna de ellas) $= p(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,53 = 0{,}47$
(c) p(escucha A sabiendo que no escucha B) $= p(A/\overline{B}) = \frac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})} = \frac{0{,}35-0{,}10}{0{,}72} = 0{,}3472$
(d) p(escucha solo una de las dos) $= p(A - B) + p(B - A) = 0{,}35 - 0{,}10 + 0{,}28 - 0{,}10 = 0{,}43$

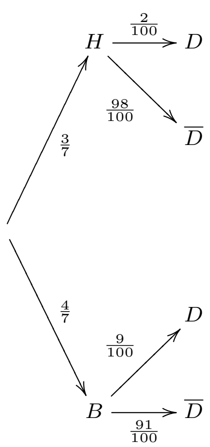
♠♠♠♠

Ejercicio 7. En una empresa se producen dos tipos de bombillas, halógenas y de bajo consumo en una proporción de 3 a 4 respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es de 0,02, y las de que lo sea una de bajo consumo es de 0,09. Se escoge una bombilla al azar:

(a) Calcular la probabilidad de que no sea defectuosa.
(b) Si la bombilla escogida resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena

Solución

En este caso el esquema es el siguiente:



La probabilidad de que la bombilla no sea defectuosa es:

$$p(\overline{D}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{98}{100} + \frac{4}{7} \cdot \frac{91}{100} = \frac{658}{700}$$

En cuanto a la segunda cuestión:

$$p(H/\overline{D}) = \frac{p(H \cap \overline{D})}{p(\overline{D})} = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{98}{100}}{\frac{658}{700}} = \frac{294}{658}$$

♠♠♠♠

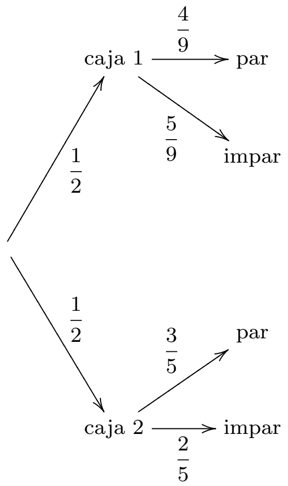
11. Variable aleatoria

Ejercicio 1. Se tienen dos cajas. La primera caja contiene 9 cartas numeradas de 1 a 9 y la segunda contiene 5 cartas numeradas de 4 a 8. Se escoge al azar una caja y se extrae de ella una carta.

(a) Calcular la probabilidad de obtener una carta con un número par.
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta par se haya extraído de la primera caja?

Solución:

En este caso el esquema es el siguiente:



(a) La probabilidad de obtener un número par es

$$\mathrm{p(par)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{47}{90}$$

(b) Aplicamos el teorema de bayes:

$$\mathrm{p}\left(\text{caja } 1 \mid \text{par}\right) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{20}{47}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. El voltaje de la corriente eléctrica que llega a un domicilio tiene una distribución normal de media 220 voltios y desviación típica de 1,5 voltios. Calcular la probabilidad de que una medida del voltaje tomada al azar:

(a) Sea menor que 221 voltios
(b) Esté comprendido entre 215 y 222 voltios

Solución:

Sea X la variable aleatoria que representa el voltaje $X \sim \mathrm{N}(220, 1{,}5)$:

(a) $\mathrm{p}(X \leq 221) = \mathrm{p}\left(Z \leq \frac{221-220}{1{,}5}\right) = 0{,}7475$

(b) $\mathrm{p}\left(215 < X < 222\right) = \mathrm{p}\left(\frac{215-220}{1{,}5} < Z < \frac{221-220}{1{,}5}\right) = 0{,}9084$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. La producción de trigo por hectárea de terreno en una comarca sigue una distribución $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Los datos históricos indican que solo en el 10 % de los años la producción supero los 4000 kg/Ha, mientras que en el 60 % de los años queda por debajo de los 3200 kg/Ha.

(a) Calcular la media y la desviación típica de la distribución

(b) Calcular la probabilidad de que la producción alcance los 3500 kg/Ha en un año elegido al azar

Solución:

(a) Sea X la variable aleatoria que representa la producción de trigo por hectárea. Tenemos que:

$$p(X > 4000) = 0{,}10 = p\left(Z > \frac{4000-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}10$$

$$p(X < 3200) = 0{,}60 = p\left(Z < \frac{3200-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}60$$

Con estos datos obtenemos:

$$\frac{4000-\mu}{\sigma} = 1{,}28 \ ; \qquad \frac{3200-\mu}{\sigma} = 0,25$$

y resolviendo este sistema sale $\mu = 3006$, $\sigma = 777$

(b) Con los datos anteriores:

$$p(X > 3500) = p\left(Z > \frac{3500-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}2625$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. La estatura media de los bebés nacidos en una maternidad en el último añosigue una distribución normal de media 45 cm. El 20 % de los recién nacidos ha medido más de 50 cm.

(a) Calcular la desviación típica

(b) Calcular la probabilidad de que un bebé elegido al azar mida menos de 40 cm

(c) Si en la maternidad nacieron 100 bebés en el último mes, ¿cuántos se espera que sobrepasen los 55 cm?

Solución:

(a) Llamemos X a la estatura de los bebés. Sabemos que $X \sim \mathrm{N}(45, \sigma)$. Entonces:

$$p(X > 50) = 0{,}20 = p\left(Z > \frac{50-45}{\sigma}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{5}{\sigma} = 0{,}8416\ldots \ ; \qquad \sigma \simeq 5{,}94$$

(b) Con el valor anterior:

$$p(X < 40) = p\left(Z < \frac{40-45}{5{,}94}\right) = 0{,}200$$

(c) La probabilidad de que un bebé supere los 55 cm es:

$$p(X > 55) = p\left(Z > \frac{55-45}{5{,}94}\right) = 0{,}0461$$

Sea Y el número de bebés con una estatura mayor de 55 cm, $Y \sim \mathrm{B}(100, 4{,}61)$. Nos piden la media de esta distribución:

$$\mathrm{E}(Y) = 100 \cdot 0{,}0461 = 4{,}61$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. En un centro educativo, a pesar de los controles rigurosos, un 12 % de los ordenadores resulta infectado por algún tipo de virus informático.

(a) Si en un aula hay 10 ordenadores, calcular la probabilidad de que más de un ordenador tenga virus

(b) Si se quiere que la probabilidad de que haya, como máximo, dos ordenadores infectados sea menor que 0,7, ¿cuál tiene que ser el número mínimo de ordenadores en el aula?

(c) Si en todo el centro el número de ordenadores es 150, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos el 10 % de ellos tenga virus?

Solución:

(a) Sea X el número de ordenadores con virus, $X \sim \mathrm{B}(10, 0{,}12)$:

$$\mathrm{p}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{p}(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} (0{,}12)^0 \cdot 0{,}88^{10} = 0{,}3417$$

(b) Ahora $X \sim \mathrm{B}(n, 0{,}12)$ y

$$\mathrm{p}\,(X \leq 2) < 0{,}7\ ; \qquad \mathrm{p}(X = 0) + \mathrm{p}(X = 1) + \mathrm{p}(X = 2) < 0{,}7$$

Sustituyendo:

$$0{,}88^n + n \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 0{,}12^2 \cdot 0{,}88^{n-2} < 0{,}7$$

Dando valores vemos que el número más pequeño para el que se cumple esta condición es $n_{min} = 17$.

(c) En este caso $X \sim \mathrm{B}\,(150, 0{,}12)$. La probabilidad que debemos calcular es $\mathrm{p}(X \geq 15)$. Calcularemos esta probabilidad con ayuda de la distribución normal con las mismas media y desviación típica de la binomial, o sea con:

$$\mu = 150 \cdot 0{,}12 = 18\ ; \qquad \sigma = \sqrt{150 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88} = 3{,}98$$

La distribución normal que nos va a servir para calcularla probabilidad es $Y \sim \mathrm{N}(18; 3{,}98)$:

$$\mathrm{p}(X \geq 15) = \mathrm{p}(Y \geq 14{,}5) \simeq 0{,}8104$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6.

(a) ¿Cuál es el menor número de veces que hay que lanzar un dado para que la probabilidad de obtener al menos un cinco sea mayor del 90 %?

(b) ¿Y para que la probabilidad de obtener al menos 2 cincos sea mayor del 50 %?

Solución:

(a) Sea X el número de cincos que se obtienen en n lanzamientos, $X \sim \mathrm{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$. Sabemos que:

$$\mathrm{p}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{p}(X = 0) > 0{,}90\ ; \qquad \mathrm{p}(X = 0) < 0{,}10\ ; \qquad \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}10$$

El menor valor de n que cumple esta condición es $n_{min} = 13$.

(b) En este caso:

$$\mathrm{p}(X \geq 2) > 0{,}50\ ; \qquad 1 - \mathrm{p}(X \leq 1) > 0{,}50\ ; \qquad \mathrm{p}(X = 0) + \mathrm{p}(X = 1) < 0{,}50$$

Sustituyendo

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n + n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} < 0{,}50\ ; \qquad \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{n+5}{6} < 0{,}50$$

Dando valores a n vemos que el primer valor que lo cumple es $n_{min} = 10$.

♠♠♠♠