1 Radicales. Logaritmos.

Ejercicio 1. Simplificar:

$$\sqrt{9a^2+\sqrt{36a^2+12a+1}}$$

Solución:

$$\sqrt{9a^2+\sqrt{36a^2+12a+1}}=\sqrt{9a^2+\sqrt{(6a+1)^2}}=\sqrt{9a^2+6a+1}=\sqrt{(3a+1)^2}=3a+1$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Simplificar:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

Solución:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{15}-3-5-\sqrt{15}}{5-3}=-4$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular:

$$2\sqrt{12}-3\sqrt{75}+5\sqrt{27}-3\sqrt{48}+4\sqrt{3}+\sqrt{243}$$

Solución:

Sacando factores de los radicales:

$$\begin{aligned}2\sqrt{12}-3\sqrt{75}&+5\sqrt{27}-3\sqrt{48}+4\sqrt{3}+\sqrt{243}\\&=2\sqrt{4\cdot 3}-3\sqrt{25\cdot 3}+5\sqrt{9\cdot 3}-3\sqrt{16\cdot 3}+4\sqrt{3}+\sqrt{81\cdot 3}\\&=4\sqrt{3}-15\sqrt{3}+15\sqrt{3}-12\sqrt{3}+4\sqrt{3}+9\sqrt{3}\\&=5\sqrt{3}\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular

$$\sqrt{\frac{2}{15}}\cdot\sqrt{\frac{3}{14}}\cdot\sqrt{\frac{5}{48}}\cdot\sqrt{63}\cdot\sqrt{\frac{192}{9}}$$

Solución:

$$\sqrt{\frac{2}{15}}\cdot\sqrt{\frac{3}{14}}\cdot\sqrt{\frac{5}{48}}\cdot\sqrt{63}\cdot\sqrt{\frac{192}{9}}=\sqrt{\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 63\cdot 192}{15\cdot 14\cdot 48\cdot 9}}=\sqrt{4}=2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_{25} \dfrac{1}{5}$ (b) $\log_3 \dfrac{9}{\sqrt{3}}$

Solución:

(a) Pasando a logaritmos base 5:

$$\log_{25} \frac{1}{5} = \frac{\log_5 \frac{1}{5}}{\log_5 25} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

(b) Aplicando la propiedad del logaritmo del cociente:

$$\log_3 \frac{9}{\sqrt{3}} = \log_3 9 - \log_3 \sqrt{3} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_2 \left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{2}\right)$ (b) $\log_4 \dfrac{8}{\sqrt[5]{16}}$

Solución:

(a) Aplicando la propiedad del logaritmo del producto y de la raíz:

$$\log_2 \left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{2}\right) = \log_2 \sqrt[3]{16} + \log_2 \sqrt[4]{2} = \frac{1}{3}\log_2 16 + \frac{1}{4}\log_2 2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{12}$$

(b) Por las propiedades del logaritmo del cociente y de la raíz y cambiando a base 2:

$$\log_4 \frac{8}{\sqrt[5]{16}} = \log_4 8 - \log_4 \sqrt[5]{16} = \log_4 8 - \frac{1}{5}\log_4 16 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} - \frac{2}{5} = \frac{3}{2} - \frac{2}{5} = \frac{11}{10}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Sabiendo que $\log 2 = 0.3010$ calcular $\log \sqrt[3]{12.5}$

Solución:

Aplicando la propiedades de los logaritmos:

$$\log \sqrt[3]{12.5} = \frac{1}{3}\log 12.5 = \frac{1}{3}\log\frac{125}{10} = \frac{1}{3}(\log 125 - \log 10) = \frac{1}{3}\left(\log 5^3 - 1\right) = \frac{1}{3}(3\log 5 - 1) = \log 5 - \frac{1}{3}$$

Además:

$$\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$$

Entonces:

$$\log \sqrt[3]{12.5} = 0.6990 - 0.3333 = 0.3657$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Resolver la ecuación:

$$3^x + \frac{1}{3^{x-1}} = 4$$

Solución:

Puesto que:

$$3^{x-1} = \frac{3^x}{3}$$

podemos escribir la ecuación como:

$$3^x + \frac{3}{3^x} = 4$$

Quitando denominadores:

$$3^{2x} + 3 = 4 \cdot 3^x \ ; \qquad 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado con la incógnita 3^x y resulta:

$$3^x = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_3 3 = 1$$

$$3^x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_3 1 = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. Calcular el valor de a sabiendo que la ecuación:

$$\frac{\log(x^3 - a)}{\log(x-2)} - 2\log 5 = \log 40$$

tiene dos raíces, cuyo producto es -15.

Solución:

Agrupamos los términos constantes:

$$\frac{\log(x^3 - a)}{\log(x-2)} = \log 40 + 2\log 5 \ ; \qquad \frac{\log(x^3 - a)}{\log(x-2)} = \log(40 \cdot 25) \frac{\log(x^3 - a)}{\log(x-2)} = 3$$

Entonces:

$$\log(x^3 - a) = 3\log(x-2) \ ; \qquad \log(x^3 - a) = \log(x-2)^3 \ ; \qquad (x^3 - a) = (x-2)^3$$

Desarrollando el cubo del binomio y simplificando:

$$x^3 - a = x^3 - 6x^2 + 24x - 8$$

$$6x^2 - 24x + 8 - a = 0$$

Entonces:

$$\frac{8-a}{6} = -15 \quad \Longrightarrow \quad a = 98$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. Resolver la ecuación

$$8^{x-1} = 6^{3x}$$

Expresar la solución en función de $\ln 2$ y $\ln 3$.

Solución:

Aplicando logaritmos neperianos a ambos miembros de la igualdad:

$$\ln 8^{x-1} = \ln 6^{3x}$$

$$(x-1)\ln 8 = 3x \ln 6$$

$$(x-1)\ln 2^3 = 3x\ln(2 \cdot 3)$$

$$3(x-1)\ln 2 = 3x(\ln 2 + \ln 3)$$

$$(x-1)\ln 2 = x(\ln 2 + \ln 3)$$

$$x \ln 2 - \ln 2 = x\ln 2 + x \ln 3$$

$$-\ln 2 = x \ln 3$$

$$x = -\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

♠♠♠♠

2 Combinatoria. Inducción.

Ejercicio 1. Con las letras de la palabra REPASO:

(a) ¿Cuántas palabras de 6 letras diferentes pueden formarse en que las vocales y las consonantes se encuentren alternadas?

(b) ¿Cuántas en que las vocales estén separadas?

Solución:

(a) $2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$

(b) $C_{4,3} \cdot 3! \cdot 3! = 144$

♠♠♠♠

Ejercicio 2.

(a) ¿De cuántas maneras pueden repartirse 4 cartas de una baraja española de 40 cartas?

(b) ¿Cuántas están formadas por dos parejas? (por ejemplo dos sietes y dos cuatros)

(c) ¿Cuántas están formadas por 2 copas y 2 bastos?

(d) ¿En cuántas hay alguna carta de oros?

Solución:

(a) $C_{40,4} = 91390$

(b) $C_{10,2}C_{4,2}C_{4,2} = 1620$

(c) $C_{10,2}C_{10,2} = 2025$

(d) $C_{40,4} - C_{30,4} = 63985$

♠♠♠♠

Ejercicio 3.

(a) Desarrollar y simplificar

$$\left(x - \frac{2}{x}\right)^4$$

(b) A partir de lo anterior, determinar el término constante del desarrollo

$$\left(2x^2 + 1\right)\left(x - \frac{2}{x}\right)^4$$

Solución:

(a) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^4 = x^4 - 4 \cdot x^3 \cdot \frac{2}{x} + 6 \cdot x^2 \cdot \frac{4}{x^2} - 4 \cdot x \cdot \frac{8}{x^3} + \frac{16}{x^4} = x^4 - 8x^2 + 24 - \frac{32}{x^2} + \frac{16}{x^4}$

(b) El término constante será:

$$1 \cdot 24 + 2x^2 \cdot \left(\frac{-32}{x^2}\right) = -40$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Demostrar por inducción que $7^{8n+3}+2$, $n \in \mathbb{N}$, es divisible por 5.

Solución:

– La fórmula se cumple para $n=0$:

$$7^{8\cdot 0+3}+2 = 7^3+2 = 343+2 = \dot{5}$$

– Supongamos que se cumple para $n=k$:

$$7^{8k+3}+2=\dot{5}$$

y demostremos que, en ese caso, también se cumple para $n=k+1$. Demostremos que:

$$7^{8(k+1)+3}+2=\dot{5}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} 7^{8(k+1)+3}+2 &= 7^{8k+11}+2 \\ &= 7^{8k+3+8}+2 \\ &= 7^8\cdot 7^{8k+3}+2 \\ &= 7^8\cdot(\dot{5}-2)+2 \\ &= \dot{5}-2\cdot 7^8+2 \\ &= \dot{5}-2(\dot{5}+1)+2 \\ &= \dot{5}+2-2 \\ &= \dot{5} \end{aligned}$$

– Por el principio de inducción matemática, la fórmula se cumple para $n \in \mathbb{N}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Demostrar por inducción que, para $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$$

Solución:

– La expresión se cumple para $n=1$ pues, en ese caso, el primer miembro vale 1 y el segundo:

$$4-\frac{1+2}{2^{1-1}}=4-3=1$$

– Supongamos que se cumple para $n=k$:

$$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=4-\frac{k+2}{2^{k-1}}$$

y veamos que, en ese caso, también se cumple para $n=k+1$, es decir, demostremos que:

$$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k=4-\frac{k+3}{2^k}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} 1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k &= 4-\frac{k+3}{2^k} \\ = 4-\frac{k+2}{2^{k-1}}+(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k & \\ = 4-\frac{k+2}{2^{k-1}}+\frac{k+1}{2^k} & \\ = 4-\frac{2k+4-k-1}{2^k} & \\ = 4-\frac{k+3}{2^k} & \end{aligned}$$

– Por el principio de inducción matemática, la fórmula se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

3 Polinomios

Ejercicio 1. Resolver la ecuación $12x^3 + 49x^2 + 3x - 4 = 0$

Solución:

Obtenemos una primera solución $x = -4$ por tanteo y factorizamos el polinomio:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 12 & 49 & 3 & -4 \\ -4 & & -48 & -4 & 4 \\ \hline & 12 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

De forma que la ecuación se puede escribir factorizada:

$$(x + 4)(12x^2 + x - 1) = 0$$

Igualando a cero cada uno de los factores obtenemos las soluciones $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ y $x_3 = \frac{1}{4}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. En la siguiente ecuación:

$$x^2 - 12x + m = 0$$

calcular el valor de m para que una raíz sea triple que la otra.

Solución:

Sean r y $3r$ las dos soluciones. Puesto que su suma $4r$ debe ser igual a 12 las soluciones son $r = 3$ y $3r = 9$. Entonces m es el producto de las dos soluciones, es decir, $m = 27$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. La ecuación cuadrática $x^2 - 2kx + (k - 1) = 0$ tiene por raíces α y β tales que $\alpha^2 + \beta^2 = 4$. Sin resolver la ecuación, halle los posibles valores del número real k.

Solución:

Por las relaciones de Cardano:

$$\alpha + \beta = 2k$$
$$\alpha\beta = k - 1$$

Entonces, puesto que:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$$

Sustituyendo:

$$4k^2 = 4 + 2(k - 1)\ ; \qquad 4k^2 - 2k - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 1\ ; \qquad k = -\frac{1}{2}$$

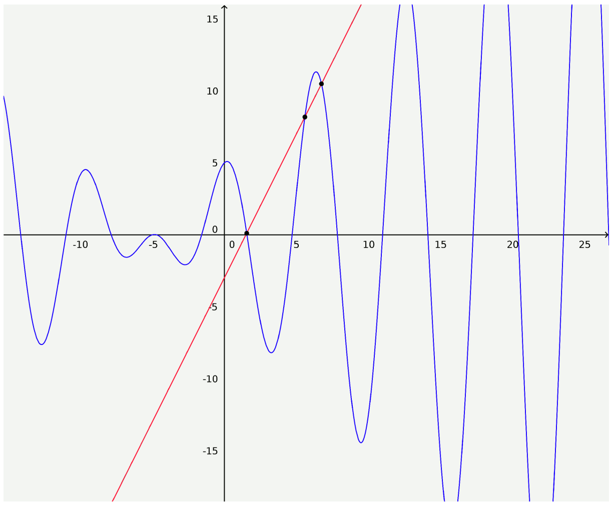
♠♠♠♠

Ejercicio 4. Con ayuda de la calculadora obtener todas las soluciones de la ecuación:

$$2x - 3 = (x + 5)\cos x$$

Dibujar aproximadamente el gráfico utilizado.

Solución:



Las soluciones son $x \simeq 1.55$, $x \simeq 5.60$ y $x \simeq 6.75$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 57 \\ x^2 - xy + y^2 = 43 \end{cases}$$

Solución:

Restando ambas ecuaciones se obtiene:

$$2xy = 14 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{7}{x}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x^2 + \frac{7x}{x} + \frac{49}{x^2} = 57$$

$$x^2 + 7 + \frac{49}{x^2} - 57 = 0$$

$$x^4 - 50x^2 + 49 = 0$$

$$x^2 = 1 \ ; \qquad x^2 = 49$$

Y de aquí $x = \pm 1$ y $x = \pm 7$.

Sustituimos en $y = \frac{7}{x}$ y obtenemos las soluciones $(1, 7)$, $(-1, -7)$, $(7, 1)$ y $(-7, -1)$. Se puede comprobar que todas ellas son solución también de la segunda ecuación.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Resolver la ecuación:

$$\sqrt{3x - 5} + 2 = \sqrt{5x + 1}$$

Solución:

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{3x-5}+2\right)^2=\left(\sqrt{5x+1}\right)$$
$$3x-5+4+4\sqrt{3x-5}=5x+1$$
$$4\sqrt{3x-5}=2x+2$$
$$2\sqrt{3x-5}=x+1$$
$$4(3x-5)=x^2+2x+1$$
$$x^2-02x+21=0$$

Las soluciones son $x=3$ y $x=7$. Ambas soluciones son válidas.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Resolver la inecuación:

$$\frac{x^2+x-6}{1-x^2}\geq 0$$

Solución:

Las raíces del numerador son -3 y 2 y las del denominador -1 y 1. El esquema de signos es el siguiente:

	0		$\nexists$		$\nexists$		0	
$-$		$+$		$-$		$+$		$-$
	-3		-1		1		2	

La solución es $x\in[-3,-1)\cup(1,2]$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. El polinomio $f(x)=4x^3+2ax-7a,\ a\in\mathbb{R}$, da un resto -10 cuando se divide por $(x-a)$. Calcular el valor de a.

Solución:

Según el teorema del resto, el valor numérico del polinomio para $x=a$ es igual a -10:

$$4a^3+2a^2-7a=-10 \quad\Longrightarrow\quad 4a^3+2a^2-7a+10=0$$

Una solución es $x=-2$. Factorizamos:

	4	2	−7	10
−2		8	12	−10
	4	−6	5	0

Y resulta la ecuación:

$$(a+2)(4a^2-6a+5)=0$$

La única solución es $a=-2$.

♠♠♠♠

4 Logaritmos. Combinatoria. Polinomios

Ejercicio 1. Use el método de inducción matemática para demostrar que $5^{2n} - 24n - 1$ es divisible por 576 para $n \in \mathbb{Z}^+$.

Solución:

- Para $n = 1$ se cumple:

$$5^2 - 24 \cdot 1 - 1 = 0 = \dot{576}$$

- Supongamos que se cumple para $n = k$:

$$5^{2k} - 24k - 1 = \dot{576}$$

  Debemos demostrar que, en ese caso, también se cumple para $n = k + 1$. Debemos demostrar:

$$5^{2(k+1)} - 24(k+1) - 1 = 5^{2k+2} - 24k - 25 = \dot{576}$$

  En efecto:

$$\begin{aligned} 5^{2k+2} - 24k - 25 &= 25 \cdot 5^{2k} - 24k - 25 && \text{por la hipótesis de inducción} \\ &= 25(\dot{576} + 24k + 1) - 24k - 25 \\ &= \dot{576} + 25 \cdot 24k - 24k \\ &= \dot{576} + 576k \\ &= \dot{576} \end{aligned}$$

- Por el principio de inducción matemática, la propiedad se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Cuando se divide $2x^3 + kx^2 + 6x + 32$ y $x^4 - 6x^2 - k^2x + 9$ entre $x + 1$, en ambos casos se obtiene el mismo resto. Halle los posibles valores de k.

Solución:

Si dan el mismo resto el valor numérico de ambos polinomios para $x = -1$ es el mismo:

$$-2 + k - 6 + 32 = 1 - 6 + k^2 + 9 \quad \Longrightarrow \quad k^2 - k - 20 = 0$$

Los valores posibles son $k = -4$ y $k = 5$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Resuelva la ecuación $8^{x-1} = 6^{3x}$. Exprese la respuesta en función de $\ln 2$ y $\ln 3$.

Solución:

Aplicando el logaritmo a los dos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} &\ln 8^{x-1} = \ln 6^{3x} \\ &(x-1)\ln 8 = 3x \ln 6 \\ &\cancel{3}(x-1)\ln 2 = \cancel{3}x(\ln 2 + \ln 3) \\ &-\ln 2 = x \ln 3 \\ &x = -\frac{\ln 2}{\ln 3} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Resolver la ecuación $\log_2 x - \log_2 5 = 2 + \log_2 3$.

Solución:

Podemos escribir:

$$\log_2 \frac{x}{5} = \log_2 4 + \log_2 3 \quad \Longrightarrow \quad \log_2 \frac{x}{5} = \log_2 12 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{5} = 12\ ; \qquad x = 60$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. De cuántas maneras pueden repartirse cinco cartas de una baraja de 40 cartas de forma que:

(a) Sean de números diferentes (no puede haber parejas)

(b) Haya exactamente un trío (tres cartas del mismo número y otras dos de números distintos)

Solución:

(a) Hay que elegir 5 números diferentes y después elegir cartas de estos números:

$$C_{10,5} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 258048$$

Otro modo de pensarlo sería la siguiente: la primera carta se puede elegir de 40 maneras, la segunda de 36, la tercera de 32, la cuarta de 28 y la quinta de 24. Como no importa el orden hay que dividir el producto de estos números por 5!:

$$\frac{40 \cdot 36 \cdot 32 \cdot 28 \cdot 24}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 258048$$

(b) El trío se puede elegir de $10 \cdot C_{4,3} = 10 \cdot 4 = 40$ maneras diferentes. Una vez elegido el trío las otras dos cartas pueden elegirse de $C_{9,2} \cdot 4 \cdot 4 = 576$ maneras. En total:

$$40 \cdot 576 = 23040$$

♠♠♠♠

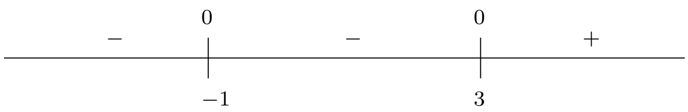
Ejercicio 6. Resolver la inecuación:

$$(x+1)^2(x-3)(x^2+1) \leq 0$$

Solución:

Las raíces son -1 (doble) y 3.

El esquema de signos es el siguiente:



La solución es $x \in (-\infty, 3]$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Halle el término constante en el desarrollo de $\left(4x^2 - \dfrac{3}{2x}\right)^{12}$.

Solución:

El término n-ésimo de este desarrollo tiene la forma:

$$\binom{12}{n} \left(4x^2\right)^n \left(-\frac{3}{2x}\right)^{12-n}$$

El término independiente cumple que

$$2n = 12 - n \quad \Longrightarrow \quad n = 4$$

El término que buscamos es:

$$\binom{12}{4} \cdot 4^4 \cdot \frac{3^8}{2^8} = 3247695$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 180 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{20} \end{cases}$$

Solución:

El sistema puede escribirse:

$$\begin{cases} xy(x+y) = 180 \\ \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{9}{20} \end{cases}$$

Despejando xy de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$xy = \frac{20}{9}(x+y) \ ; \qquad \frac{20}{9}(x+y)^2 = 180 \ ; \qquad (x+y)^2 = 81$$

De forma que tenemos dos posibilidades:

$$x + y = 9 \ ; \qquad xy = 20$$

y las soluciones son $(4, 5)$ y $(5, 4)$.

La otra posibilidad es:

$$x + y = -9 \ ; \qquad xy = -20$$

Las soluciones en este caso son $\left(\frac{-9+\sqrt{161}}{2}, \frac{-9-\sqrt{161}}{2}\right)$ y $\left(\frac{-9-\sqrt{161}}{2}, \frac{-9+\sqrt{161}}{2}\right)$

♠♠♠♠

5 Trigonometría

Ejercicio 1. Calcular el área de un pentágono regular de 40 cm de lado.

Solución:

La apotema es:

$$a = \frac{20}{\operatorname{tg} 36^{\circ}} \simeq 27.5$$

y el área, si p es el perímetro:

$$S = \frac{1}{2}\,pa \simeq 2750 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. En el triángulo $a = 157$ cm, $B = 65^{\circ}$, $C = 39^{\circ}$. calcular la altura correspondiente al lado a.

Solución:

Calculamos el ángulo A:

$$A = 180^{\circ} - 65^{\circ} - 39^{\circ} = 76^{\circ}$$

Entonces por el teorema del seno:

$$\frac{157}{\operatorname{sen} 76^{\circ}} = \frac{b}{\operatorname{sen} 65^{\circ}} \quad \Longrightarrow \quad b = 147 \text{ cm}$$

y la altura:

$$h_a = b \operatorname{sen} C \simeq 92.3 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Resolver la ecuación

$$3\cos 2x - 7\cos x - 2 = 0\ ; \qquad -180^{\circ} \leq x \leq 180^{\circ}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&3\cos 2x - 7\cos x - 2 = 0\\
&3(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - 7\cos x - 2 = 0\\
&3\cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) - 7\cos x - 2 = 0\\
&6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0\\
&\cos x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{12} = \frac{7 \pm 13}{12}
\end{aligned}$$

Tenemos dos soluciones para $\cos x$:

$$\begin{aligned}
\cos x = \frac{5}{3} \quad &\Longrightarrow \quad \text{no hay solución}\\
\cos x = -\frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad x = -120^{\circ},\ x = 120^{\circ}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Resolver la ecuación:

$$3\sec^2 x + 1 = 8 \operatorname{tg} x\ ; \qquad 0^{\circ} \leq x \leq 360^{\circ}$$

Solución:

$$3\sec^2 x + 1 = 8 \operatorname{tg} x$$
$$3(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 1 = 8 \operatorname{tg} x$$
$$3 \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x + 4 = 0$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6}$$

Tenemos dos soluciones para $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 63^{\circ},\ x = 243^{\circ}$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad x = 34^{\circ},\ x = 214^{\circ}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Demostrar la identidad:

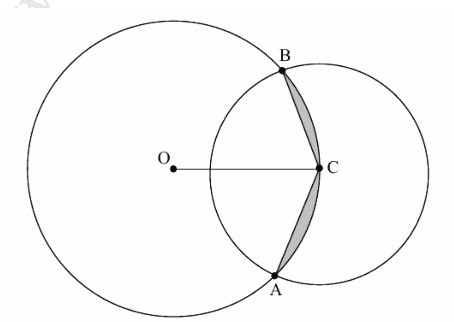
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) \\
&= \cos 2\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen}\alpha \\
&= (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\cos\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha \\
&= \cos^3\alpha - 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha \\
&= \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha \\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. La siguiente figura muestra dos círculos que se cortan, de radios 4 cm y 3 cm. El centro C del círculo pequeño está situado en la circunferencia del círculo grande. El punto O es el centro del círculo grande, y los dos círculos se cortan en los puntos A y B



Halle:

(a) $\widehat{BOC}$;

(b) el área de la región sombreada.

Solución:

(a) Llamemos $\varphi = \widehat{BOC}$:

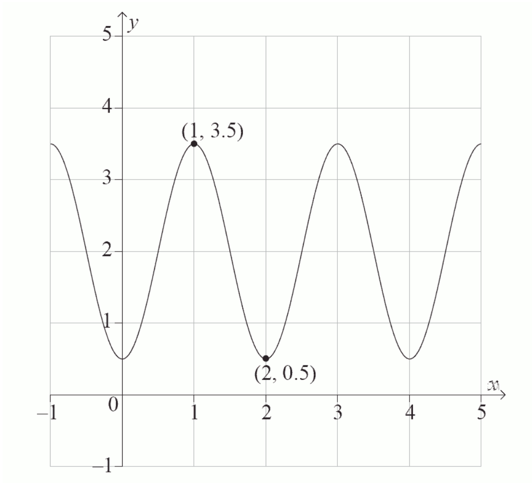
$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = \frac{1.5}{4} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 2\operatorname{arsen}\frac{1.5}{4} \simeq 0.769$$

(b) La región sombreada está formada por dos segmentos circulares de amplitud φ sobre un círculo de 4 cm de radio. El área será igual a

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\, r^2(\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \simeq 1.18$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. En la figura se muestra la curva $y = a \operatorname{sen}(b(x+c)) + d$, donde a, b, c y d son constantes positivas. La curva tiene un punto máximo en $(1; 3.5)$ y un mínimo en $(2; 0.5)$.



(a) Calcular los valores de a y d.

(b) Calcular los valores de b y c, si $c > 0$.

Solución:

(a) $a = \frac{3}{2}$, $d = 2$.

(b) El período de la función es igual a 2. Entonces:

$$\frac{2\pi}{b} = 2 \quad \Longrightarrow \quad b = \pi$$

Puesto que hay un máximo en $x = 1$:

$$\operatorname{sen}(b(x+c)) = \operatorname{sen}(\pi(1+c)) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \pi + \pi c = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad c = -\frac{1}{2} \pm 2k$$

Puesto que nos piden un valor positivo de c, damos a k el valor 1 y obtenemos $c = \frac{3}{2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. El triángulo ABC es tal que $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm y $B\hat{A}C = \frac{\pi}{9}$.

(a) Utilice el teorema del coseno para hallar los dos posibles valores de AC.

(b) Halle la diferencia entre las áreas de los dos posibles triángulos ABC.

Solución:

(a) Por el teorema del coseno, sea $b = AC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos B\hat{A}C$$

$$9 = 16 + b^2 - 8b\cos\frac{\pi}{9}$$

$$b^2 - 8b\cos\frac{\pi}{9} + 7 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $b \simeq 6.43$ y $b \simeq 1.09$.

(b) El área del triángulo se puede calcular mediante:

$$S = \frac{1}{2}\,AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen} B\hat{A}C = \frac{1}{2}\,4 \cdot b \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{9} = 2b\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}$$

Sustituyendo los valores de b que hemos obtenido resultan los valores del área 4.40 y 0.74. Su diferencia es aproximando a tres cifras significativas 3.65.

♠♠♠♠

6 Números complejos

Ejercicio 1. Calcular el número real k de forma que

$$\frac{(3-2i)^2}{1+ki}$$

sea un número real.

Solución:

Operando:

$$\frac{(3-2i)^2}{1+ki} = \frac{(5-12i)(1-ki)}{1+k^2} = \frac{5-12k}{1+k^2} + \frac{-5k-12}{1+k^2}i$$

La parte imaginaria debe ser cero de modo que:

$$-5k-12=0\ ; \qquad k=-\frac{12}{5}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular las raíces cuadradas del número complejo $20-21i$ sin utilizar la calculadora.

Solución:

Sea $\sqrt{20-21i}=x+yi$. Se cumple que

$$\begin{aligned} x^2-y^2 &= 20 \\ 2xy &= -21 \end{aligned}$$

Despejando y en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$y=\frac{-21}{2x} \quad\Longrightarrow\quad x^2-\frac{441}{4x^2}=20 \quad\Longrightarrow\quad 4x^4-80x^2-441=0$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada:

$$x^2=\frac{80\pm\sqrt{6400+16\cdot 441}}{8}=\frac{80\pm 116}{8}$$

La solución negativa no es válida. Así, una solución es

$$x=\sqrt{\frac{196}{8}}=\frac{14}{2\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}\ ; \qquad y=-\frac{21}{2x}=-\frac{3}{\sqrt{2}}$$

y la solución es:

$$z_1=\frac{7}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i$$

La otra raíz es opuesta de la primera:

$$z_2=-\frac{7}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Escribe los siguientes números complejos en forma polar:

(a) -4 $\quad$ (b) $2i$ $\quad$ (c) $-\frac{3}{4}i$ $\quad$ (d) $-2+2\sqrt{3}i$

Solución:

(a) $-4=4_{180^\circ}$ $\quad$ (b) $2i=2_{90^\circ}$ $\quad$ (c) $-\frac{3}{4}i=\left(\frac{3}{4}\right)_{270^\circ}$ $\quad$ (d) $-2+2\sqrt{3}i=4_{120^\circ}$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Escribe en la forma binómica los siguientes números complejos:

(a) $1_{\pi/2}$ (b) $5_{270^{\text{o}}}$ (c) $1_{150^{\text{o}}}$ (d) $4_{300^{\text{o}}}$

Solución:

(a) $1_{\pi/2} = i$
(b) $5_{270^{\text{o}}} = -5i$
(c) $1_{150^{\text{o}}} = \cos 150^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 150^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i$
(d) $4_{300^{\text{o}}} = 4(\cos 300^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 300^{\text{o}}) = 4\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - 2\sqrt{3}i$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular en forma binómica las raíces sextas de -1.

Solución:

En forma polar $-1 = 1_{180^{\text{o}}}$. Sus raíces sextas son:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1_{30^{\text{o}}} = 1\,(\cos 30^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 30^{\text{o}}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\\
z_2 &= 1_{90^{\text{o}}} = i\\
z_3 &= 1_{150^{\text{o}}} = 1\,(\cos 150^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 150^{\text{o}}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\\
z_4 &= 1_{210^{\text{o}}} = 1\,(\cos 210^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 210^{\text{o}}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\\
z_1 &= 1_{270^{\text{o}}} = -i\\
z_1 &= 1_{330^{\text{o}}} = 1\,(\cos 330^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 330^{\text{o}}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. El punto $A(3,5)$ es un vértice de un triángulo equilátero centrado en el origen. Calcular las coordenadas de los otros dos vértices B y C.

Solución:

Basta girar el afijo del complejo $z = 3 + 5i$ alrededor del origen ángulos de 120^{o} y 240^{o}:

$$\begin{aligned}
(3+5i)\,(\cos 120^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 120^{\text{o}}) &= (3+5i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
(3+5i)\,(\cos 240^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 240^{\text{o}}) &= (3+5i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Haciendo las operaciones se obtienen los puntos:

$$B\left(-\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\right)\ ; \qquad C\left(-\frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\,,\,-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\right)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Sabiendo que z es el número complejo $x + iy$ y que $|z| + z = 6 - 2i$, calcular el valor de x y el valor de y.

Solución:

Sustituyendo $z = x + iy$:

$$\sqrt{x^2+y^2} + x + iy = 6 - 2i$$

Igualamos partes imaginarias y obtenemos $y = -2$. Para la parte real tenemos que:

$$\sqrt{x^2+4} + x = 6$$
$$x = \frac{8}{3}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. A partir de la fórmula de Moivre demostrar que:

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5 \operatorname{tg}\varphi - 10 \operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{tg}^5\varphi}{1 - 10 \operatorname{tg}^2\varphi + 5 \operatorname{tg}^4\varphi}$$

Demostrar que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

Solución:

De acuerdo con la fórmula de Moivre:

$$\begin{aligned}\cos 5\varphi + i \operatorname{sen} 5\varphi &= (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^5 \\ &= \cos^5\varphi + 5\cos^4\varphi \cdot i \operatorname{sen}\varphi + 10\cos^3\varphi \cdot i^2 \operatorname{sen}^2\varphi + 10\cos^2\varphi \cdot i^3 \operatorname{sen}^3\varphi + 5\cos\varphi \cdot i^4 \operatorname{sen}^4\varphi + i^5 \operatorname{sen}^5\varphi \\ &= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + 5\cos^4\varphi \operatorname{sen}\varphi + i(5\cos^4\varphi \operatorname{sen}\varphi - 10\cos^2\varphi \operatorname{sen}^3\varphi + \operatorname{sen}^3\varphi)\end{aligned}$$

Por consiguiente, igualando partes reales e imaginarias:

$$\begin{aligned}\cos 5\varphi &= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + 5\cos^4\varphi \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen} 5\varphi &= 5\cos^4\varphi \operatorname{sen}\varphi - 10\cos^2\varphi \operatorname{sen}^3\varphi + \operatorname{sen}^3\varphi\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 5\varphi &= \frac{\operatorname{sen} 5\varphi}{\cos 5\varphi} \\ &= \frac{5\cos^4\varphi \operatorname{sen}\varphi - 10\cos^2\varphi \operatorname{sen}^3\varphi + \operatorname{sen}^3\varphi}{\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + 5\cos^4\varphi \operatorname{sen}\varphi}\end{aligned}$$

Y, dividiendo numerador y denominador por $\cos^5\varphi$:

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5 \operatorname{tg}\varphi - 10 \operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{tg}^5\varphi}{1 - 10 \operatorname{tg}^2\varphi + 5 \operatorname{tg}^4\varphi}$$

Para $\varphi = \frac{\pi}{5}$ resulta:

$$0 = 5 \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} - 10 \operatorname{tg}^3\frac{\pi}{5} + \operatorname{tg}^5\frac{\pi}{5}$$

Tenemos entonces que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ es una de las raíces de la ecuación:

$$x^5 - 10x^3 + 5x = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $x = 0$, $x = \pm\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ y $x = \pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. La tangente de $\frac{\pi}{5}$ tiene que ser uno de estos cinco números. Podemos descartar 0 y los dos valores negativos porque el ángulo pertenece al primer cuadrante. Nos quedan dos posibilidades $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ y $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Como el ángulo $\frac{\pi}{5}$ es menor de 45º su tangente debe ser menor que 1. Por tanto

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

♠♠♠♠

7 Geometría analítica

Ejercicio 1. Se considera la recta $r:\ 3x+4y+1=0$ y el punto P de esta recta cuya abscisa es igual a 1. Calcular los puntos de la recta que se encuentran a una distancia de P igual a 5 unidades.

Solución:

El punto de la recta de abscisa 1 es $C(1,-1)$. La circunferencia con centro en este punto y radio 5 es:

$$(x-1)^2+(y+1)^2=25$$

Los puntos que buscamos son las intersecciones de la recta y la circunferencia, es decir, las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 3x+4y+1=0 \\ (x-1)^2+(y+1)^2=25 \end{cases}$$

Por sustitución, despejamos y en la ecuación de la recta:

$$y=\frac{-3x-1}{4}$$

Sustituyendo:

$$x^2-2x+1+\frac{(-3x-1)^2}{16}+2\,\frac{-3x-1}{4}+1-25=0$$
$$x^2-2x+1+\frac{9x^2+6x+1}{16}+\frac{-6x-2}{4}-24=0$$
$$16x^2-32x+16+9x^2+6x+1-24x-8-384=0$$
$$25x^2-50x-375=0$$
$$x^2-2x-15=0$$

Resolviendo la ecuación se obtiene $x_1=-3$ y $x_2=5$. Los puntos son $(-3,2)$ y $(5,-4)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular el área del triángulo de vértices $A(-2,3)$, $B(4,-3)$ y $C(1,5)$.

Solución:

- Tomamos como base el lado AB:

  $$AB=\sqrt{(4+2)^2+(-3-3)^2}=6\sqrt{2}$$

- Para calcular la altura, calculamos primero la ecuación de la recta AB:

  $$y-3=-1(x+2)\ ; \qquad x+y-1=0$$

  La altura es la distancia desde C a esta recta:

  $$h=\frac{1+5-1}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

- El área del triángulo es igual a:

  $$S=\frac{1}{2}\,6\sqrt{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{2}}=15$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular el punto de la recta $x+2y-3=0$ que se encuentra a la misma distancia de los puntos $P(3,-2)$ y $Q(4,4)$.

Solución:

Si el punto que buscamos está a la misma distancia de los dos puntos se encuentra en su mediatriz:

$$(x-3)^2+(y+2)^2=(x-4)^2+(y-4)^2$$
$$-6x+9+4y+4=-8x+16-8y+16$$
$$2x+12y-19=0$$

Puesto que también se encuentra en la recta $x+2y-3=0$, es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x+12y-19=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases}$$

resolvemos por sustitución:

$$2(3-2y)+12y-19=0 \ ; \qquad 8y-13=0 \ ; \qquad y=\frac{13}{8}$$

El punto que buscamos es $\left(-\frac{1}{4}, \frac{13}{8}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(-3,-2)$ y forman con la recta
$2x-3y+1=0$ un ángulo cuya tangente es igual a 2.

Solución:

Sea m la pendiente de la rectas que buscamos. Puesto que la recta qu3 nos dan tiene pendiente $\frac{2}{3}$:

$$\left|\frac{m-\frac{2}{3}}{1+\frac{2m}{3}}\right|=2 \ ; \qquad \left|\frac{3m-2}{3+2m}\right|=2$$

Tenemos dos soluciones:

$$\frac{3m-2}{3+2m}=2 \quad \Longrightarrow \quad m=-8$$

$$\frac{3m-2}{3+2m}=-2 \quad \Longrightarrow \quad m=-\frac{4}{7}$$

Las rectas que nos piden son:

$$y+2=-8\ (x+3)$$

$$y+2=-\frac{4}{7}\ (x+3)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Determinar el punto simétrico del $(2,3)$ respecto a la recta $x+2y=3$.

Solución:

– Calculamos la perpendicular a la recta dada por el punto:

$$y-3=2(x-2) \ ; \qquad 2x-y-1=0$$

– La intersección de las dos rectas es el punto:

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y-1=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x+4x-2=3 \quad \Longrightarrow \quad x=1$$

El punto de intersección es $P(1,1)$.

– El punto obtenido es punto medio entre el punto dado y su simétrico:

$$1=\frac{2+x'}{2} \ ; \qquad 1=\frac{3+y'}{2}$$

El simétrico es $(0,-1)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Dada la recta $12x - 5y + 1 = 0$ calcular las paralelas que distan de ellas 5 unidades.

Solución:

Una paralela a esta recta tiene por ecuación:

$$12x - 5y + D = 0$$

La distancia entre las rectas debe ser igual a 5:

$$\frac{|D-1|}{\sqrt{144+25}} = 5\ ; \qquad \frac{|D-1|}{13} = 5\ ; \qquad D - 1 = \pm 65$$

Las soluciones son $D = 66$ y $D = -64$. La es ecuaciones de las paralelas son $12x - 5y + 66 = 0$ y $12x - 5y - 64 = 0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular el circuncentro del triángulo de vértices $A(-1,-1)$, $B(6,2)$ y $C(4,-3)$.

Solución:

- Calculamos la mediatriz de AB:

$$\begin{aligned}&(x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-6)^2 + (y-2)^2\\&2x + 1 + 2y + 1 = -12x + 36 - 4y + 4\\&14x + 6y - 38 = 0\\&7x + 3y - 19 = 0\end{aligned}$$

- La mediatriz de BC:

$$\begin{aligned}&(x-6)^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + (y+3)^2\\&-12x + 36 - 4y + 4 = -8x + 16 + 6y + 9\\&4x + 10y - 15 = 0\end{aligned}$$

- El circuncentro es el punto de intersección de las dos mediatrices:

$$\begin{cases}7x + 3y - 19 = 0\\4x + 10y - 15 = 0\end{cases}$$

  Resolviendo el sistema se obtiene el punto $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Dados los puntos $A(1,3)$ y $B(5,-2)$. Hallar un punto P del eje de abscisas tal que el triángulo APB sea rectángulo en P.

Solución:

Sea $P(x,0)$. La pendiente de AP y de BP son:

$$m_{AP} = \frac{-3}{x-1}\ ; \qquad m_{BP} = \frac{2}{x-5}$$

Puesto que las rectas son perpendiculares:

$$\frac{2}{x-5} = \frac{x-1}{3} \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 6x - 1 = 0$$

Resolviendo, se obtienen dos soluciones $x_1 = 3 + \sqrt{10}$ y $x_2 = 3 - \sqrt{10}$.

♠♠♠♠

8 Números complejos. Geometría.

Ejercicio 1. Calcular en forma binómica las raíces sextas de -1.

Solución:

En forma polar:

$$\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180^o}}$$

Las raíces son:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1_{30^o} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
z_2 &= 1_{90^o} = i \\
z_3 &= 1_{150^o} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
z_4 &= 1_{210^o} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\
z_5 &= 1_{270^o} = -i \\
z_6 &= 1_{300^o} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular en forma binómica $(1-2i)^5$.

Solución:

Aplicando la fórmula de Newton:

$$\begin{aligned}
(1-2i)^5 &= 1^5 - 5\cdot 1^4\cdot 2i + 10\cdot 1^3\cdot 4i^2 - 10\cdot 1^2\cdot 8i^3 + 5\cdot 1\cdot 16i^4 - 32i^5 \\
&= 1 - 10i - 40 + 80i + 80 - 32i \\
&= 41 + 38i
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Hallar dos números complejos, cuya suma sea $1+4i$ y cuyo cociente sea i.

Solución:

Sean z y w los complejos que buscamos. Entonces:

$$\begin{cases} w + z = 1 + 4i \\ \frac{w}{z} = i \end{cases} \quad ; \qquad w = iz\ ; \qquad iz + z = 1 + 4i \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{1+4i}{1+i}$$

Operando:

$$z = \frac{1+4i}{1+i} = \frac{(1+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1 - i + 4i - 4i^2}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$$

y, sustituyendo:

$$w = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Las raíces cúbicas de z son z_1, z_2 y z_3. Sabiendo que $z_1 = 3 - 2i$, calcular el área del triángulo que tiene como vértices z_1, z_2 y z_3.

Solución:

La raíz tiene módulo $\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Se trata de un triángulo equilátero cuya área se puede considerar como suma de tres triángulos isósceles en los que los lados iguales miden $\sqrt{13}$ y el ángulo desigual es de 120^{o}:

$$S = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13}\sqrt{13}\,\text{sen}\,120^{\text{o}} = \frac{3 \cdot 13 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular los puntos de la recta $3x - 11y - 6 = 0$ que se encuentra a una distancia $\sqrt{65}$ del punto $P(9, -4)$.

Solución:

Son los puntos de intersección de la recta con la circunferencia de centro $P(9, -4)$ y radio $\sqrt{65}$:

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+4)^2 = 65 \\ 3x - 11y - 6 = 0 \end{cases}$$

Las soluciones son los puntos $A(2, 0)$ y $B(13, 3)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular el circuncentro del triángulo de vértices $A(1, -4)$, $B(4, 2)$ y $C(11, -9)$.

Solución:

Calculamos la mediatriz de AB:

$$\begin{aligned} &(x-1)^2 + (y+4)^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 \\ &-2x + 1 + 8y + 16 = -8x + 16 - 4y + 4 \\ &6x + 12y - 3 = 0 \end{aligned}$$

y la mediatriz de BC:

$$\begin{aligned} &(x-11)^2 + (y+9)^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 \\ &-22x + 121 + 18y + 81 = -8x + 16 - 4y + 4 \\ &14x - 22y - 182 = 0 \\ &7x - 11y - 91 = 0 \end{aligned}$$

La intersección de las dos mediatrices es el punto $\left(\frac{15}{2}, -\frac{7}{2}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $A(2, -3)$ y forman con la recta $x - 2y + 5 = 0$ un ángulo cuya tangente es igual a 2.

Solución:

La recta que nos dan tiene pendiente $\frac{1}{2}$. La pendiente de la recta que nos piden cumple que:

$$\left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\,m}\right| = 2 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{2m-1}{2+m}\right| = 2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2m - 1 = 2(2+m) \\ 2m - 1 = -2(2+m) \end{cases}$$

La primera igualdad solo puede cumplirse si la recta es vertical ($m = \infty$). La segunda nos da $m = -\frac{3}{4}$. La recta que nos piden es:

$$y + 3 = -\frac{3}{4}\,(x - 2)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Los puntos $A(12,3)$ y $B(4,2)$ son dos vértices de un triángulo cuyo ortocentro es el punto $H(8,0)$. Calcular el tercer vértice C.

Solución:

La altura h_A pasa por A y por el ortocentro. Su pendiente es $m = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$. El lado BC pasa por $B(4,2)$ y tiene pendiente $-\frac{4}{3}$. Su ecuación es:

$$y - 2 = -\frac{4}{3}(x-4) \; ; \qquad 4x + 3y - 22 = 0$$

La altura h_B pasa por B y por el ortocentro. Su pendiente es $m = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$. El lado AC pasa por $A(12,3)$ y tiene pendiente 2. Su ecuación es:

$$y - 3 = 2(x-12) \; ; \qquad 2x - y - 21 = 0$$

El vértice C es la intersección de las dos rectas. Es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 22 = 0 \\ 2x - y - 21 = 0 \end{cases}$$

La solución es el punto $C\left(\frac{17}{2}, -4\right)$.

♠♠♠♠