

Matemáticas 4º ESO. Exámenes

Curso 2020-2021

www.five-fingers.es

1. Logaritmos

Ejercicio 1. Calcular

(a) 3^{-2}

(b) $8^{\frac{1}{3}}$

(c) $243^{\frac{3}{5}}$

(d) $8^{-\frac{2}{3}}$

Solución:

(a) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

(b) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

(c) $243^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{243^3} = 3^3 = 27$

(d) $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$



Ejercicio 2. Calcular

(a) $\left(6 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

(b) $\left(1 + \frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

(c) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(d) $\left(2 + \frac{7}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$

Solución:

(a) $\left(6 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

(b) $\left(1 + \frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + \frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

(c) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

(d) $\left(2 + \frac{7}{81}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{169}{81}} = \frac{13}{9}$



Ejercicio 3. Racionalizar los denominadores:

(a) $\frac{3}{\sqrt{7}}$

(b) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

(c) $\frac{3}{1 + \sqrt{7}}$

(d) $\frac{1}{\sqrt{3} - 1}$

Solución:

(a) $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

(b) $\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

(c) $\frac{3}{1 + \sqrt{7}} = \frac{3(1 - \sqrt{7})}{(1 + \sqrt{7})(1 - \sqrt{7})} = \frac{3(1 - \sqrt{7})}{1 - 7} = -\frac{1 - \sqrt{7}}{2}$

(d) $\frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$



Ejercicio 4. Simplificar:

$$3\sqrt{8} + 5\sqrt{72} + 8\sqrt{50} - 4\sqrt{18} + 4\sqrt{2}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{8} + 5\sqrt{72} + 8\sqrt{50} - 4\sqrt{18} + 4\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{4 \cdot 2} + 5\sqrt{36 \cdot 2} + 8\sqrt{25 \cdot 2} - 4\sqrt{9 \cdot 2} + 4\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{2} + 30\sqrt{2} + 40 \cdot \sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \\ &= 68\sqrt{2} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Simplificar:

$$\sqrt[3]{13 + 2\sqrt{11}} \cdot \sqrt[3]{13 - 2\sqrt{11}}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{13 + 2\sqrt{11}} \cdot \sqrt[3]{13 - 2\sqrt{11}} &= \sqrt[3]{(13 + 2\sqrt{11})(13 - 2\sqrt{11})} \\ &= \sqrt[3]{169 - 44} \\ &= \sqrt[3]{125} \\ &= 5 \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_2 16$

(b) $\log_5 125$

(c) $\log_5 1$

(d) $\log_3 \frac{1}{3}$

Solución:

(a) $\log_2 16 = 4$

(b) $\log_5 125 = 3$

(c) $\log_5 1 = 0$

(d) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_3 \frac{1}{27}$

(b) $\log_2 \frac{1}{8}$

(c) $\log_5(-5)$

(d) $\log_5 \sqrt{5}$

Solución:

(a) $\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 1 - \log_3 27 = 0 - 3 = -3$

(b) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 1 - \log_2 8 = 0 - 3 = -3$

(c) $\log_5(-5)$ no existe

(d) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log_5 5 = \frac{1}{2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular los siguientes logaritmos:

$$(a) \log_9 \sqrt{3} \quad (b) \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (c) \log_9 \sqrt[3]{81} \quad (d) \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8}$$

Solución:

$$(a) \log_9 \sqrt{3} = \frac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_3 9} = \frac{\frac{1}{2} \log_3 3}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$(b) \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_5 1 - \log_5 \sqrt{5} = 0 - \frac{1}{2} \log_5 5 = -\frac{1}{2}$$

$$(c) \log_9 \sqrt[3]{81} = \frac{1}{3} \log_8 81 = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

$$(d) \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8} = \frac{\log_2 \sqrt{8}}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \log_2 8}{-1} = -\frac{3}{2}$$



Ejercicio 9. Sabiendo que $\log 2 = 0,3010$ calcular $\log 0,125$.

Solución:

$$\log 0,125 = \log \frac{125}{1000} = \log \frac{1}{8} = \log 1 - \log 8 = 0 - \log 2^3 = -3 \log 2 = -3 \cdot 0,3010 = -0,9030$$



Ejercicio 10. Despejar x en

$$(a) 3^{2x} = 5 \quad (b) \log_2 x = 4$$

Solución:

$$(a) 3^{2x} = 5; \quad 2x = \log_3 5; \quad x = \frac{\log_3 5}{2}$$

$$(b) \log_2 x = 4; \quad x = 2^4 = 16$$



2. Progresiones. Polinomios (1)

Ejercicio 1. En una progresión aritmética $a_{40} = 59$ y $a_{27} = 33$. calcular la suma de los 50 primeros términos.

Solución:

Puesto que

$$a_{40} = a_{27} + d(40 - 27); \quad 59 = 33 + 13d; \quad 26 = 13d; \quad d = 2$$

Entonces:

$$a_1 = a_{27} + 2(1 - 27); \quad a_1 = 33 - 2 \cdot 26 = 33 - 52 = -19$$

$$a_{50} = a_{27} + 2(50 - 27); \quad a_{50} = 33 + 2 \cdot 23 = 33 + 46 = 79$$

La suma de los 50 primeros términos es:

$$S_{50} = \frac{(-19 + 79) \cdot 50}{2} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500$$



Ejercicio 2. Hallar la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada de razón $\frac{2}{3}$ cuyo primer término vale 6.

Solución:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{6}{1-\frac{2}{3}} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 18$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

$$4(x^3 - x + 3) - 2(x^2 + 3x) \cdot (-2x + 5)$$

Solución:

$$\begin{aligned} 4(x^3 - x + 3) - 2(x^2 + 3x) \cdot (-2x + 5) &= 4x^3 - 4x + 12 - 2(-2x^3 + 5x^2 - 6x^2 + 15x) \\ &= 4x^3 - 4x + 12 - 2(-2x^3 - x^2 + 15x) \\ &= 4x^3 - 4x + 12 + 4x^3 + 2x^2 - 30x \\ &= 8x^3 + 2x^2 - 34x + 12 \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

(a) $(3x^3 + 2x^2 + x - 5) : (3x^2 + 2)$

(b) $(3x^4 - 2x^2 - x + 4) : (x + 2)$

Solución:

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 + x - 5 \\ -3x^3 - 2x \\ \hline 2x^2 - x - 5 \\ - 2x^2 - \frac{4}{3} \\ \hline -x - \frac{19}{3} \end{array}$$

www.five-fingers.es

El cociente de la división es $x + \frac{2}{3}$ y el resto $-x - \frac{19}{3}$

La segunda división puede hacerse por la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & & -6 & 12 & -20 & 42 \\ \hline & 3 & -6 & 10 & -21 & 46 \end{array}$$

El cociente es $3x^3 - 6x^2 + 10x - 21$ y el resto es 46.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcula el valor de k para que el polinomio:

(a) $P(x) = x^3 + x^2 - 2x + k$ sea divisible por $x - 2$.

(b) $P(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 4$ tenga de resto 6 al dividir por $x + 2$.

Solución:

(a) Si el polinomio es divisible por $x - 2$, 2 es una raíz del polinomio y su valor numérico para $x = 2$ es cero:

$$2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + k = 0 \implies 8 + 4 - 4 + k = 0 \implies k = -8$$

(b) Por el teorema del resto, el valor numérico para $x = -2$ debe ser 6:

$$(-2)^3 - 2(-2)^2 + k(-2) + 4 = 6 \implies -8 - 8 - 2k + 4 = 6 \implies k = -9$$



Ejercicio 6. Factoriza los siguientes polinomios y calcula sus raíces:

(a) $2x^3 + 5x^2 - x - 6$

(b) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

Solución:

(a) Buscamos una raíz entera entre los divisores de 6:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & -1 & -6 \\ 1 & & 2 & 7 & 6 \\ \hline & 2 & 7 & 6 & 0 \end{array}$$

y tenemos una primera factorización:

$$2x^3 + 5x^2 - x - 6 = (x - 1)(2x^2 + 7x + 6)$$

Las raíces del polinomio de segundo grado son:

$$2x^2 + 7x + 6 = 0 \implies x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -2 \end{cases}$$

de modo que:

$$2x^3 + 5x^2 - x - 6 = (x - 1)(2x^2 + 7x + 6) = (x - 1)2(x - \frac{3}{2})(x + 2) = (x - 1)(2x - 3)(x + 2)$$

Las raíces de este polinomio son 1, $\frac{3}{2}$ y -2 .

(b) Como en el caso anterior buscamos una raíz entera entre los divisores de 2:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

y obtenemos:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x^3 - 2x^2 + x - 2)$$

Buscamos una raíz del polinomio de tercer grado:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

y tenemos la factorización:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x^3 - 2x^2 + x - 2) = (x - 1)(x - 2)(x^2 + 1)$$

y no se puede seguir factorizando porque el polinomio $x^2 + 1$ es primo.

Las raíces de este segundo polinomio son 1 y 2.



Ejercicio 7. Resolver la ecuación:

$$\frac{x + 1}{2} = x - \frac{2x + 3}{4}$$

Solución:

Es una ecuación de primer grado. Quitamos denominadores y resolvemos:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{2} &= x - \frac{2x+3}{4} \\ 2(x+1) &= 4x - (2x+3) \\ 2x+2 &= 2x+3 \\ 0x &= 1\end{aligned}$$

La ecuación no tiene solución.



Ejercicio 8. Resolver la ecuación:

$$\frac{x(x-3)}{2} - \frac{(3x-2)^2}{8} = 1 - \frac{x(x+2)}{4}$$

Solución:

Es una ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned}\frac{x(x-3)}{2} - \frac{(3x-2)^2}{8} &= 1 - \frac{x(x+2)}{4} \\ 4x(x-3) - (3x-2)^2 &= 8 - 2x(x+2) \\ 4x^2 - 12x - 9x^2 + 12x - 4 &= 8 - 2x^2 - 4x \\ -5x^2 - 4 &= 8 - 2x^2 - 4x \\ -3x^2 + 4x - 12 &= 0 \\ 3x^2 - 4x + 12 &= 0\end{aligned}$$

Esta ecuación tampoco tiene solución porque su discriminante es menor que cero.



3. Progresiones. Polinomios (2)

Ejercicio 1. Efectuar la siguiente división de polinomios:

$$20x^4 - 18x^3 + 35x^2 - 12x - 7 : 4x^2 - 2x + 7$$

Solución:

$$\begin{array}{r} 20x^4 - 18x^3 + 35x^2 - 12x - 7 \\ - 20x^4 + 10x^3 - 35x^2 \\ \hline - 8x^3 + 0x^2 - 12x \\ 8x^3 - 4x^2 + 14x \\ \hline - 4x^2 + 2x - 7 \\ 4x^2 - 2x + 7 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 4x^2 - 2x + 7 \\ 5x^2 - 2x - 1 \end{array} \right.$$



Ejercicio 2. Factorizar el polinomio $6x^3 + 11x^2 - 24x - 9$

Solución:

Buscamos una raíz entre los divisores de 9:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 11 & -24 & -9 \\ -3 & & -18 & 21 & 9 \\ \hline & 6 & -7 & -3 & 0 \end{array}$$

De esta forma tenemos una primera factorización:

$$6x^3 + 11x^2 - 24x - 9 = (x + 3)(6x^2 - 7x - 3)$$

Las otras raíces las podemos calcular por la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{12} = \frac{7 \pm 11}{12}$$

Así obtenemos dos nuevas raíces $x = \frac{3}{2}$ y $x = -\frac{1}{3}$.

Completamos la factorización:

$$\begin{aligned} 6x^3 + 11x^2 - 24x - 9 &= (x + 3)(6x^2 - 7x - 3) \\ &= (x + 3)6 \left(x - \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{1}{3}\right) \\ &= (x + 3)(2x - 3)(3x + 1) \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Factorizar los polinomios de segundo grado

(a) $15x^2 - 13x + 2$

(b) $4x^2 - 1$

Solución:

(a) Las raíces del polinomio son:

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{30} = \frac{13 \pm 7}{30}; \quad x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{5}$$

La factorización es:

$$15x^2 - 13x + 2 = 15 \left(x - \frac{2}{3}\right) \left(x - \frac{1}{5}\right) = (3x - 2)(5x - 1)$$

(b) Es una diferencia de cuadrados:

$$4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Determinar m con la condición de que el polinomio $2x^4 + 5x^3 + mx^2 + 4$, sea divisible por $x + 3$.

Solución:

Si el polinomio es divisible por $x + 3$, su valor numérico para $x = -3$ debe ser cero:

$$2(-3)^4 + 5(-3)^3 + m(-3)^2 + 4 = 0; \quad 162 - 135 + 9m + 4 = 0; \quad m = -\frac{31}{9}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Encontrar el valor de a sabiendo que al dividir $x^4 - 3x^3 + ax^2 - 4x + 7$ por $x + 2$, da de resto 7.

Solución:

El valor numérico del polinomio para $x = -2$ debe ser 7:

$$(-2)^4 - 3(-2)^3 + (-2)^2 a - 4(-2) + 7 = 7; \quad 16 + 24 + 4a + 8 = 0; \quad a = -12$$



Ejercicio 6. Resolver la ecuación:

$$\frac{4(x+1)}{8} - \frac{x+4}{2} = \frac{3}{8} - \frac{x(x+1)}{2}$$

Solución:

Quitamos denominadores multiplicando por 8:

$$\frac{8 \cdot 4(x+1)}{8} - \frac{8 \cdot (x+4)}{2} = \frac{8 \cdot 3}{8} - \frac{8 \cdot x(x+1)}{2}; \quad 4(x+1) - 4 \cdot (x+4) = 3 - 4x(x+1)$$

Quitamos paréntesis:

$$4x + 4 - 4x - 16 = 3 - 4x^2 - 4x$$

Agrupamos términos:

$$4x^2 + 4x - 15 = 0; \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 240}}{8} = \frac{-4 \pm 16}{8}$$

Las soluciones son $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.



Ejercicio 7. La suma de los seis términos de una progresión aritmética es 36. y el producto de los términos extremos, 11. Hallar el primer término y la diferencia.

Solución:

Tenemos que:

$$\begin{cases} \frac{(a_1+a_6)6}{2} = 36 \\ a_1 \cdot a_6 = 11 \end{cases}$$

De aquí resulta $a_1 = 1$ y $a_6 = 11$ (o $a_1 = 11$ y $a_6 = 1$). La diferencia es 2 o -2.



Ejercicio 8. Hallar tres números en progresión geométrica sabiendo que su suma es 1 y su producto 216.

Solución:

Sean los números $\frac{x}{r}$, x y rx . Entonces:

$$\begin{cases} \frac{x}{r} + x + rx = 1 \\ \frac{x}{r} \cdot x \cdot rx = 216 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{x}{r} + x + rx = 1 \\ x^3 = 216 \end{cases}$$

De la segunda ecuación resulta $x = 6$. De la primera:

$$\frac{6}{r} + 6 + 6r = 1; \quad \frac{6}{r} + 5 + 6r = 0; \quad 6r^2 + 5r + 6 = 0$$

La ecuación no tiene solución.

