

# **Matemáticas 4ºESO. Exámenes**

Curso 2016-2017

## 1. Radicales

**Ejercicio 1.** *Calcular*

$$(a) \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$(b) (-27)^{\frac{2}{3}}$$

$$(c) \left(\frac{5}{6}\right)^0$$

**Solución:**

$$(a) \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$(b) (-27)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-27)^2} = (-3)^2 = 9$$

$$(c) \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1$$



**Ejercicio 2.** *Calcular:*

$$(a) \left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$$

$$(b) \left(\frac{5}{6}\right)^{-2}$$

$$(c) \left(15 + \frac{5}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$$

**Solución:**

$$(a) \left(\frac{5}{6}\right)^{-1} = \frac{6}{5}$$

$$(b) \left(\frac{5}{6}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}$$

$$(c) \left(15 + \frac{5}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{125}{8}\right)^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$



**Ejercicio 3.** *Calcular:*

$$(a) \left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(b) \left(2 + \frac{7}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(c) (125)^{-\frac{2}{3}}$$

**Solución:**

$$(a) \left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$$(b) \left(2 + \frac{7}{81}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{169}{81}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{169}{81}} = \frac{13}{9}$$

$$(c) (125)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{125}\right)^2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$



**Ejercicio 4.** Calcular:

$$(a) (1296)^{\frac{1}{4}} \qquad (b) \left(\frac{512}{343}\right)^{-\frac{2}{3}} \qquad (c) \left(3 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$$

**Solución:**

$$(a) (1296)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{1296} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} = 6$$

$$(b) \left(\frac{512}{343}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{343}{512}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{343}{512}\right)^2} = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$$

$$(c) \left(3 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{49}{16}\right)^3} = \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{343}{64}$$



**Ejercicio 5.** Racionalizar los denominadores y simplificar:

$$(a) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{21}} \qquad (b) \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{132}} \qquad (c) \frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

**Solución:**

$$(a) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{3}{21}} = \sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$(b) \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{132}} = \sqrt{\frac{11}{132}} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$(c) \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$



**Ejercicio 6.** Racionalizar los denominadores:

$$(a) \frac{7}{\sqrt{13}-\sqrt{3}} \qquad (b) \frac{7}{2+\sqrt{7}} \qquad (c) \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{11}-4}$$

**Solución:**

$$(a) \frac{7}{\sqrt{13}-\sqrt{3}} = \frac{7(\sqrt{13}+\sqrt{3})}{(\sqrt{13}-\sqrt{3})(\sqrt{13}+\sqrt{3})} = \frac{7(\sqrt{13}+\sqrt{3})}{13-3} = \frac{7(\sqrt{13}+\sqrt{3})}{10}$$

$$(b) \frac{7}{2+\sqrt{7}} = \frac{7(2-\sqrt{7})}{(2+\sqrt{7})(2-\sqrt{7})} = \frac{7(2-\sqrt{7})}{4-7} = \frac{-7(2-\sqrt{7})}{3}$$

$$(c) \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{11}-4} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{11}+4)}{(\sqrt{11}-4)(\sqrt{11}+4)} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{11}+4)}{11-16} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{11}+4)}{-5}$$



**Ejercicio 7.** Calcular:

$$3\sqrt{8} + 5\sqrt{72} + 8\sqrt{50} - 4\sqrt{18} + 4\sqrt{2}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned}
& 3\sqrt{8} + 5\sqrt{72} + 8\sqrt{50} - 4\sqrt{18} + 4\sqrt{2} \\
&= 3\sqrt{4 \cdot 2} + 5\sqrt{36 \cdot 2} + 8\sqrt{25 \cdot 2} - 4\sqrt{9 \cdot 2} + 4\sqrt{2} \\
&= 6\sqrt{2} + 30\sqrt{2} + 40\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \\
&= 68\sqrt{2}
\end{aligned}$$

**Ejercicio 8. Calcular:**

$$2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + 4\sqrt{3} + \sqrt{243}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + 4\sqrt{3} + \sqrt{243} \\
&= 2\sqrt{4 \cdot 3} - 3\sqrt{25 \cdot 3} + 5\sqrt{9 \cdot 3} - 3\sqrt{16 \cdot 3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{81 \cdot 3} \\
&= 4\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 9\sqrt{3} \\
&= 5\sqrt{3}
\end{aligned}$$

**Ejercicio 9. Calcular:**

$$\frac{\sqrt{20}}{3} + \frac{\sqrt{45}}{2} - \frac{5\sqrt{80}}{6} + \frac{\sqrt{125}}{3}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{20}}{3} + \frac{\sqrt{45}}{2} - \frac{5\sqrt{80}}{6} + \frac{\sqrt{125}}{3} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{4 \cdot 5} + \frac{1}{2}\sqrt{9 \cdot 5} - \frac{5}{6}\sqrt{16 \cdot 5} + \frac{1}{3}\sqrt{25 \cdot 5} \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{5} + \frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{10}{3}\sqrt{5} + \frac{5}{3}\sqrt{5} \\
&= \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{10}{3} + \frac{5}{3}\right)\sqrt{5} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

**Ejercicio 10. Calcular:**

$$3\sqrt[3]{128} + 2\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{54}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned}
& 3\sqrt[3]{128} + 2\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{54} \\
&= 3\sqrt[3]{64 \cdot 2} + 2\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{8 \cdot 2} + 3\sqrt[3]{27 \cdot 2} \\
&= 12\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} + 9\sqrt[3]{2} \\
&= 13\sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$



## 2. Radicales y logaritmos

**Ejercicio 1.** *Simplificar extrayendo factores del radical:*

$$\sqrt[5]{1024a^{12}b^8c^3}$$

**Solución:**

$$\sqrt[5]{1024a^{12}b^8c^3} = \sqrt[5]{2^{10}a^{10}a^2b^5b^3c^3} = 2^2a^2b\sqrt[5]{a^2b^3c^3} = 4a^2b\sqrt[5]{a^2b^3c^3}$$



**Ejercicio 2.** *Calcular:*

$$2\sqrt{12} + 3\sqrt{75} - 3\sqrt{27} - 2\sqrt{48} + 4\sqrt{3} + \sqrt{243}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} 2\sqrt{12} + 3\sqrt{75} - 3\sqrt{27} - 2\sqrt{48} + 4\sqrt{3} + \sqrt{243} \\ &= 2\sqrt{4 \cdot 3} + 3\sqrt{25 \cdot 3} - 3\sqrt{9 \cdot 3} - 2\sqrt{16 \cdot 3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{81 \cdot 3} \\ &= 4\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 9\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 9\sqrt{3} \\ &= 15\sqrt{3} \end{aligned}$$



**Ejercicio 3.** *Racionalizar:*

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

**Solución:**

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{3 + 2 + 2\sqrt{6}}{3 - 2} = 5 + 2\sqrt{6}$$



**Ejercicio 4.** *Racionalizar y simplificar:*

$$7\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\sqrt{\frac{5}{3}} - 3\sqrt{15} + 2\sqrt{60}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} 7\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\sqrt{\frac{5}{3}} - 3\sqrt{15} + 2\sqrt{60} &= \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - 3\sqrt{15} + 2 \cdot 2\sqrt{15} \\ &= \frac{7\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}\sqrt{3}}{3} - 3\sqrt{15} + 4\sqrt{15} \\ &= \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{3} - 3 + 4\right)\sqrt{15} \\ &= \frac{46}{15}\sqrt{15} \end{aligned}$$



**Ejercicio 5.** *Calcular:*

$$\sqrt[3]{13 + 2\sqrt{11}} \cdot \sqrt[3]{13 - 2\sqrt{11}}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{13 + 2\sqrt{11}} \cdot \sqrt[3]{13 - 2\sqrt{11}} &= \sqrt[3]{(13 + 2\sqrt{11})(13 - 2\sqrt{11})} \\ &= \sqrt[3]{169 - 44} \\ &= \sqrt[3]{125} \\ &= 5 \end{aligned}$$



**Ejercicio 6.** *Calcular los siguientes logaritmos:*

(a)  $\log_2 64$

(b)  $\log_7 343$

(c)  $\log_2 \sqrt{2}$

(d)  $\log_5 (-5)$

**Solución:**

(a)  $\log_2 64 = 6$

(b)  $\log_7 343 = 3$

(c)  $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

(d)  $\log_5 (-5)$  (no existe)



**Ejercicio 7.** *Calcular los siguientes logaritmos:*

(a)  $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{4}$

(b)  $\log_3 \frac{1}{81}$

**Solución:**

$$\log_2 \frac{\sqrt{2}}{4} = \log_2 \sqrt{2} - \log_2 4 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\log_3 \frac{1}{81} = \log_3 1 - \log_3 81 = 0 - 4 = -4$$



**Ejercicio 8.** Calcular los siguientes logaritmos:

$$(a) \log_{16} 8$$

$$(b) \log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}}$$

**Solución:**

$$(a) \log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16} = \frac{3}{4}$$

$$(b) \log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}}{\log_5 25} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$



**Ejercicio 9.** Conocido  $\log 5 = 0,6990$ , hallar  $\log 2$  y  $\log 12,5$ .

**Solución:**

$$\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - 0,6990 = 0,3010$$

$$\begin{aligned} \log 12,5 &= \log \frac{25}{2} = \log 25 - \log 2 = \log 5^2 - \log 2 = 2 \log 5 - \log 2 \\ &= 2 \cdot 0,6990 - 0,3010 = 1,0970 \end{aligned}$$



**Ejercicio 10.** Despejar  $x$  en:

$$(a) \log_9 x = \frac{1}{2}$$

$$(b) 7^{1-x^2} = 1$$

**Solución:**

$$(a) \log_9 x = \frac{1}{2} \implies x = 9^{\frac{1}{2}} = +\sqrt{9} = 3$$

$$(b) 7^{1-x^2} = 1 \implies 1 - x^2 = \log_7 1 = 0 \implies x = \pm 1$$



### 3. Polinomios y ecuaciones

**Ejercicio 1.** Calcular el cociente y el resto de la división:

$$(x^4 - 5x^3 + 7x - 4) \div (x^2 - 4x - 3)$$

**Solución:**

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 5x^3 + 0x^2 + 7x - 4 \\
 - x^4 + 4x^3 + 3x^2 \\
 \hline
 - x^3 + 3x^2 + 7x \\
 x^3 - 4x^2 - 3x \\
 \hline
 - x^2 + 4x - 4 \\
 x^2 - 4x - 3 \\
 \hline
 - 7
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overline{) x^2 - 4x - 3} \\
 x^2 - x - 1 \\
 \hline
 \phantom{x^2} - 3x - 2
 \end{array}$$



**Ejercicio 2.** *Calcula el valor numérico de  $-2x^3 + 5x^2 + 3x - 2$  para  $x = -2$  y  $x = \frac{1}{2}$ .*

**Solución:**

Mediante la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -2 & -2 & 5 & 3 & -2 \\
 & & 4 & -18 & 30 \\
 \hline
 & -2 & 9 & -15 & 28
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|rrrr}
 \frac{1}{2} & -2 & 5 & 3 & -2 \\
 & & -1 & 2 & \frac{5}{2} \\
 \hline
 & -2 & 4 & 5 & \frac{1}{2}
 \end{array}$$

En el primer caso, el valor numérico es 28 y en el segundo  $-\frac{1}{2}$ .



**Ejercicio 3.** *¿Qué valor habrá que dar a  $a$  para que el polinomio  $x^3 + 6x^2 - 3ax - 1$  sea divisible por  $x - 6$ ?*

**Solución:**

Si el polinomio es divisible por  $x - 6$ ,  $x = 6$  es una raíz del polinomio:

$$\begin{aligned}
 6^3 + 6 \cdot 6^2 - 3a \cdot 6 - 1 &= 0 \\
 216 + 216 - 18a - 1 &= 0 \\
 431 &= 18a \\
 a &= \frac{431}{18}
 \end{aligned}$$



**Ejercicio 4.** *Determinar  $a$  para que en el polinomio  $3x^4 - 4x^2 + x - a$  de un resto 15 al dividirlo por  $x - 2$ .*

**Solución:**

Si el resto es 15, el valor numérico para  $x = 2$  es 15:

$$\begin{aligned}
 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^2 + 2 - a &= 15 \\
 48 - 16 + 2 - a &= 15 \\
 34 - 15 &= a \\
 a &= 19
 \end{aligned}$$





**Ejercicio 5.** Factorizar el polinomio  $4x^3 + 9x^2 - x - 6$ . Expresar la solución con números enteros.

**Solución:**

Buscamos una raíz entre los divisores de 6:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 9 & -1 & -6 \\ -2 & & -8 & -2 & 6 \\ \hline & 4 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

Así tenemos una primera factorización:

$$4x^3 + 9x^2 - x - 6 = (x + 2)(4x^2 + x - 3)$$

Calculamos las raíces del polinomio de segundo grado:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{8} = \frac{-1 \pm 7}{8}$$

lo que nos da dos raíces  $x = -1$  y  $x = \frac{3}{4}$ . Por el teorema del factor:

$$4x^3 + 9x^2 - x - 6 = (x + 2)(4x^2 + x - 3) = (x + 2) \cdot 4(x + 1) \left(x - \frac{3}{4}\right) = (x + 2)(x + 1)(4x - 3)$$



**Ejercicio 6.** Resolver la ecuación:

$$\frac{x}{6} - \frac{2x - 1}{6} - \frac{1}{3} \left( \frac{2}{5} - \frac{x}{3} \right) = 0$$

**Solución:**

Quitamos paréntesis:

$$\frac{x}{6} - \frac{2x - 1}{6} - \frac{2}{15} + \frac{x}{9} = 0$$

Ahora quitamos denominadores multiplicando toda la ecuación por 90:

$$\frac{90x}{6} - \frac{90(2x - 1)}{6} - \frac{90 \cdot 2}{15} + \frac{90x}{9} = 0$$

$$15x - 15(2x - 1) - 6 \cdot 2 + 10x = 0$$

$$15x - 30x + 15 - 12 + 10x = 0$$

$$-5x + 3 = 0$$

$$x = \frac{3}{5}$$



**Ejercicio 7.** Resolver la ecuación

$$-3x^2 + 5x - 2 = 0$$

**Solución:**

Multiplicando la ecuación por  $-1$ :

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

Resolvemos:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

Lo que nos da  $x = 1$  y  $x = \frac{2}{3}$ .



**Ejercicio 8.** Resolver la ecuación:

$$\sqrt{3x+1} - 2 = \sqrt{x-1}$$

**Solución:**

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$$(\sqrt{3x+1} - 2)^2 = (\sqrt{x-1})^2$$

$$3x + 1 + 4 - 4\sqrt{3x+1} = x - 1$$

$$3x + 5 - x + 1 = 4\sqrt{3x+1}$$

$$2x + 6 = 4\sqrt{3x+1}$$

$$x + 3 = 2\sqrt{3x+1}$$

Elevando de nuevo ambos miembros al cuadrado

$$(x+3)^2 = (2\sqrt{3x+1})^2$$

$$x^2 + 9 + 6x = 4(3x+1)$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Lo que da dos soluciones  $x = 1$  y  $x = 5$ . Puede comprobarse que ambas son válidas.



**Ejercicio 9.** Resolver la ecuación:

$$4x^4 + 13x^2 + 3 = 0$$

**Solución:**

Es una ecuación bicuadrada. Despejamos  $x^2$ :

$$x^2 = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 48}}{8} = \frac{-13 \pm 11}{8}$$

y tenemos

$$x^2 = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 = -3$$

Puesto que no existen raíces de números negativos, la ecuación no tiene solución.



**Ejercicio 10.** Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 7 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

**Solución:**

Por sustitución. Despejamos  $y$  en la segunda ecuación:

$$2x - 3y = -4; \quad -3y = -2x - 4; \quad 3y = 2x + 4; \quad y = \frac{2x + 4}{3}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 3x^2 + \frac{(2x + 4)^2}{9} &= 7 && \text{quitando denominadores:} \\ 27x^2 + (2x + 4)^2 &= 63 \\ 27x^2 + 4x^2 + 16 + 16x &= 63 \\ 31x^2 + 16x - 47 &= 0 \end{aligned}$$

Se puede resolver mediante la fórmula pero, como vemos que hay una solución  $x = 1$ , factorizamos:

$$(x - 1)(31x + 47) = 0$$

Hay dos soluciones:

$$\begin{aligned} x = 1 &\implies y = \frac{2 \cdot 1 + 4}{3} = 2 \\ x = \frac{-47}{31} &\implies y = \frac{2 \cdot \frac{-47}{31} + 4}{3} = \frac{-2 \cdot 47 + 4 \cdot 31}{3 \cdot 31} = \frac{30}{93} = \frac{10}{31} \end{aligned}$$

Las soluciones son  $(1, 2)$  y  $(-\frac{47}{31}, \frac{10}{31})$ .



## 4. Ecuaciones e inecuaciones

**Ejercicio 1.** Resolver las ecuaciones:

$$(a) \frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x-2)}{4} = \frac{x(3x-1)}{8}$$

$$(b) \frac{4(x+1)}{8} - \frac{x+4}{2} = \frac{3}{8} - \frac{x(x+1)}{2}$$

**Solución:**

(a) Quitamos denominadores y resolvemos:

$$\begin{aligned} \frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x-2)}{4} &= \frac{x(3x-1)}{8} \\ \frac{8x(x-3)}{2} + \frac{8x(x-2)}{4} &= \frac{8x(3x-1)}{8} \\ 4x(x-3) + 2x(x-2) &= x(3x-1) \\ 4x^2 - 12x + 2x^2 - 4x &= 3x^2 - x \\ 3x^2 - 15x &= 0 \\ x = 0; \quad x = 5 \end{aligned}$$

(b) De forma similar:

$$\begin{aligned} \frac{4(x+1)}{8} - \frac{x+4}{2} &= \frac{3}{8} - \frac{x(x+1)}{2} \\ \frac{8 \cdot 4(x+1)}{8} - \frac{8(x+4)}{2} &= \frac{8 \cdot 3}{8} - \frac{8x(x+1)}{2} \\ 4(x+1) - 4(x+4) &= 3 - 4x(x+1) \\ 4x + 4 - 4x - 16 &= 3 - 4x^2 - 4x \\ 4x^2 + 4x - 15 &= 0 \\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 240}}{8} &= \frac{-4 \pm 16}{8}; \quad x = \frac{3}{2}, \quad x = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$



**Ejercicio 2.** Resolver:

$$(a) \sqrt{4x-3} - \sqrt{x-2} = 2$$

$$(b) 2 \log 2x - 1 = \log x$$

**Solución:**

(a) Despejamos la primera raíz y elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$\begin{aligned} \sqrt{4x-3} &= 2 + \sqrt{x-2} \\ (\sqrt{4x-3})^2 &= (2 + \sqrt{x-2})^2 \\ 4x-3 &= 4 + 4\sqrt{x-2} + x-2 \\ 3x-5 &= 4\sqrt{x-2} \end{aligned}$$

Elevando de nuevo ambos miembros al cuadrado:

$$\begin{aligned} (3x-5)^2 &= (4\sqrt{x-2})^2 \\ 9x^2 - 30x + 25 &= 16(x-2) \\ 9x^2 - 46x + 57 &= 0 \\ (x-3)(9x-19) &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones son  $x = 3$  (válida) y  $x = \frac{19}{9}$  (también válida).

(b) Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$2 \log 2x - 1 = \log x$$

$$\log 4x^2 - \log 10 = \log x$$

$$\log \frac{4x^2}{10} = \log x$$

$$\frac{4x^2}{10} = x$$

$$4x^2 = 10x$$

Las soluciones son  $x = 0$  (no válida) y  $x = \frac{5}{2}$  (válida).



**Ejercicio 3.** Resolver

(a)  $6x^3 + 13x^2 - 4 = 0$

(b)  $3^{x+1} + \frac{1}{3^x} = 4$

**Solución:**

(a) Buscamos una raíz entre los divisores de 4:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 13 & 0 & -4 \\ -2 & & -12 & -2 & 4 \\ \hline & 6 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Factorizamos el polinomio:

$$(x + 2)(6x^2 + x - 2) = 0$$

Igualando a cero el segundo factor:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12}$$

Las soluciones son  $x = -2$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = -\frac{2}{3}$ .

(b) Haciendo  $3^x = t$  la ecuación se escribe:

$$3 \cdot t + \frac{1}{t} = 4; \quad 3t^2 - 4t + 1 = 0 \quad \implies \quad t = 1 \quad t = \frac{1}{3}$$

Entonces:

$$3^x = 1 \quad \implies \quad x = \log_3 1 = 0$$

$$3^x = \frac{1}{3} \quad \implies \quad x = \log_3 \frac{1}{3} = -1$$



**Ejercicio 4.** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$(a) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + \frac{2}{y} = 1 \\ y + \frac{1}{x} = 6 \end{cases}$$

**Solución:**

(a) Despejamos  $y$  de la primera ecuación:

$$y = \frac{2x - 1}{3}$$

y sustituimos en la segunda:

$$x^2 - \frac{(2x - 1)^2}{9} = 3; \quad 9x^2 - (2x - 1)^2 = 27; \quad 5x^2 + 4x - 28 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 560}}{10} = \frac{-4 \pm 24}{10}$$

que nos da las soluciones  $x = 2$  y  $x = -\frac{28}{10} = -\frac{14}{5}$ .

Para  $x = 2$ :

$$y = \frac{2 \cdot 2 - 1}{3} = 1$$

y para  $x = -\frac{14}{5}$ :

$$y = \frac{2 \cdot \frac{-14}{5} - 1}{3} = \frac{-28 - 5}{15} = -\frac{33}{15} = -\frac{11}{5}$$

Las soluciones son  $(2, 1)$  y  $(-\frac{14}{5}, -\frac{11}{5})$ .

(b) Quitamos denominadores:

$$\begin{cases} xy + 2 = y \\ xy + 1 = 6x \end{cases}$$

Restando las dos ecuaciones resulta:

$$1 = y - 6x; \quad y = 6x + 1$$

Sustituyendo en la segunda ecuación resulta:

$$x(6x + 1) + 1 = 6x$$

$$6x^2 + x + 1 - 6x = 0$$

$$6x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} \implies x = \frac{1}{2}; \quad x = \frac{1}{3}$$

Las soluciones son  $(\frac{1}{2}, 4)$  y  $(\frac{1}{3}, 3)$ .



**Ejercicio 5.** Resolver las inecuaciones:

$$(a) \frac{x+1}{9-x^2} < 0$$

$$(b) x(x+1)^2(x-3) \geq 0$$

**Solución:**

(a) La raíz del numerador es  $x = -1$ . El denominador tiene dos raíces  $x = -3$  y  $x = 3$ . El esquema de signos es el siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} & + & \neq & - & 0 & + & \neq & - \\ & & | & & | & & | & \\ & & -3 & & -1 & & 3 & \end{array}$$

La solución es  $x \in (-3, -1) \cup (3, \infty)$ .

(b) Las raíces del polinomio son  $x = -1$  (doble),  $x = 0$  y  $x = 3$ . El esquema de signos es el siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} & + & 0 & + & 0 & - & 0 & + \\ & & | & & | & & | & \\ & & -1 & & 0 & & 3 & \end{array}$$

La solución es  $x \in (-\infty, 0] \cup [3, \infty)$



## 5. Logaritmos, polinomios y ecuaciones

**Ejercicio 1.** Racionalizar los denominadores y calcular:

$$\frac{2}{2+\sqrt{2}} - \frac{3}{3+\sqrt{6}} - \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} & \frac{2}{2+\sqrt{2}} - \frac{3}{3+\sqrt{6}} - \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} - \frac{3(3-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})} - \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} \\ &= \frac{2(2-\sqrt{2})}{4-2} - \frac{3(3-\sqrt{6})}{9-6} - \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} \\ &= \frac{2(2-\sqrt{2})}{2} - \frac{3(3-\sqrt{6})}{3} - \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \\ &= 2 - \sqrt{2} - (3 - \sqrt{6}) - (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ &= -1 \end{aligned}$$



**Ejercicio 2.** Calcular los siguientes logaritmos:

$$(a) \log_2 \frac{1}{\sqrt{8}} \quad (b) \log_3 \frac{3}{\sqrt{3}} \quad (c) \log_2 8\sqrt{2} \quad (d) \log_4 32$$

**Solución:**

$$(a) \log_2 \frac{1}{\sqrt{8}} = \log_2 1 - \log_2 \sqrt{8} = -\frac{1}{2} \log_2 8 = -\frac{3}{2}$$

$$(b) \log_3 \frac{3}{\sqrt{3}} = \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$$

$$(c) \log_2 8\sqrt{2} = \log_2 8 + \log_2 \sqrt{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$(d) \log_4 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 4} = \frac{5}{2}$$



**Ejercicio 3.** Obtener el cociente y el resto de:

$$(2x^4 - 3x^2 + x - 5) \div (x^2 - x + 3)$$

**Solución:**

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x - 5 \\ - 2x^4 + 2x^3 - 6x^2 \\ \hline 2x^3 - 9x^2 + x \\ - 2x^3 + 2x^2 - 6x \\ \hline - 7x^2 - 5x - 5 \\ 7x^2 - 7x + 21 \\ \hline - 12x + 16 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - x + 3 \\ 2x^2 + 2x - 7 \end{array} \right.$$



**Ejercicio 4.** Simplificar la fracción

$$\frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2 + x}$$

**Solución:**

$$\frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{x(x^2 - 1)}{x(x^2 + 2x + 1)} = \frac{x(x-1)(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}$$



**Ejercicio 5.** Calcular  $a$  para que el polinomio  $2x^3 - ax^2 + 3x + a$  sea divisible por  $x + 1$ .

**Solución:**



Si el polinomio es divisible por  $x + 1$ , tiene una raíz  $x = -1$ . Entonces:

$$2(-1)^3 - a(-1)^2 + 3(-1) + a = 0; \quad -2 - a - 3 + a = 0; \quad 0 \cdot a = 5$$

El problema no tiene solución.



**Ejercicio 6.** Resolver la ecuación:

$$\frac{5-x}{2} - \frac{x+3}{6} = \frac{9-x}{4} - \frac{6x+2}{16}$$

**Solución:**

$$\frac{48(5-x)}{2} - \frac{48(x+3)}{6} = \frac{48(9-x)}{4} - \frac{48(6x+2)}{16}$$

$$24(5-x) - 8(x+3) = 12(9-x) - 3(6x+2)$$

$$120 - 24x - 8x - 24 = 108 - 12x - 18x - 6$$

$$96 - 32x = 102 - 30x$$

$$-2x = 6 \implies x = -3$$



**Ejercicio 7.** Resolver la ecuación:

$$\frac{(2x-1)^2}{4} - \frac{(3x+1)^2}{9} = \frac{1}{6}$$

**Solución:**

$$\frac{(2x-1)^2}{4} - \frac{(3x+1)^2}{9} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{36(2x-1)^2}{4} - \frac{36(3x+1)^2}{9} = \frac{36 \cdot 1}{6}$$

$$9(2x-1)^2 - 4(3x+1)^2 = 6$$

$$9(4x^2 - 4x + 1) - 4(9x^2 + 6x + 1) - 6 = 0$$

$$36x^2 - 36x + 9 - 36x^2 - 24x - 4 - 6 = 0$$

$$-60x - 1 = 0 \implies x = -\frac{1}{60}$$



**Ejercicio 8.** Resolver la ecuación:

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$$

**Solución:**

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$$

$$\sqrt{3x+1} = \sqrt{2x-1} + 1$$

$$(\sqrt{3x+1})^2 = (\sqrt{2x-1} + 1)^2$$

$$3x + 1 = 2x - 1 + 1 + 2\sqrt{2x-1}$$

$$x + 1 = 2\sqrt{2x-1}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 4(2x - 1)$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Las soluciones de la ecuación son  $x = 1$  y  $x = 5$ . Ambas son válidas.

**Ejercicio 9.** Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

**Solución:**

Despejamos una incógnita en la segunda ecuación

$$y = \frac{2}{x}$$

y sustituimos en la primera

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 5; \quad x^4 + 4 = 5x^2; \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Las soluciones de la ecuación bicuadrada son  $y^2 = 1$  e  $y^2 = 4$ , o sea,  $y = -1$ ,  $y = 1$ ,  $y = -2$ ,  $y = 2$ . Calculamos los correspondientes valores de  $x$  y resultan las soluciones:

$$(-2, -1), \quad (2, 1), \quad (-1, -2), \quad (1, 2)$$

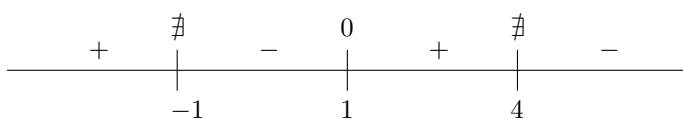
**Ejercicio 10.** Resolver la inecuación:

$$\frac{1-x}{x^2-3x-4} \geq 0$$

**Solución:**

El numerador tiene una raíz  $x = 1$  y el denominador dos raíces  $x = -1$  y  $x = 4$ . Todas las raíces son simples.

El esquema de signos es el siguiente



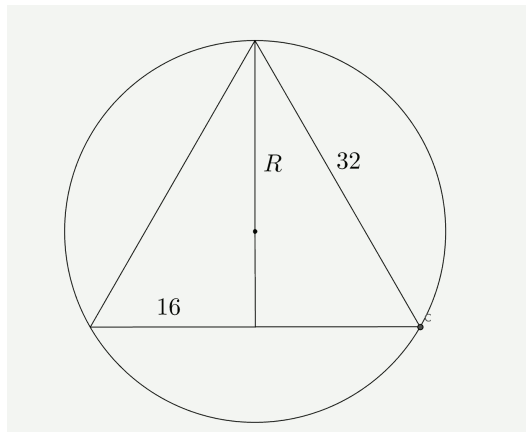
La solución de la inecuación es  $x \in (-\infty, -1) \cup [1, 4)$ .



## 6. Trigonometría

**Ejercicio 1.** Calcular la longitud de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero de lado 32 cm.

**Solución:**



La altura del triángulo equilátero es  $16\sqrt{3}$ . Puesto que el radio es  $\frac{2}{3}$  de la altura:

$$R = \frac{2 \cdot 16\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

La longitud de la circunferencia es:

$$l = 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} \simeq 116 \text{ cm}$$



**Ejercicio 2.** En un triángulo rectángulo los catetos mide 6 y 8 cm. Calcular la altura relativa a la hipotenusa.

**Solución:**

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide:

$$a = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}$$

Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa se obtienen por el teorema del cateto:

$$b^2 = am \implies m = \frac{b^2}{a} = \frac{36}{10}$$

$$c^2 = an \implies n = \frac{c^2}{a} = \frac{64}{10}$$

Por el teorema de la altura  $h^2 = mn$  y por tanto:

$$h^2 = \frac{36}{10} \cdot \frac{64}{10} \implies h = \sqrt{\frac{36}{10} \cdot \frac{64}{10}} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,80 \text{ cm}$$



**Ejercicio 3.** Calcular el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 40 cm.

**Solución:**

Si el radio de la circunferencia es 40, la diagonal del cuadrado es 80 cm. Aplicando la fórmula de las diagonales para el área:

$$S = \frac{80 \cdot 80}{2} = 3200 \text{ cm}^2$$



**Ejercicio 4** Expresar en radianes el ángulo  $\varphi = 153^\circ 51' 42''$ .

**Solución:**

Primero pasamos el ángulo a grados:

$$\varphi = \left( 153 + \frac{51}{60} + \frac{42}{3600} \right)$$

y ahora a radianes:

$$\varphi = \left( 153 + \frac{51}{60} + \frac{42}{3600} \right) \cdot \frac{\pi}{180} \simeq 2,69$$



**Ejercicio 5.** Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo de catetos  $b = 37$  cm y  $c = 41$  cm.

**Solución:**

$$\operatorname{tg} B = \frac{37}{41} \implies B = \operatorname{artg} \frac{37}{41} \simeq 42^\circ 3' 52''$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{41}{37} \implies C = \operatorname{artg} \frac{41}{37} \simeq 47^\circ 56' 8''$$



**Ejercicio 6.** Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo de cateto  $c = 26$  cm e hipotenusa  $a = 65$  cm.

**Solución:**

$$\cos B = \frac{26}{65} \implies B = \arccos \frac{26}{65} \simeq 66^\circ 25' 19''$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{26}{65} \implies C = \operatorname{arsen} \frac{26}{65} \simeq 23^\circ 34' 41''$$



**Ejercicio 7.** En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 43 cm y el ángulo  $C = 63^{\circ}26'$ . Calcular los catetos  $b$  y  $c$ .

**Solución:**

$$b = 43 \cos 63^{\circ}26' \simeq 19,2 \text{ cm}$$

$$c = 43 \operatorname{sen} 63^{\circ}26' \simeq 38,5 \text{ cm}$$



**Ejercicio 8.** En un triángulo rectángulo el cateto  $b = 89$  cm y el ángulo  $C = 28^{\circ}51'$ . Calcular la hipotenusa.

**Solución:**

$$a = \frac{b}{\cos C} = \frac{89}{\cos 28^{\circ}51'} \simeq 102 \text{ cm}$$



**Ejercicio 9.** Calcular el área de un pentágono regular cuya apotema mide 61 cm.

**Solución:**

Calculamos el lado del pentágono:

$$\frac{l}{2} = 61 \cdot \operatorname{tg} 36^{\circ} \implies l = 2 \cdot 61 \cdot \operatorname{tg} 36^{\circ} \simeq 88,6 \text{ cm}$$

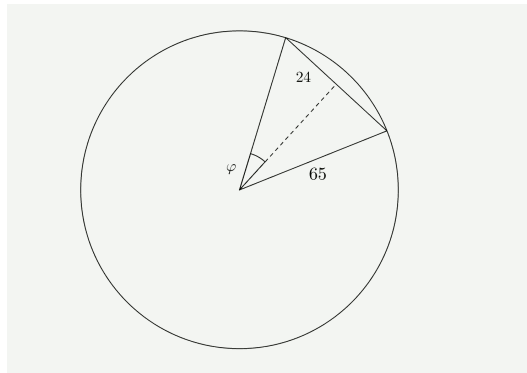
El área es el perímetro por la apotema dividido entre 2:

$$S = \frac{5l \cdot a}{2} \simeq 13500 \text{ cm}^2$$



**Ejercicio 10.** Calcular el área de un segmento circular limitado por una cuerda de 48 cm en una circunferencia de 65 cm de radio.

**Solución:**



Calculamos el ángulo  $\varphi$ :

$$\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \frac{24}{65}; \quad \frac{\varphi}{2} = \operatorname{arsen} \frac{24}{65}; \quad \varphi = 2 \operatorname{arsen} \frac{24}{65} \simeq 43,3^\circ$$

Para calcular el área del segmento circular necesitamos poner el ángulo en radianes:

$$\varphi \simeq 0,756$$

El área del segmento es:

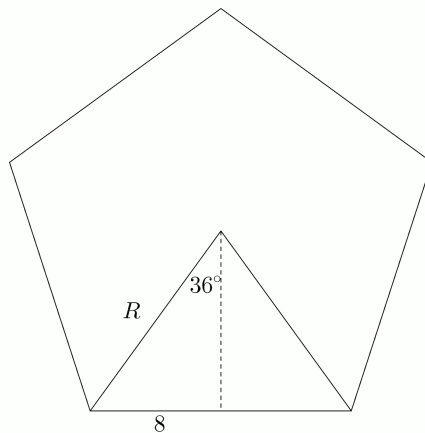
$$S = \frac{1}{2} r^2 (\varphi - \operatorname{sen} \varphi) \simeq 148 \text{ cm}^2$$



## 7. Trigonometría

**Ejercicio 1.** *Calcular el área de un pentágono regular de 16 cm de lado.*

**Solución:**



El radio de la circunferencia circunscrita mide:

$$R = \frac{8}{\operatorname{sen} 36^\circ} \simeq 13,6 \text{ cm}$$

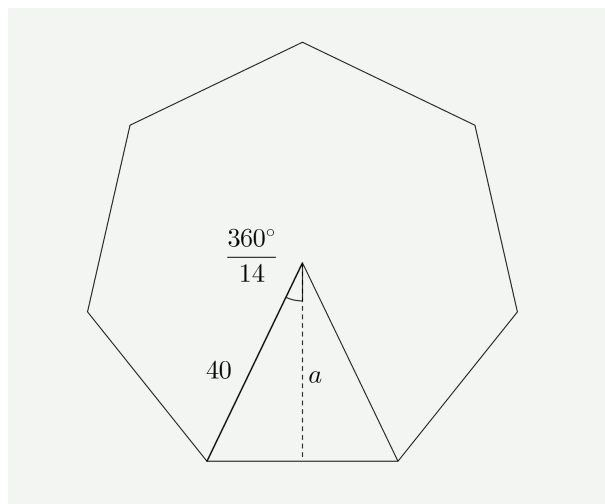
El área del pentágono se puede obtener como 5 veces el área del triángulo isósceles:

$$S = 5 \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen} 72^\circ \simeq 440 \text{ cm}^2$$



**Ejercicio 2.** *Calcular la apotema de un heptágono regular inscrito en una circunferencia de 40 cm de radio.*

**Solución:**



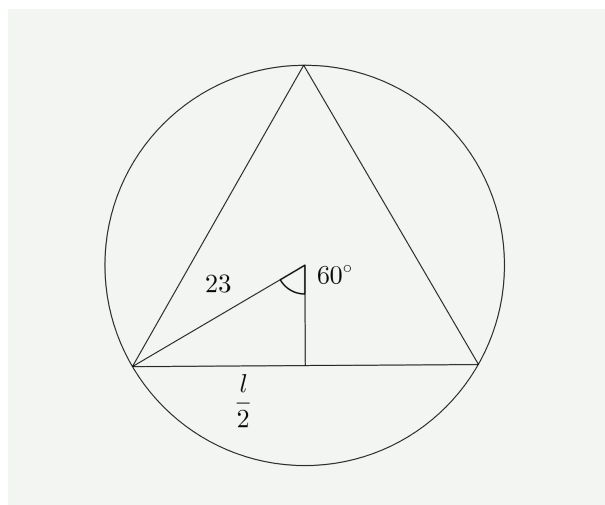
La apotema mide:

$$a = 40 \cos \frac{360^\circ}{14} \simeq 36,0 \text{ cm}$$



**Ejercicio 3.** Calcular el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 23 cm de radio.

**Solución:**



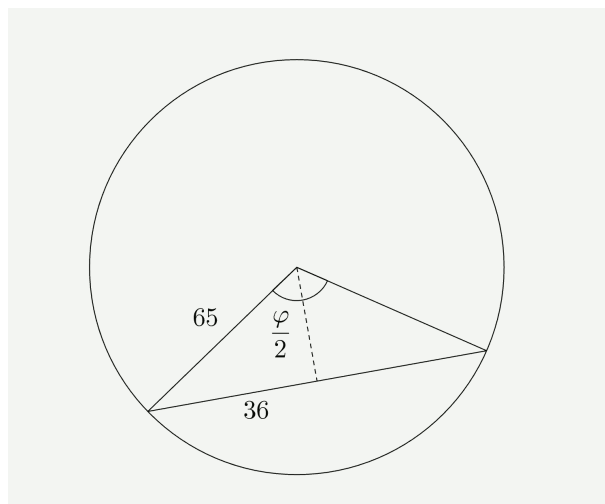
De la figura se deduce:

$$\frac{l}{2} = 23 \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{23\sqrt{3}}{2}; \quad l = 23\sqrt{3} \text{ cm}$$



**Ejercicio 4.** Calcular el área de un segmento circular encerrado por una cuerda de 72 cm en una circunferencia de 65 cm de radio.

**Solución:**



Calculamos el ángulo:

$$\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \frac{36}{65}; \quad \frac{\varphi}{2} = \frac{36}{65}; \quad \varphi = 2 \operatorname{arsen} \frac{36}{65}$$

Calculado el ángulo podemos obtener el área del segmento mediante:

$$S = \frac{1}{2} r^2 (\varphi - \operatorname{sen} \varphi)$$

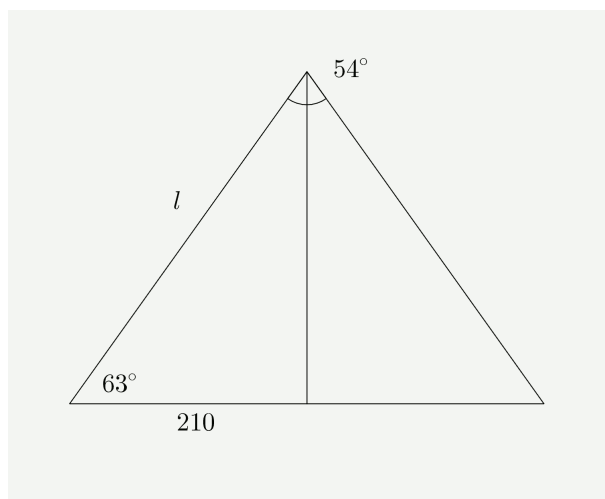
donde el primer  $\varphi$  debe estar expresado en radianes y el segundo en el modo de la calculadora. Sustituyendo:

$$S = \frac{1}{2} 65^2 (\varphi - \operatorname{sen} \varphi) \simeq 532 \text{ cm}^2$$



**Ejercicio 5.** En un triángulo isósceles la base mide 420 cm y los ángulos iguales  $63^\circ$ . Calcular la longitud de los lados iguales y el área del triángulo.

**Solución:**



Calculamos los lados iguales:

$$l = \frac{210}{\cos 63^\circ} \simeq 463 \text{ cm}$$



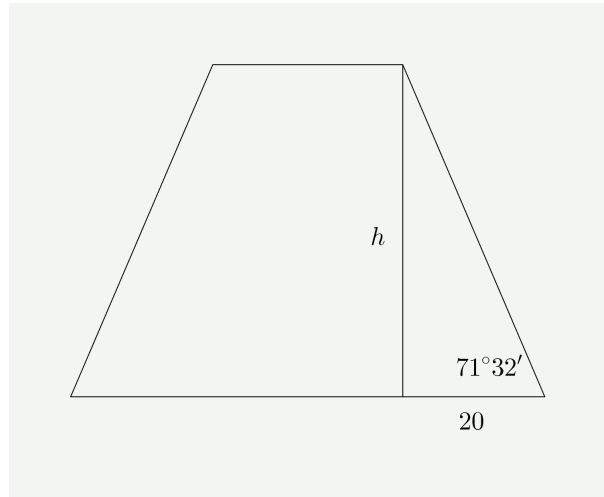
El área del triángulo mide:

$$S = \frac{1}{2} l^2 \operatorname{sen} 54^\circ \simeq 86600 \text{ cm}^2$$



**Ejercicio 6.** En un trapecio isósceles las bases miden 45 y 85 cm respectivamente y uno de sus ángulos mide  $71^\circ 32'$ . Calcular el área del trapecio.

**Solución:**



La altura del trapecio mide:

$$h = 20 \operatorname{tg} 71^\circ 32'$$

y el área:

$$S = \frac{(85 + 45) \cdot h}{2} \simeq 3890 \text{ cm}^2$$



**Ejercicio 7.** Desde un punto en un plano horizontal se observa el extremo superior de un árbol bajo un ángulo de  $68^\circ$  y, alejándose 15 m, el ángulo es de  $47^\circ$ . Calcular la altura del árbol.

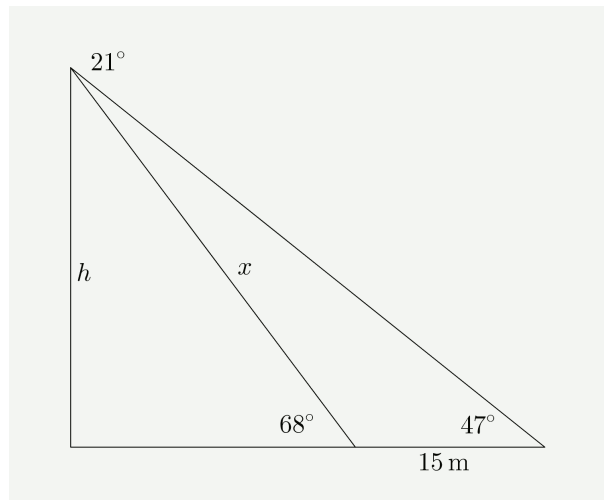
**Solución:**

Por el teorema del seno:

$$\frac{15}{\operatorname{sen} 21^\circ} = \frac{x}{\operatorname{sen} 47^\circ}; \quad x = \frac{15 \operatorname{sen} 47^\circ}{\operatorname{sen} 21^\circ}$$

Sabiendo  $x$  podemos calcular  $h$ :

$$h = x \operatorname{sen} 68^\circ \simeq 28,4 \text{ m}$$



**Ejercicio 8.** Un triángulo tiene lados de longitudes  $a = 315$  m,  $b = 278$  m y  $c = 429$  m. Calcular el ángulo  $B$  y el área del triángulo.

**Solución:**

Calculamos el ángulo  $B$  por el teorema del coseno:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad B = \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \simeq 40^\circ 21'$$

Con este valor del ángulo calculamos el área:

$$S = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} B \simeq 43700 \text{ m}^2$$



**Ejercicio 9.** Un triángulo tiene un lado  $a = 48$  cm y dos ángulos  $B = 73^\circ 16'$  y  $C = 56^\circ 11'$ . Calcular los lados  $b$  y  $c$ .

**Solución:**

El ángulo  $A$  mide:

$$A = 180^\circ - 73^\circ 16' - 56^\circ 11' = 50^\circ 33'$$

Ahora, obtenemos los lados por el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

De aquí:

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \simeq 59,5 \text{ cm}; \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \simeq 51,6 \text{ cm}$$



## 8. Geometría analítica

**Ejercicio 1.** Calcular en forma explícita la ecuación de la recta que pasa por  $A(-3, 2)$  y  $B(2, 5)$ .

**Solución:**

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{5 - 2}{2 - (-3)} = \frac{3}{5}$$

La ecuación de la recta es:

$$y - 2 = \frac{3}{5}(x + 3)$$

Para obtener la ecuación explícita despejamos  $y$ :

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{9}{5} + 2$$

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{19}{5}$$



**Ejercicio 2.** Calcular la ordenada en el origen de la recta que pasa por  $A(1, 2)$  y  $B(2, -3)$ .

**Solución:**

Calculamos la pendiente de la recta:

$$m = \frac{-3 - 2}{2 - 1} = -5$$

La ecuación de la recta es:

$$y - 2 = -5(x - 1)$$

y en forma explícita:

$$y = -5x + 7$$

La ordenada en el origen es  $b = 7$ .



**Ejercicio 3.** Dados los puntos  $A(1, 3)$ ,  $B(3, 5)$  y  $C(7, k)$ , ¿cuánto tiene que valer  $k$  para que los tres puntos estén alineados?

**Solución:**

Para que estén alineados, la pendiente de  $AB$  debe ser igual que la pendiente de  $AC$ :

$$m_{AB} = \frac{5 - 3}{3 - 1} = 1; \quad m_{AC} = \frac{k - 3}{7 - 1} = \frac{k - 3}{6}$$

Entonces:

$$\frac{k - 3}{6} = 1 \implies k = 9$$



**Ejercicio 4.** Dadas las rectas  $3x - my = 2$  y  $nx + 4y = 5$ , calcular los coeficientes  $m$  y  $n$  sabiendo que son paralelas y que la primera pasa por el punto  $(2, 2)$ .

**Solución:**

Si la primera recta pasa por el punto  $(2, 2)$  se cumple que:

$$3 \cdot 2 - 2m = 2; \quad 6 - 2m = 2; \quad m = 2$$

Si las rectas son paralelas:

$$\frac{3}{n} = \frac{-m}{4}; \quad n = \frac{3 \cdot 4}{-m} = -6$$



**Ejercicio 5.** Calcular un punto de la recta  $3x - y + 8 = 0$  que se encuentre a la misma distancia de los puntos  $A(1, -2)$  y  $B(6, 3)$ .

**Solución:**

Si el punto se encuentra a la misma distancia de  $A$  y  $B$ , se encuentra en la mediatriz de  $AB$ . Calculamos la mediatriz:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 &= (x - 6)^2 + (y - 3)^2 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 &= x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 \\ 10x + 10y - 40 &= 0 \\ x + y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

El punto que nos piden es la intersección de la mediatriz y la recta que nos dan:

$$\begin{cases} 3x - y + 8 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

y resulta el punto  $(-1, 5)$ .



**Ejercicio 6.** Escribir la ecuación de la recta paralela a  $2x - 3y + 1 = 0$  que pasa por  $P(1, -5)$ .

**Solución:** La pendiente de la recta que nos dan es:

$$m = \frac{2}{3}$$

La ecuación de la paralela es:

$$y + 5 = \frac{2}{3}(x - 1)$$

o, en forma explícita:

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{17}{3}$$



**Ejercicio 7.** En el triángulo de vértices  $A(-2, 4)$ ,  $B(6, 5)$  y  $C(2, -1)$  calcular la longitud de la mediana correspondiente al vértice  $A$ .

**Solución:**

La mediana es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Calculamos el punto medio de  $BC$  que resulta ser el punto  $M(4, 2)$ . La longitud de la mediana es la distancia de  $A$  a  $M$ :

$$d = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$



**Ejercicio 8.** Calcular las coordenadas de los puntos  $M$  y  $N$  que dividen al segmento  $AB$  en tres partes iguales siendo  $A(-1, -2)$  y  $B(8, 1)$ .

**Solución:**

La variación de las coordenadas entre  $A$  y  $B$  es:

$$\Delta x = 8 - (-1) = 9$$

$$\Delta y = 1 - (-2) = 3$$

El punto  $M$  es:

$$x_1 = -1 + \frac{1}{3} \Delta x = -1 + \frac{1}{3} \cdot 9 = 2$$

$$y_1 = -2 + \frac{1}{3} \Delta y = -2 + \frac{1}{3} \cdot 3 = -1$$

El punto es  $M(2, -1)$ . El otro punto  $N$  es:

$$x_1 = -1 + \frac{2}{3} \Delta x = -1 + \frac{2}{3} \cdot 9 = 5$$

$$y_1 = -2 + \frac{2}{3} \Delta y = -2 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 0$$

El punto es  $N(5, 0)$ .



## 9. Trigonometría, Geometría analítica.

**Ejercicio 1.** Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo en el que el cateto  $c = 47$  cm y la hipotenusa  $a = 62$  cm.

**Solución:**

Como conocemos la hipotenusa, podemos calcular los ángulos por el seno y el coseno:

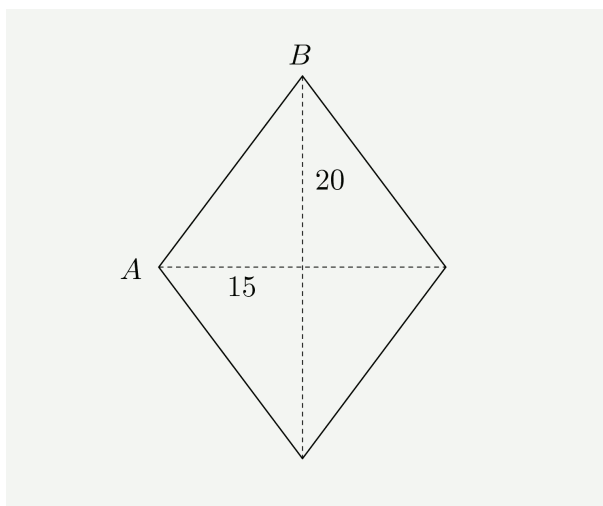
$$\cos B = \frac{c}{a} = \frac{47}{62} \implies B = \arccos \frac{47}{62} \simeq 40^{\circ}42'$$

$$\sin C = \frac{c}{a} = \frac{47}{62} \implies C = \arcsin \frac{47}{62} \simeq 49^{\circ}18'$$



**Ejercicio 2.** Calcular los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 30 y 40 cm.

**Solución:**



De la figura se deduce que:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{20}{15} \implies A = 2 \operatorname{artg} \frac{20}{15} \simeq 106^{\circ}16'$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{15}{20} \implies B = 2 \operatorname{artg} \frac{15}{20} \simeq 73^{\circ}44'$$

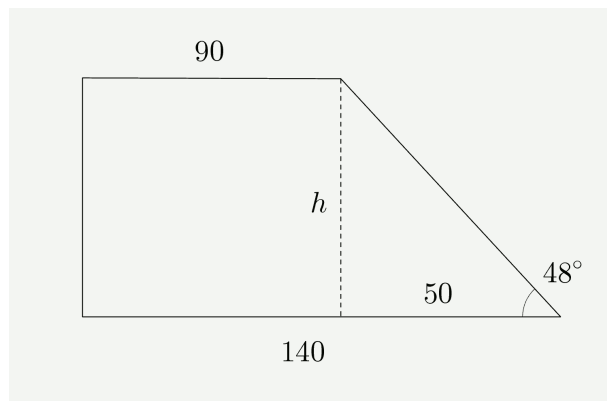


**Ejercicio 3.** Calcular el área de un trapecio rectángulo en que las bases miden 140 y 90 cm y el ángulo agudo  $48^{\circ}$ .

**Solución:**

La fórmula del área del trapecio es:

$$S = \frac{(b_1 + b_2) h}{2}$$



Debemos calcular la altura:

$$h = 50 \operatorname{tg} 48^\circ$$

Con este valor:

$$S = \frac{(140 + 90)h}{2} \simeq 6390 \text{ cm}^2$$



**Ejercicio 4.** Los lados de un triángulo miden 8, 12 y 16 cm. Calcular el ángulo mayor.

**Solución:**

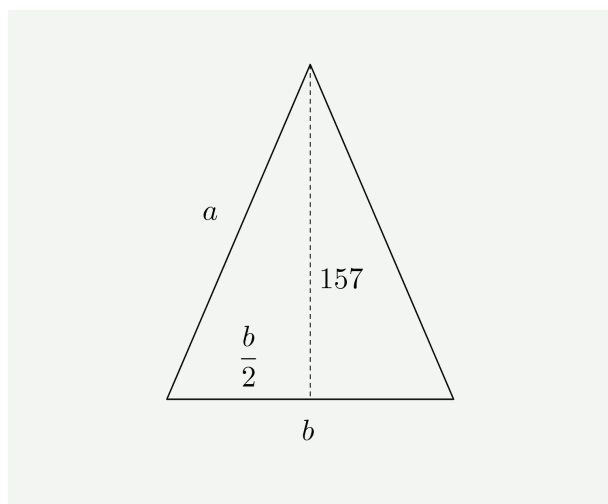
El ángulo mayor es el opuesto al lado mayor, es decir, el opuesto al lado de 16 cm. Por el teorema del coseno:

$$\cos C = \frac{8^2 + 12^2 - 16^2}{2 \cdot 8 \cdot 12} \implies C = 104^\circ 29'$$



**Ejercicio 5.** Calcular los lados de un triángulo isósceles sabiendo que su superficie es  $3161 \text{ cm}^2$  y su altura 157 cm.

**Solución:**



Puesto que la superficie del triángulo es base por altura partido por 2:

$$3161 = \frac{157b}{2} \implies b = \frac{2 \cdot 3161}{157} \simeq 40,3 \text{ cm}$$

Los lados iguales los podemos hallar por el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 157^2} \simeq 158 \text{ cm}$$



**Ejercicio 6.** Calcular en forma explícita la ecuación de la recta que pasa por  $A(-1, 2)$  y  $B(3, 6)$ .

**Solución:**

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 2}{3 - (-1)} = 1$$

La ecuación de la recta es:

$$y - 2 = x + 1$$

y, en forma explícita:

$$y = x + 3$$



**Ejercicio 7.** Calcular la ordenada en el origen de la recta que pasa por  $A(3, 2)$  y  $B(2, -1)$ .

**Solución:**

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 2}{2 - 3} = 3$$



La ecuación de la recta es:

$$y - 2 = 3(x - 3)$$

En forma explícita la ecuación es  $y = 3x - 7$ . La ordenada en el origen es  $-7$ .



**Ejercicio 8.** Dadas las rectas  $3x - my = 2$  y  $nx + 4y = 5$ , calcular los coeficientes  $m$  y  $n$  sabiendo que son paralelas y que la primera pasa por el punto  $(2, 2)$ .

**Solución:**

Si la primera pasa por  $(2, 2)$  se cumple que:

$$3 \cdot 2 - 2m = 2; \quad -2m = -4; \quad m = 2$$

Si las rectas son paralelas, sus coeficientes son proporcionales:

$$\frac{3}{n} = \frac{-m}{4}; \quad \frac{3}{n} = \frac{-2}{4} \implies n = -6$$



**Ejercicio 9.** Calcular en forma explícita la ecuación de la recta paralela a  $2x - 5y + 7 = 0$  que pasa por el punto  $P(1, -1)$ .

**Solución:**

La recta que nos dan tiene como pendiente  $m = \frac{2}{5}$ .

Puesto que la recta que nos piden es paralela a esta, debe tener la misma pendiente. Como, además, pasa por  $P(1, -1)$ , su ecuación es:

$$y + 1 = \frac{2}{5}(x - 1)$$



**Ejercicio 10.** En el triángulo de vértices  $A(-2, 4)$ ,  $B(6, 5)$  y  $C(2, -1)$  calcular la longitud de la mediana correspondiente al vértice  $A$ .

**Solución:**

La mediana correspondiente al vértice  $A$  pasa por  $A$  y por el punto medio de  $BC$ . Las coordenadas de este punto que llamaremos  $M$  son:

$$x = \frac{6 + 2}{2} = 4; \quad y = \frac{5 - 1}{2} = 2; \quad C(4, 2)$$

La longitud de la mediana es la distancia desde  $A$  hasta  $M$ :

$$AM = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$



## 10. Sucesiones. Funciones.

**Ejercicio 1.** Calcular los siguientes límites de sucesiones:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (3n - n^2)$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n - 5}$$

**Solución:**

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (3n - n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{3n} = \infty$$



**Ejercicio 2.** Calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2+n}{n+1} \right)$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-2}{3n^2} \right)^{-n}$$

**Solución:**

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2+n}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1) - (n^2+n)(n-1)}{(n-1)(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-2}{3n^2} \right)^{-n} = 0^{-\infty} = \frac{1}{0^{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$$

o bien:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-2}{3n^2} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2}{n-2} \right)^n = \infty^{\infty} = \infty$$



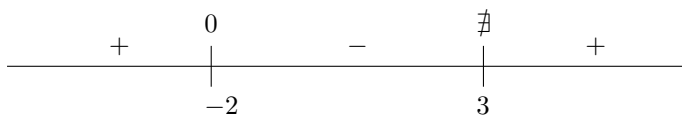
**Ejercicio 3.** Calcular el dominio de definición de la función  $y = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$ .

**Solución:**

El dominio es la solución de la inecuación:

$$\frac{x+2}{x-3} \geq 0$$

El signo de esta fracción está dado por el siguiente esquema:



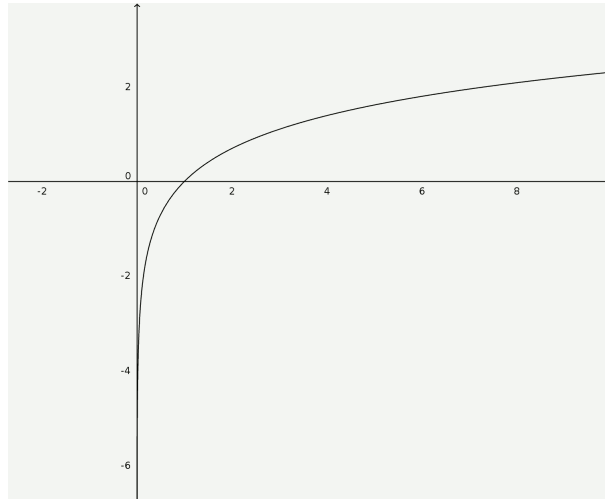
El dominio es  $(-\infty, -2] \cup (3, \infty)$



**Ejercicio 4.** Representar gráficamente  $y = \ln x$  e  $y = e^x$  señalando los puntos de corte con los ejes y las asíntotas.

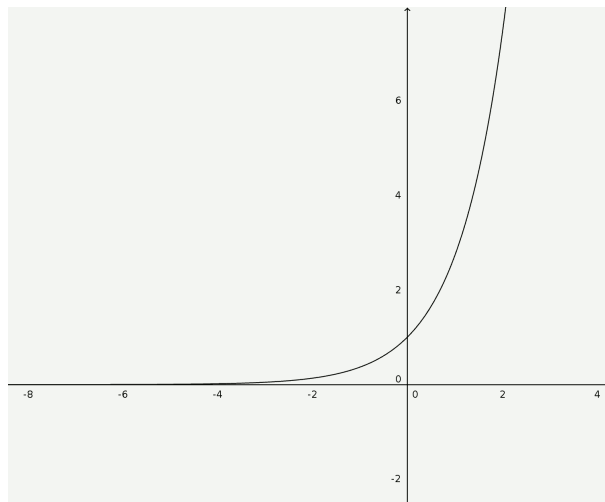
**Solución:**

La gráfica de la función logaritmo es:



Corta al eje de abscisas en  $(1, 0)$  y tiene una asíntota vertical  $x = 0$ .

La gráfica de la función exponencial es:



Corta al eje de ordenadas en  $(0, 1)$  y tiene una asíntota horizontal  $y = 0$  en  $-\infty$ .



**Ejercicio 5.** Representar gráficamente la función  $y = 4 + 3x - x^2$ .

**Solución:**

La intersección con el eje de ordenadas es el punto:

$$\begin{cases} y = 4 + 3x - x^2 \\ x = 0 \end{cases} \quad B(0, 4)$$

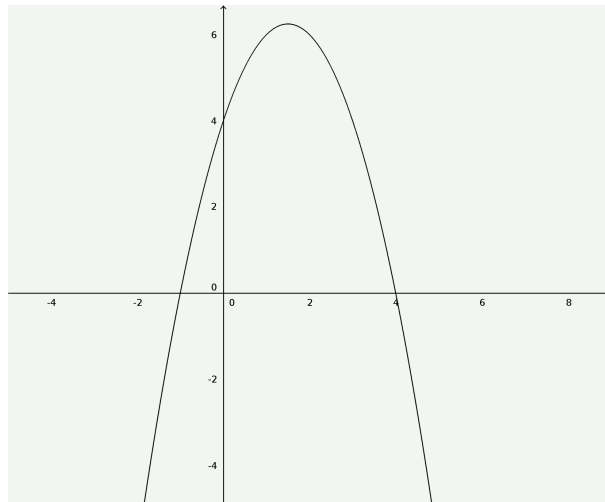
Las intersecciones con el eje de abscisas son:

$$\begin{cases} y = 4 + 3x - x^2 \\ y = 0 \end{cases} \quad A_1(-1, 0) \quad \text{y} \quad A_2(4, 0)$$

El vértice tiene coordenadas

$$x_0 = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}; \quad y_0 = 4 + \frac{3 \cdot 3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

La gráfica es:



**Ejercicio 6.** Representar gráficamente  $y = \frac{x+5}{1-x}$ .

**Solución:**

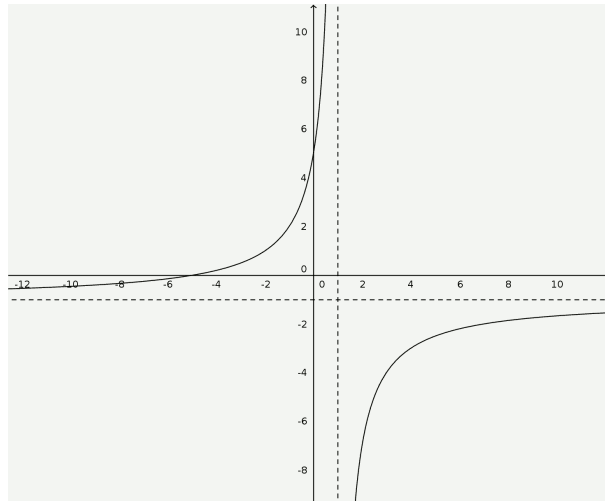
Las asíntotas son las rectas  $x = 1$  e  $y = -1$ .

Las intersecciones con los ejes son los puntos:

$$\begin{cases} y = \frac{x+5}{1-x} \\ y = 0 \end{cases} ; \quad A(-5, 0)$$

$$\begin{cases} y = \frac{x+5}{1-x} \\ x = 0 \end{cases} ; \quad B(0, 5)$$

La gráfica es:



**Ejercicio 7.** Calcular lo siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^3 - 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4}$$

**Solución:**

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^3} = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 1}{x+2} = \frac{9}{4}$$



**Ejercicio 8.** Calcular lo siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-2}{3x+1} \right)^{2x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+2}{x+3} \right)$$

**Solución:**

(a) Se trata de una indeterminación del tipo  $1^\infty$ . Efectuando la división obtenemos de cociente 1 y de resto  $-3$ . Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-2}{3x+1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{3x+1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{3x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{2x} = e^{-2}$$

(b) Este límite es una indeterminación  $\infty - \infty$ . Efectuando la resta:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+2}{x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(x+3) - (x^2+2)(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

