Matemáticas 4ºESO.
Exámenes

Curso 2016-2017

1. Radicales

Ejercicio 1. *Calcular*

$(a)\ \left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$ $(b)\ (-27)^{\frac{2}{3}}$ $(c)\ \left(\dfrac{5}{6}\right)^{0}$

Solución:

$(a)\ \left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{8}{27}\right)^{2}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2} = \dfrac{4}{9}$

$(b)\ (-27)^{\frac{2}{3}}\ \sqrt[3]{(-27)^2} = (-3)^2 = 9$

$(c)\ \left(\dfrac{5}{6}\right)^{0} = 1$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Calcular:*

$(a)\ \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-1}$ $(b)\ \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-2}$ $(c)\ \left(15+\dfrac{5}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

Solución:

$(a)\ \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-1} = \dfrac{6}{5}$

$(b)\ \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-2} = \left(\dfrac{6}{5}\right)^{2} = \dfrac{36}{25}$

$(c)\ \left(15+\dfrac{5}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{125}{8}\right)^{2}} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{2} = \dfrac{25}{4}$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *Calcular:*

$(a)\ \left(\dfrac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $(b)\ \left(2+\dfrac{7}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$ $(c)\ (125)^{-\frac{2}{3}}$

Solución:

$(a)\ \left(\dfrac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{25}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{5}{4}$

$(b)\ \left(2+\dfrac{7}{81}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{169}{81}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{169}{81}} = \dfrac{13}{9}$

$(c)\ (125)^{-\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{1}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{125}\right)^{2}} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{2} = \dfrac{1}{25}$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *Calcular:*

(a) $(1296)^{\frac{1}{4}}$ (b) $\left(\frac{512}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$ (c) $\left(3+\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$

Solución:

(a) $(1296)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{1296} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} = 6$

(b) $\left(\frac{512}{343}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{343}{512}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{343}{512}\right)^2} = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$

(c) $\left(3+\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{49}{16}\right)^3} = \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{343}{64}$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *Racionalizar los denominadores y simplificar:*

(a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{21}}$ (b) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{132}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$

Solución:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{3}{21}} = \sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

(b) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{132}} = \sqrt{\frac{11}{132}} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. *Racionalizar los denominadores:*

(a) $\frac{7}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}$ (b) $\frac{7}{2+\sqrt{7}}$ (c) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{11}-4}$

Solución:

(a) $\frac{7}{\sqrt{13}-\sqrt{3}} = \frac{7(\sqrt{13}+\sqrt{3})}{(\sqrt{13}-\sqrt{3})(\sqrt{13}+\sqrt{3})} = \frac{7(\sqrt{13}+\sqrt{3})}{13-3} = \frac{7(\sqrt{13}+\sqrt{3})}{10}$

(b) $\frac{7}{2+\sqrt{7}} = \frac{7(2-\sqrt{7})}{(2+\sqrt{7})(2-\sqrt{7})} = \frac{7(2-\sqrt{7})}{4-7} = \frac{-7(2-\sqrt{7})}{3}$

(c) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{11}-4} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{11}+4)}{(\sqrt{11}-4)(\sqrt{11}+4)} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{11}+4)}{11-16} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{11}+4)}{-5}$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. *Calcular:*

$$3\sqrt{8}+5\sqrt{72}+8\sqrt{50}-4\sqrt{18}+4\sqrt{2}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&3\sqrt{8}+5\sqrt{72}+8\sqrt{50}-4\sqrt{18}+4\sqrt{2}\\
&\qquad = 3\sqrt{4\cdot 2}+5\sqrt{36\cdot 2}+8\sqrt{25\cdot 2}-4\sqrt{9\cdot 2}+4\sqrt{2}\\
&\qquad = 6\sqrt{2}+30\sqrt{2}+40\sqrt{2}-12\sqrt{2}+4\sqrt{2}\\
&\qquad = 68\sqrt{2}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. *Calcular:*

$$2\sqrt{12}-3\sqrt{75}+5\sqrt{27}-3\sqrt{48}+4\sqrt{3}+\sqrt{243}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{12}-3\sqrt{75}+5\sqrt{27}-3\sqrt{48}+4\sqrt{3}+\sqrt{243}\\
&\qquad = 2\sqrt{4\cdot 3}-3\sqrt{25\cdot 3}+5\sqrt{9\cdot 3}-3\sqrt{16\cdot 3}+4\sqrt{3}+\sqrt{81\cdot 3}\\
&\qquad = 4\sqrt{3}-15\sqrt{3}+15\sqrt{3}-12\sqrt{3}+4\sqrt{3}+9\sqrt{3}\\
&\qquad = 5\sqrt{3}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. *Calcular:*

$$\frac{\sqrt{20}}{3}+\frac{\sqrt{45}}{2}-\frac{5\sqrt{80}}{6}+\frac{\sqrt{125}}{3}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{20}}{3}+\frac{\sqrt{45}}{2}-\frac{5\sqrt{80}}{6}+\frac{\sqrt{125}}{3}\\
&\qquad = \frac{1}{3}\sqrt{4\cdot 5}+\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot 5}-\frac{5}{6}\sqrt{16\cdot 5}+\frac{1}{3}\sqrt{25\cdot 5}\\
&\qquad = \frac{2}{3}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\sqrt{5}-\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{5}{3}\sqrt{5}\\
&\qquad = \left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{10}{3}+\frac{5}{3}\right)\sqrt{5}\\
&\qquad = \frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. *Calcular:*

$$3\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{54}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&3\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{54}\\
&\qquad = 3\sqrt[3]{64\cdot 2}+2\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{8\cdot 2}+3\sqrt[3]{27\cdot 2}\\
&\qquad = 12\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{2}\\
&\qquad = 13\sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

2. Radicales y logaritmos

Ejercicio 1. *Simplificar extrayendo factores del radical:*

$$\sqrt[5]{1024a^{12}b^8c^3}$$

Solución:

$$\sqrt[5]{1024a^{12}b^8c^3} = \sqrt[5]{2^{10}a^{10}a^2b^5b^3c^3} = 2^2a^2b\sqrt[5]{a^2b^3c^3} = 4a^2b\sqrt[5]{a^2b^3c^3}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Calcular:*

$$2\sqrt{12} + 3\sqrt{75} - 3\sqrt{27} - 2\sqrt{48} + 4\sqrt{3} + \sqrt{243}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{12} + 3\sqrt{75} - 3\sqrt{27} - 2\sqrt{48} + 4\sqrt{3} + \sqrt{243} \\ &= 2\sqrt{4\cdot 3} + 3\sqrt{25\cdot 3} - 3\sqrt{9\cdot 3} - 2\sqrt{16\cdot 3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{81\cdot 3} \\ &= 4\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 9\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 9\sqrt{3} \\ &= 15\sqrt{3} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *Racionalizar:*

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

Solución:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3+2+2\sqrt{6}}{3-2} = 5 + 2\sqrt{6}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *Racionalizar y simplificar:*

$$7\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\sqrt{\frac{5}{3}} - 3\sqrt{15} + 2\sqrt{60}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 7\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\sqrt{\frac{5}{3}} - 3\sqrt{15} + 2\sqrt{60} &= \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - 3\sqrt{15} + 2\cdot 2\sqrt{15} \\ &= \frac{7\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}\sqrt{3}}{3} - 3\sqrt{15} + 4\sqrt{15} \\ &= \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{3} - 3 + 4\right)\sqrt{15} \\ &= \frac{46}{15}\sqrt{15} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *Calcular:*

$$\sqrt[3]{13+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt[3]{13-2\sqrt{11}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{13+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt[3]{13-2\sqrt{11}} &= \sqrt[3]{(13+2\sqrt{11})(13-2\sqrt{11})}\\ &= \sqrt[3]{169-44}\\ &= \sqrt[3]{125}\\ &= 5\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. *Calcular los siguientes logaritmos:*

(*a*) $\log_2 64$ (*b*) $\log_7 343$ (*c*) $\log_2\sqrt{2}$ (*d*) $\log_5(-5)$

Solución:

(*a*) $\log_2 64 = 6$

(*b*) $\log_7 343 = 3$

(*c*) $\log_2\sqrt{2} = \frac{1}{2}$

(*d*) $\log_5(-5)$ (no existe)

♠♠♠♠

Ejercicio 7. *Calcular los siguientes logaritmos:*

(*a*) $\log_2\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (*b*) $\log_3\dfrac{1}{81}$

Solución:

$$\log_2\frac{\sqrt{2}}{4} = \log_2\sqrt{2} - \log_2 4 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\log_3\frac{1}{81} = \log_3 1 - \log_3 81 = 0 - 4 = -4$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. *Calcular los siguientes logaritmos:*

(a) $\log_{16} 8$

(b) $\log_{25} \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Solución:

(a) $\log_{16} 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 16} = \dfrac{3}{4}$

(b) $\log_{25} \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}}{\log_5 25} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2} = -\dfrac{1}{4}$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. *Conocido* $\log 5 = 0{,}6990$*, hallar* $\log 2$ *y* $\log 12{,}5$*.*

Solución:

$$\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - 0{,}6990 = 0{,}3010$$

$$\begin{aligned} \log 12{,}5 &= \log \frac{25}{2} = \log 25 - \log 2 = \log 5^2 - \log 2 = 2\log 5 - \log 2 \\ &= 2 \cdot 0{,}6990 - 0{,}3010 = 1{,}0970 \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. *Despejar* x *en:*

(a) $\log_9 x = \dfrac{1}{2}$

(b) $7^{1-x^2} = 1$

Solución:

(a) $\log_9 x = \dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = 9^{\frac{1}{2}} = +\sqrt{9} = 3$

(b) $7^{1-x^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 - x^2 = \log_7 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1$

♠♠♠♠

3. Polinomios y ecuaciones

Ejercicio 1. *Cacular el cociente y el resto de la división:*

$$(x^4 - 5x^3 + 7x - 4) \div (x^2 - 4x - 3)$$

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -5x^3 & +0x^2 & +7x & -4 & x^2-4x-3 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +4x^3 & +3x^2 & & & x^2-x-1 \\ \cline{1-3}
 & -x^3 & +3x^2 & +7x & & \\
 & x^3 & -4x^2 & -3x & & \\ \cline{2-5}
 & & -x^2 & +4x & -4 & \\
 & & x^2 & -4x & -3 & \\ \cline{3-5}
 & & & & -7 &
\end{array}
$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Calcula el valor numérico de* $-2x^3+5x^2+3x-2$ *para* $x=-2$ *y* $x=\frac{1}{2}$.

Solución:

Mediante la regla de Ruffini:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & -2 & 5 & 3 & -2 \\
-2 & & 4 & -18 & 30 \\ \hline
 & -2 & 9 & -15 & 28
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & -2 & 5 & 3 & -2 \\
\frac{1}{2} & & -1 & 2 & \frac{5}{2} \\ \hline
 & -2 & 4 & 5 & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

En el primer caso, el valor numérico es 28 y en el segundo $-\frac{1}{2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *¿Qué valor habrá que dar a* a *para que el polinomio* $x^3+6x^2-3ax-1$ *sea divisible por* $x-6$*?*

Solución:

Si el polinomio es divisible por $x-6$, $x=6$ es una raíz del polinomio:

$$
\begin{aligned}
&6^3+6\cdot 6^2-3a\cdot 6-1=0\\
&216+216-18a-1=0\\
&431=18a\\
&a=\frac{431}{18}
\end{aligned}
$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *Determinar* a *para que en el polinomio* $3x^4-4x^2+x-a$ *de un resto* 15 *al dividirlo por* $x-2$.

Solución:

Si el resto es 15, el valor numérico para $x=2$ es 15:

$$
\begin{aligned}
&3\cdot 2^4-4\cdot 2^2+2-a=15\\
&48-16+2-a=15\\
&34-15=a\\
&a=19
\end{aligned}
$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *Factorizar el polinomio* $4x^3+9x^2-x-6$. *Expresar la solución con números enteros.*

Solución:

Buscamos una raíz entre los divisores de 6:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 9 & -1 & -6 \\ -2 & & -8 & -2 & 6 \\ \hline & 4 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

Así tenemos una primera factorización:

$$4x^3+9x^2-x-6=(x+2)(4x^2+x-3)$$

Calculamos las raíces del polinomio de segundo grado:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{8}=\frac{-1\pm 7}{8}$$

lo que nos da dos raíces $x=-1$ y $x=\frac{3}{4}$. Por el teorema del factor:

$$4x^3+9x^2-x-6=(x+2)(4x^2+x-3)=(x+2)\cdot 4(x+1)\left(x-\frac{3}{4}\right)=(x+2)(x+1)(4x-3)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. *Resolver la ecuación:*

$$\frac{x}{6}-\frac{2x-1}{6}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0$$

Solución:

Quitamos paréntesis:

$$\frac{x}{6}-\frac{2x-1}{6}-\frac{2}{15}+\frac{x}{9}=0$$

Ahora quitamos denominadores multiplicando toda la ecuación por 90:

$$\begin{aligned}
&\frac{90x}{6}-\frac{90(2x-1)}{6}-\frac{90\cdot 2}{15}+\frac{90x}{9}=0\\
&15x-15(2x-1)-6\cdot 2+10x=0\\
&15x-30x+15-12+10x=0\\
&-5x+3=0\\
&x=\frac{3}{5}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. *Resolver la ecuación*

$$-3x^2+5x-2=0$$

Solución:

Multiplicando la ecuación por -1:

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

Resolvemos:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

Lo que nos da $x = 1$ y $x = \frac{2}{3}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. *Resolver la ecuación:*

$$\sqrt{3x+1} - 2 = \sqrt{x-1}$$

Solución:

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{3x+1} - 2)^2 = (\sqrt{x-1})^2 \\
&3x + 1 + 4 - 4\sqrt{3x+1} = x - 1 \\
&3x + 5 - x + 1 = 4\sqrt{3x+1} \\
&2x + 6 = 4\sqrt{3x+1} \\
&x + 3 = 2\sqrt{3x+1}
\end{aligned}$$

Elevando de nuevo ambos miembros al cuadrado

$$\begin{aligned}
&(x+3)^2 = (2\sqrt{3x+1})^2 \\
&x^2 + 9 + 6x = 4(3x+1) \\
&x^2 - 6x + 5 = 0
\end{aligned}$$

Lo que da dos soluciones $x = 1$ y $x = 5$. Puede comprobarse que ambas son válidas.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. *Resolver la ecuación:*

$$4x^4 + 13x^2 + 3 = 0$$

Solución:

Es una ecuación bicuadrada. Despejamos x^2:

$$x^2 = \frac{-13 \pm \sqrt{169-48}}{8} = \frac{-13 \pm 11}{8}$$

y tenemos

$$\begin{aligned}
&x^2 = -\frac{1}{4} \\
&x^2 = -3
\end{aligned}$$

Puesto que no existen raíces de números negativos, la ecuación no tiene solución.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. *Resolver el sistema:*

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 7 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

Solución:

Por sustitución. Despejamos y en la segunda ecuación:

$$2x - 3y = -4\ ; \qquad -3y = -2x - 4\ ; \qquad 3y = 2x + 4\ ; \qquad y = \frac{2x+4}{3}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} &3x^2 + \frac{(2x+4)^2}{9} = 7 \qquad\qquad \text{quitando denominadores:} \\ &27x^2 + (2x+4)^2 = 63 \\ &27x^2 + 4x^2 + 16 + 16x = 63 \\ &31x^2 + 16x - 47 = 0 \end{aligned}$$

Se puede resolver mediante la fórmula pero, como vemos que hay una solución $x = 1$, factorizamos:

$$(x-1)(31x+47) = 0$$

Hay dos soluciones:

$$x = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2\cdot 1 + 4}{3} = 2$$

$$x = \frac{-47}{31} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2\cdot\frac{-47}{31} + 4}{3} = \frac{-2\cdot 47 + 4\cdot 31}{3\cdot 31} = \frac{30}{93} = \frac{10}{31}$$

Las soluciones son $(1, 2)$ y $\left(-\frac{47}{31}, \frac{10}{31}\right)$.

♠♠♠♠

4. Ecuaciones e inecuaciones

Ejercicio 1. *Resolver las ecuaciones:*

(a) $\dfrac{x(x-3)}{2} + \dfrac{x(x-2)}{4} = \dfrac{x(3x-1)}{8}$ $\qquad$ (b) $\dfrac{4(x+1)}{8} - \dfrac{x+4}{2} = \dfrac{3}{8} - \dfrac{x(x+1)}{2}$

Solución:

(a) Quitamos denominadores y resolvemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x-2)}{4} = \frac{x(3x-1)}{8}\\
&\frac{8x(x-3)}{2} + \frac{8x(x-2)}{4} = \frac{8x(3x-1)}{8}\\
&4x(x-3) + 2x(x-2) = x(3x-1)\\
&4x^2 - 12x + 2x^2 - 4x = 3x^2 - x\\
&3x^2 - 15x = 0\\
&x = 0\ ; \quad x = 5
\end{aligned}$$

(b) De forma similar:

$$\begin{aligned}
&\frac{4(x+1)}{8} - \frac{x+4}{2} = \frac{3}{8} - \frac{x(x+1)}{2}\\
&\frac{8\cdot 4(x+1)}{8} - \frac{8(x+4)}{2} = \frac{8\cdot 3}{8} - \frac{8x(x+1)}{2}\\
&4(x+1) - 4(x+4) = 3 - 4x(x+1)\\
&4x + 4 - 4x - 16 = 3 - 4x^2 - 4x\\
&4x^2 + 4x - 15 = 0\\
&x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+240}}{8} = \frac{-4 \pm 16}{8}\ ; \qquad x = \frac{3}{2},\ x = -\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Resolver:*

(a) $\sqrt{4x-3} - \sqrt{x-2} = 2$ $\qquad$ (b) $2\log 2x - 1 = \log x$

Solución:

(a) Despejamos la primera raíz y elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{4x-3} = 2 + \sqrt{x-2}\\
&\left(\sqrt{4x-3}\right)^2 = \left(2 + \sqrt{x-2}\right)^2\\
&4x - 3 = 4 + 4\sqrt{x-2} + x - 2\\
&3x - 5 = 4\sqrt{x-2}
\end{aligned}$$

Elevando de nuevo ambos miembros al cuadrado:

$$\begin{aligned}
&(3x-5)^2 = (4\sqrt{x-2})^2\\
&9x^2 - 30x + 25 = 16(x-2)\\
&9x^2 - 46x + 57 = 0\\
&(x-3)(9x-19) = 0
\end{aligned}$$

Las soluciones son $x = 3$ (válida) y $x = \frac{19}{9}$ (también válida).

(b) Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned}
&2\log 2x-1=\log x\\
&\log 4x^2-\log 10=\log x\\
&\log\frac{4x^2}{10}=\log x\\
&\frac{4x^2}{10}=x\\
&4x^2=10x
\end{aligned}$$

Las soluciones son $x=0$ (no válida) y $x=\frac{5}{2}$ (válida).

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *Resolver*

(a) $6x^3+13x^2-4=0$

(b) $3^{x+1}+\dfrac{1}{3^x}=4$

Solución:

(a) Buscamos una raíz entre los divisores de 4:

	6	13	0	-4
-2		-12	-2	4
	6	1	-2	0

Factorizamos el polinomio:

$$(x+2)(6x^2+x-2)=0$$

Igualando a cero el segundo factor:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{12}=\frac{-1\pm 7}{12}$$

Las soluciones son $x=-2$, $x=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{2}{3}$.

(b) Haciendo $3^x=t$ la ecuación se escribe:

$$3\cdot t+\frac{1}{t}=4\ ;\qquad 3t^2-4t+1=0\quad\Longrightarrow\quad t=1\quad t=\frac{1}{3}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
3^x=1\quad&\Longrightarrow\quad x=\log_3 1=0\\
3^x=\frac{1}{3}\quad&\Longrightarrow\quad x=\log_3\frac{1}{3}=-1
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:*

$$(a)\ \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x + \dfrac{2}{y} = 1 \\ y + \dfrac{1}{x} = 6 \end{cases}$$

Solución:

(a) Despejamos y de la primera ecuación:

$$y = \frac{2x-1}{3}$$

y sustituimos en la segunda:

$$x^2 - \frac{(2x-1)^2}{9} = 3\ ; \qquad 9x^2 - (2x-1)^2 = 27\ ; \qquad 5x^2 + 4x - 28 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+560}}{10} = \frac{-4 \pm 24}{10}$$

que nos da las soluciones $x = 2$ y $x = -\frac{28}{10} = -\frac{14}{5}$.
Para $x = 2$:

$$y = \frac{2 \cdot 2 - 1}{3} = 1$$

y para $x = -\frac{14}{5}$:

$$y = \frac{2 \cdot \frac{-14}{5} - 1}{3} = \frac{-28-5}{15} = -\frac{33}{15} = -\frac{11}{5}$$

Las soluciones son $(2,1)$ y $\left(-\frac{14}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

(b) Quitamos denominadores:

$$\begin{cases} xy + 2 = y \\ xy + 1 = 6x \end{cases}$$

Restando las dos ecuaciones resulta:

$$1 = y - 6x\ ; \qquad y = 6x + 1$$

Sustituyendo en la segunda ecuación resulta:

$$\begin{aligned} &x(6x+1) + 1 = 6x \\ &6x^2 + x + 1 - 6x = 0 \\ &6x^2 - 5x + 1 = 0 \\ &x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ ; \quad x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Las soluciones son $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *Resolver las inecuaciones:*

(a) $\dfrac{x+1}{9-x^2} < 0$ (b) $x(x+1)^2(x-3) \geq 0$

Solución:

(a) La raíz del numerador es $x = -1$. El denominador tiene dos raíces $x = -3$ y $x = 3$. El esquema de signos es el siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} & \nexists & & 0 & & \nexists & \\ + & | & - & | & + & | & - \\ & -3 & & -1 & & 3 & \end{array}$$

La solución es $x \in (-3, -1) \cup (3, \infty)$.

(b) Las raíces del polinomio son $x = -1$ (doble), $x = 0$ y $x = 3$. El esquema de signos es el siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ + & | & + & | & - & | & + \\ & -1 & & 0 & & 3 & \end{array}$$

La solución es $x \in (-\infty, 0] \cup [3, \infty)$

♠♠♠♠

5. Logaritmos, polinomios y ecuaciones

Ejercicio 1. *Racionalizar los denominadores y calcular:*

$$\frac{2}{2+\sqrt{2}} - \frac{3}{3+\sqrt{6}} - \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{2+\sqrt{2}} - \frac{3}{3+\sqrt{6}} - \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\
&\quad = \frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} - \frac{3(3-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})} - \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} \\
&\quad = \frac{2(2-\sqrt{2})}{4-2} - \frac{3(3-\sqrt{6})}{9-6} - \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} \\
&\quad = \frac{2(2-\sqrt{2})}{2} - \frac{3(3-\sqrt{6})}{3} - \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \\
&\quad = 2 - \sqrt{2} - (3-\sqrt{6}) - (\sqrt{6}-\sqrt{2}) \\
&\quad = -1
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Calcular los siguientes logaritmos:*

$(a)\ \log_2 \frac{1}{\sqrt{8}}$ $(b)\ \log_3 \frac{3}{\sqrt{3}}$ $(c)\ \log_2 8\sqrt{2}$ $(d)\ \log_4 32$

Solución:

$(a)\ \log_2 \dfrac{1}{\sqrt{8}} = \log_2 1 - \log_2 \sqrt{8} = -\dfrac{1}{2}\log_2 8 = -\dfrac{3}{2}$

$(b)\ \log_3 \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \log_3 \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}$

$(c)\ \log_2 8\sqrt{2} = \log_2 8 + \log_2 \sqrt{2} = 3 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$

$(d)\ \log_4 32 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 32} = \dfrac{2}{5}$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *Obtener el cociente y el resto de:*

$$(2x^4 - 3x^2 + x - 5) \div (x^2 - x + 3)$$

Solución:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^4 & +\ 0x^3 & -\ 3x^2 & +\ x & -\ 5 & & x^2 - x + 3 \\ \cline{7-7}
-\ 2x^4 & +\ 2x^3 & -\ 6x^2 & & & & 2x^2 + 2x - 7 \\ \cline{1-3}
 & 2x^3 & -\ 9x^2 & +\ x & & & \\
 & -\ 2x^3 & +\ 2x^2 & -\ 6x & & & \\ \cline{2-5}
 & & -\ 7x^2 & -\ 5x & -\ 5 & & \\
 & & 7x^2 & -\ 7x & +\ 21 & & \\ \cline{3-5}
 & & & -\ 12x & +\ 16 & &
\end{array}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *Simplificar la fracción*

$$\frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2 + x}$$

Solución:

$$\frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{x(x^2 - 1)}{x(x^2 + 2x + 1)} = \frac{x(x-1)(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *Calcular a para que el polinomio $2x^3 - ax^2 + 3x + a$ sea divisible por $x + 1$.*

Solución:

Si el polinomio es divisible por $x+1$, tiene una raíz $x=-1$. Entonces:

$$2(-1)^3 - a(-1)^2 + 3(-1) + a = 0\ ; \qquad -2 - a - 3 + a = 0\ ; \qquad 0 \cdot a = 5$$

El problema no tiene solución.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. *Resolver la ecuación:*

$$\frac{5-x}{2} - \frac{x+3}{6} = \frac{9-x}{4} - \frac{6x+2}{16}$$

Solución:

$$\frac{48(5-x)}{2} - \frac{48(x+3)}{6} = \frac{48(9-x)}{4} - \frac{48(6x+2)}{16}$$

$$24(5-x) - 8(x+3) = 12(9-x) - 3(6x+2)$$

$$120 - 24x - 8x - 24 = 108 - 12x - 18x - 6$$

$$96 - 32x = 102 - 30x$$

$$-2x = 6 \quad \Longrightarrow \quad x = -3$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. *Resolver la ecuación:*

$$\frac{(2x-1)^2}{4} - \frac{(3x+1)^2}{9} = \frac{1}{6}$$

Solución:

$$\frac{(2x-1)^2}{4} - \frac{(3x+1)^2}{9} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{36(2x-1)^2}{4} - \frac{36(3x+1)^2}{9} = \frac{36 \cdot 1}{6}$$

$$9(2x-1)^2 - 4(3x+1)^2 = 6$$

$$9(4x^2 - 4x + 1) - 4(9x^2 + 6x + 1) - 6 = 0$$

$$36x^2 - 36x + 9 - 36x^2 - 24x - 4 - 6 = 0$$

$$-60x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{60}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. *Resolver la ecuación:*

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$$

Solución:

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$$
$$\sqrt{3x+1} = \sqrt{2x-1} + 1$$
$$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2 = \left(\sqrt{2x-1} + 1\right)^2$$
$$3x + 1 = 2x - 1 + 1 + 2\sqrt{2x-1}$$
$$x + 1 = 2\sqrt{2x-1}$$
$$x^2 + 2x + 1 = 4(2x-1)$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Las soluciones de la ecuación son $x = 1$ y $x = 5$. Ambas son válidas.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. *Resolver el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Solución:

Despejamos una incógnita en la segunda ecuación

$$y = \frac{2}{x}$$

y sustituimos en la primera

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 5\ ; \qquad x^4 + 4 = 5x^2\ ; \qquad x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Las soluciones de la ecuación bicuadrada son $y^2 = 1$ e $y^2 = 4$, o sea, $y = -1$, $y = 1$, $y = -2$, $y = 2$. Calculamos los correspondientes valores de x y resultan las soluciones:

$$(-2,-1), \quad (2,1), \quad (-1,-2), \quad (1,2)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. *Resolver la inecuación:*

$$\frac{1-x}{x^2 - 3x - 4} \geq 0$$

Solución:

El numerador tiene una raíz $x = 1$ y el denominador dos raíces $x = -1$ y $x = 4$. Todas las raíces son simples.

El esquema de signos es el siguiente

$$\begin{array}{ccccccc} & \nexists & & 0 & & \nexists & \\ + & | & - & | & + & | & - \\ & -1 & & 1 & & 4 & \end{array}$$

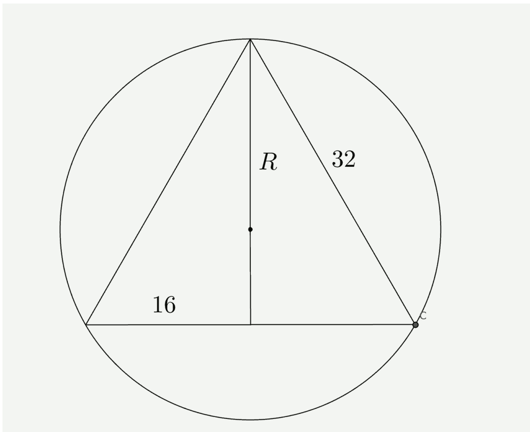
La solución de la inecuación es $x \in (-\infty, -1) \cup [1, 4)$.

♠♠♠♠

6. Trigonometría

Ejercicio 1. *Calcular la longitud de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero de lado* 32 cm.

Solución:



La altura del triángulo equilátero es $16\sqrt{3}$. Puesto que el radio es $\frac{2}{3}$ de la altura:

$$R = \frac{2 \cdot 16\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

La longitud de la circunferencia es:

$$l = 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} \simeq 116 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *En un triángulo rectángulo los catetos mide* 6 *y* 8 cm. *Calcular la altura relativa a la hipotenusa.*

Solución:

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide:

$$a = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}$$

Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa se obtienen por el teorema del cateto:

$$b^2 = am \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{b^2}{a} = \frac{36}{10}$$

$$c^2 = an \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{c^2}{a} = \frac{64}{10}$$

Por el teorema de la altura $h^2 = mn$ y por tanto:

$$h^2 = \frac{36}{10} \cdot \frac{64}{10} \quad \Longrightarrow \quad h = \sqrt{\frac{36}{10} \cdot \frac{64}{10}} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}80 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *Calcular el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio* 40 cm.

Solución:

Si el radio de la circunferencia es 40, la diagonal del cuadrado es 80 cm. Aplicando la fórmula de las diagonales para el área:

$$S = \frac{80 \cdot 80}{2} = 3200 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4 *Expresar en radianes el ángulo* $\varphi = 153^o51'42''$.

Solución:

Primero pasamos el ángulo a grados:

$$\varphi = \left(153 + \frac{51}{60} + \frac{42}{3600}\right)$$

y ahora a radianes:

$$\varphi = \left(153 + \frac{51}{60} + \frac{42}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180} \simeq 2{,}69$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo de catetos* $b = 37$ cm *y* $c = 41$ cm.

Solución:

$$\operatorname{tg} B = \frac{37}{41} \quad \Longrightarrow \quad B = \text{ artg}\,\frac{37}{41} \simeq 42^o3'52''$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{41}{37} \quad \Longrightarrow \quad B = \text{ artg}\,\frac{41}{37} \simeq 47^o56'8''$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. *Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo de cateto* $c = 26$ cm *e hipotenusa* $a = 65$ cm.

Solución:

$$\cos B = \frac{26}{65} \quad \Longrightarrow \quad B = \text{ arcos}\,\frac{26}{65} \simeq 66^o25'19''$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{26}{65} \quad \Longrightarrow \quad B = \text{ arsen}\,\frac{26}{65} \simeq 23^o34'41''$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. *En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide* 43 cm *y el ángulo* $C = 63^o26'$. *Calcular los catetos* b *y* c.

Solución:

$$b = 43 \cos 63^o26' \simeq 19{,}2 \text{ cm}$$

$$c = 43 \operatorname{sen} 63^o26' \simeq 38{,}5 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. *En un triángulo rectángulo el cateto* $b = 89$ cm *y el ángulo* $C = 28^o51'$. *Calcular la hipotenusa.*

Solución:

$$a = \frac{b}{\cos C} = \frac{89}{\cos 28^o51'} \simeq 102 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. *Calcular el área de un pentágono regular cuya apotema mide* 61 cm.

Solución:

Calculamos el lado del pentágono:

$$\frac{l}{2} = 61 \cdot \operatorname{tg} 36^o \quad \Longrightarrow \quad l = 2 \cdot 61 \cdot \operatorname{tg} 36^o \simeq 88{,}6 \text{ cm}$$

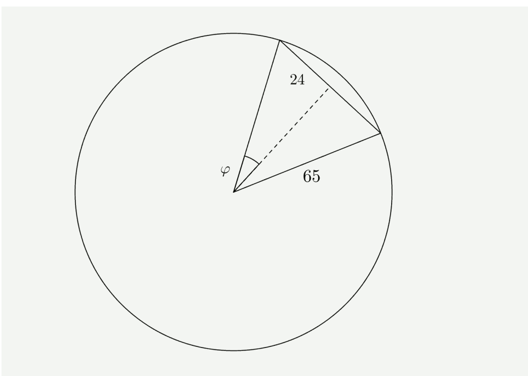
El área es el perímetro por la apotema dividido entre 2:

$$S = \frac{5l \cdot a}{2} \simeq 13500 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. *Calcular el área de un segmento circular limitado por una cuerda de* 48 cm *en una circunferencia de* 65 cm *de radio.*

Solución:



Calculamos el ángulo φ:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\frac{24}{65}\ ; \qquad \frac{\varphi}{2}=\ \operatorname{arsen}\frac{24}{65}\ ; \qquad \varphi=2\ \operatorname{arsen}\frac{24}{65}\simeq 43{,}3^{\circ}$$

Para calcular el área del segmento circular necesitamos poner el ángulo en radianes:

$$\varphi\simeq 0{,}756$$

El área del segmento es:

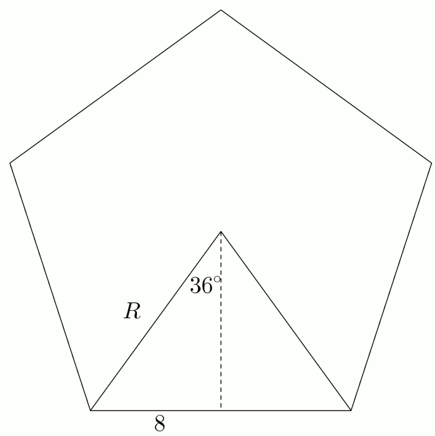
$$S=\frac{1}{2}\,r^2\,(\varphi-\operatorname{sen}\varphi)\simeq 148\ \mathrm{cm}^2$$

♠♠♠♠

7. Trigonometría

Ejercicio 1. *Calcular el área de un pentágono regular de* 16 cm *de lado.*

Solución:



El radio de la circunferencia circunscrita mide:

$$R=\frac{8}{\operatorname{sen}36^{\circ}}\simeq 13{,}6\ \mathrm{cm}$$

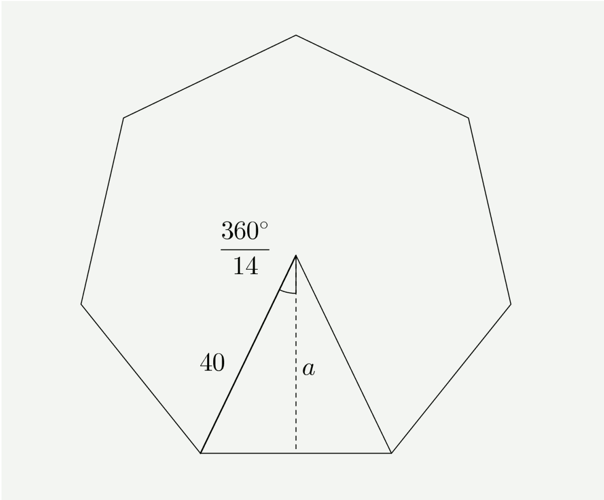
El área del pentágono se puede obtener como 5 veces el área del triángulo isósceles:

$$S=5\,\frac{1}{2},R^2\operatorname{sen}72^{\circ}\simeq 440\ \mathrm{cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Calcular la apotema de un heptágono regular inscrito en una circunferencia de* 40 cm *de radio.*

Solución:



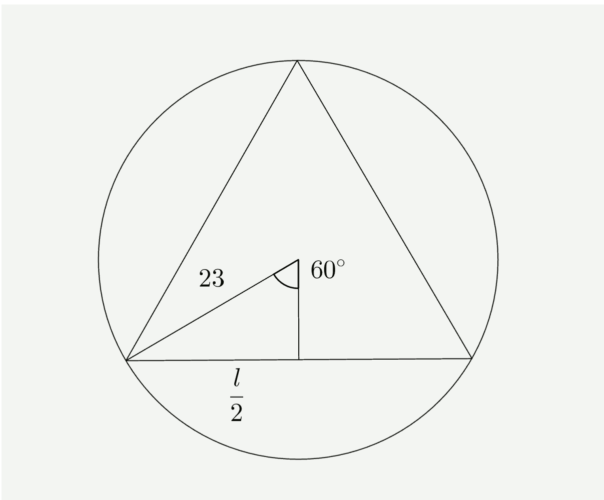
La apotema mide:

$$a = 40 \cos \frac{360^o}{14} \simeq 36{,}0 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *Calcular el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de* 23 cm *de radio.*

Solución:



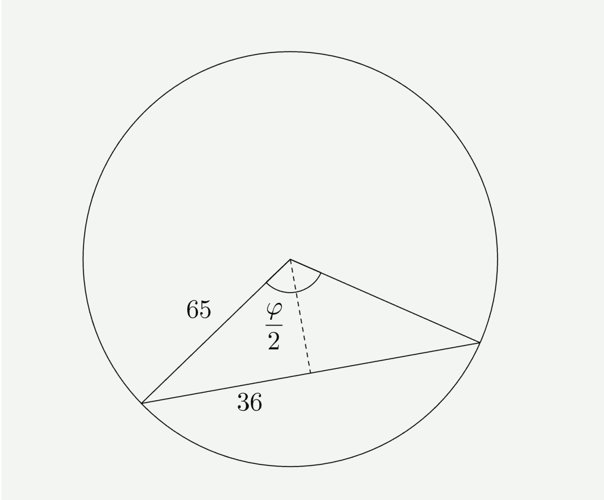
De la figura se deduce:

$$\frac{l}{2} = 23 \operatorname{sen} 60^o = \frac{23\sqrt{3}}{2}\ ; \qquad l = 23\sqrt{3} \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *Calcular el área de un segmento circular encerrado por una cuerda de* 72 cm *en una circunferencia de* 65 cm *de radio.*

Solución:



Calculamos el ángulo:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\frac{36}{65}\ ; \qquad \frac{\varphi}{2}=\frac{36}{65}\ ; \qquad \varphi=2\ \operatorname{arsen}\frac{36}{65}$$

Calculado el ángulo podemos obtener el área del segmento mediante:

$$S=\frac{1}{2}\,r^2\,(\varphi-\operatorname{sen}\varphi)$$

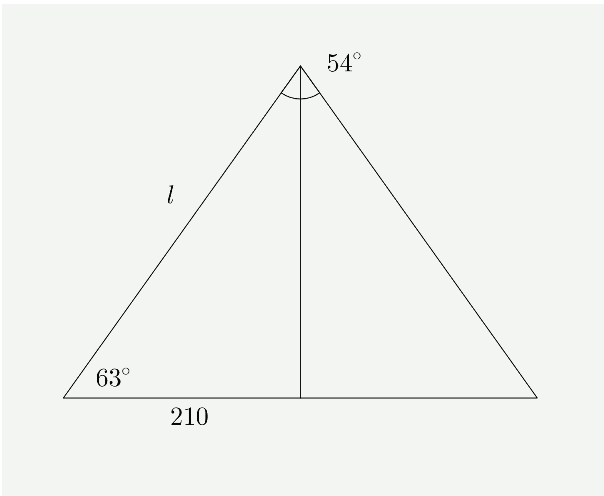
donde el primer φ debe estar expresaado en radianes y el segundo en el modo de la calculadora. Sustituyendo:

$$S=\frac{1}{2}\,65^2\,(\varphi-\operatorname{sen}\varphi)\simeq 532\ \mathrm{cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *En un triángulo isósceles la base mide* 420 cm *y los ángulos iguales* 63^o*. Calcular la longitud de los lados iguales y el área del triángulo.*

Solución:



Calculamos los lados iguales:

$$l=\frac{210}{\cos 63^o}\simeq 463\ \mathrm{cm}$$

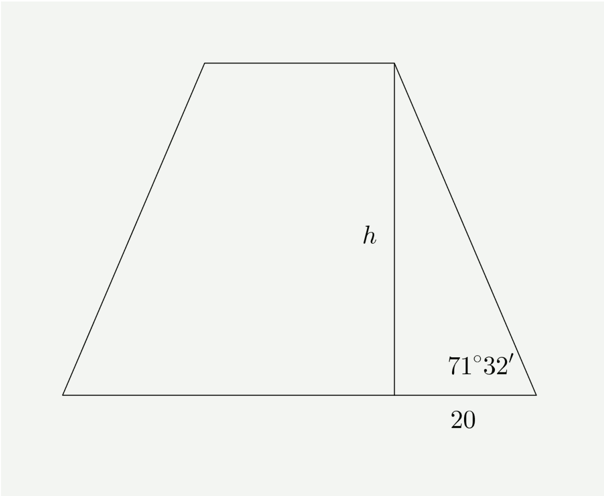
El área del triángulo mide:

$$S = \frac{1}{2}\, l^2 \operatorname{sen} 54^{\text{o}} \simeq\simeq 86600 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. *En un trapecio isósceles las bases miden* 45 *y* 85 cm *respectivamente y uno de sus mide* $71^o 32'$*. Calcular el área del trapecio.*

Solución:



La alturadel trapecio mide:

$$h = 20 \operatorname{tg} 71^{\text{o}} 32'$$

y el área:

$$S = \frac{(85 + 45) \cdot h}{2} \simeq 3890 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. *Desde un punto en un plano horizontal se observa el extremo superior de un árbol bajo un ángulo de* 68^o *y, alejándose* 15 m*, el ángulo es de* 47^o*. Calcular la altura del árbol.*

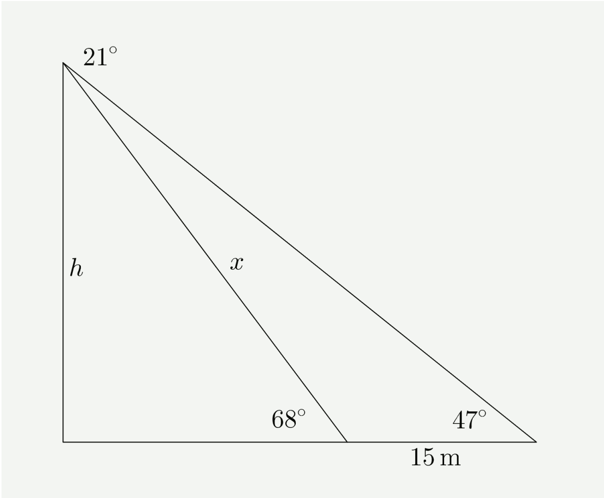
Solución:

Por el teorema del seno:

$$\frac{15}{\operatorname{sen} 21^{\text{o}}} = \frac{x}{\operatorname{sen} 47^{\text{o}}} \ ; \qquad x = \frac{15 \operatorname{sen} 47^{\text{o}}}{\operatorname{sen} 21^{\text{o}}}$$

Sabiendo x podemos calcular h:

$$h = x \operatorname{sen} 68^{\text{o}} \simeq 28{,}4 \text{ m}$$



♠♠♠♠

Ejercicio 8. *Un triángulo tiene lados de longitudes* $a = 315$ m*,* $b = 278$ m *y* $c = 429$ m*. Calcular el ángulo* B *y el área del triángulo.*

Solución:

Calculamos el ángulo B por el teorema del coseno:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \ ; \qquad B = \ \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \simeq 40^o 21'$$

Con este valor del ángulo calculamos el área:

$$S = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} B \simeq 43700 \text{ m}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. *Un triángulo tiene un lado* $a = 48$ cm *y dos ángulos* $B = 73^o 16'$ *y* $C = 56^o 11'$*. Calcular los lados* b *y* c*.*

Solución:

El ángulo A mide:

$$A = 180^o - 73^o 16' - 56^o 11' = 50^o 33'$$

Ahora, obtenemos los lados por el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

De aquí:

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \simeq 59{,}5 \text{ cm} \ ; \qquad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \simeq 51{,}6 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

8. Geometría analítica

Ejercicio 1. *Calcular en forma explícita la ecuación de la recta que pasa por* $A(-3,2)$ *y* $B(2,5)$.

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{5-2}{2-(-3)} = \frac{3}{5}$$

La ecuación de la recta es:

$$y - 2 = \frac{3}{5}(x+3)$$

Para obtener la ecuación explícita despejamos y:

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{9}{5} + 2$$
$$y = \frac{3}{5}x + \frac{19}{5}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Calcular la ordenada en el origen de la recta que pasa por* $A(1,2)$ *y* $B(2,-3)$.

Solución:

Calculamos la pendiente de la recta:

$$m = \frac{-3-2}{2-1} = -5$$

La ecuación de la recta es:

$$y - 2 = -5(x-1)$$

y en forma explícita:

$$y = -5x + 7$$

La ordenada en el origen es $b = 7$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *Dados los puntos* $A(1,3)$, $B(3,5)$ *y* $C(7,k)$, *¿cuánto tiene que valer* k *para que los tres puntos estén alineados?*

Solución:

Para que estén alineados, la pendiente de AB debe ser igual que la pendiente de AC:

$$m_{AB} = \frac{5-3}{3-1} = 1\ ; \qquad m_{AC} = \frac{k-3}{7-1} = \frac{k-3}{6}$$

Entonces:

$$\frac{k-3}{6} = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = 9$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *Dadas las rectas $3x - my = 2$ y $nx + 4y = 5$, calcular los coeficientes m y n sabiendo que son paralelas y que la primera pasa por el punto $(2, 2)$.*

Solución:

Si la primera recta pasa por el punto $(2, 2)$ se cumple que:

$$3 \cdot 2 - 2m = 2 \;; \qquad 6 - 2m = 2 \;; \qquad m = 2$$

Si las rectas son paralelas:

$$\frac{3}{n} = \frac{-m}{4} \;; \qquad n = \frac{3 \cdot 4}{-m} = -6$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *Calcular un punto de la recta $3x - y + 8 = 0$ que se encuentre a la misma distancia de los puntos $A(1, -2)$ y $B(6, 3)$.*

Solución:

Si el punto se encuentra a la misma distancia de A y B, se encuentra en la mediatriz de AB. Calculamos la mediatriz:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = (x-6)^2 + (y-3)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9$$
$$10x + 10y - 40 = 0$$
$$x + y - 4 = 0$$

El punto que nos piden es la intersección de la mediatriz y la recta que nos dan:

$$\begin{cases} 3x - y + 8 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

y resulta el punto $(-1, 5)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. *Escribir la ecuación de las recta paralela a $2x - 3y + 1 = 0$ que pasa por $P(1, -5)$.*

Solución: La pendiente de la recta que nos dan es:

$$m = \frac{2}{3}$$

La ecuación de la paralela es:

$$y + 5 = \frac{2}{3}(x - 1)$$

o, en forma explícita:

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{17}{3}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. *En el triángulo de vértices $A(-2,4)$, $B(6,5)$ y $C(2,-1)$ calcular la longitud de la mediana correspondiente al vértice A.*

Solución:

La mediana es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Calculamos el punto medio de BC que resulta ser el punto $M(4,2)$. La longitud de la mediana es la distancia de A a M:

$$d = \sqrt{(4-(-2))^2+(2-4)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. *Calcular las coordenadas de los puntos M y N que dividen al segmento AB en tres partes iguales siendo $A(-1,-2)$ y $B(8,1)$.*

Solución:

La variación de las coordenadas entre A y B es:

$$\begin{aligned}\Delta x &= 8-(-1) = 9\\ \Delta y &= 1-(-2) = 3\end{aligned}$$

El punto M es:

$$\begin{aligned}x_1 &= -1+\frac{1}{3}\,\Delta x = -1+\frac{1}{3}\cdot 9 = 2\\ y_1 &= -2+\frac{1}{3}\,\Delta y = -2+\frac{1}{3}\cdot 3 = -1\end{aligned}$$

El punto es $M(2,-1)$. El otro punto N es:

$$\begin{aligned}x_1 &= -1+\frac{2}{3}\,\Delta x = -1+\frac{2}{3}\cdot 9 = 5\\ y_1 &= -2+\frac{2}{3}\,\Delta y = -2+\frac{2}{3}\cdot 3 = 0\end{aligned}$$

El punto es $N(5,0)$.

♠♠♠♠

9. Trigonometría, Geometría analítica.

Ejercicio 1. *Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo en el que el cateto* $c = 47$ cm *y la hipotenusa* $a = 62$ cm.

Solución:

Como conocemos la hipotenusa,podemos calcular los ángulos por el seno y el coseno:

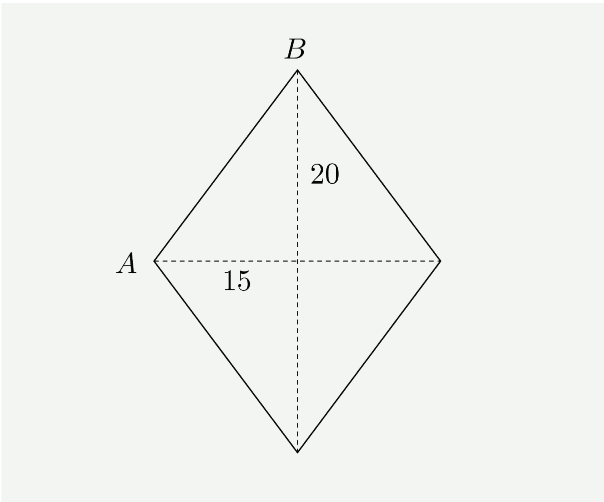
$$\cos B = \frac{c}{a} = \frac{47}{62} \quad \Longrightarrow \quad B = \text{ arcos}\,\frac{47}{62} \simeq 40^{\text{o}}42'$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{c}{a} = \frac{47}{62} \quad \Longrightarrow \quad C = \text{ arsen}\,\frac{47}{62} \simeq 49^{\text{o}}18'$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Calcular los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden* 30 *y* 40 cm.

Solución:



De la figura se deduce que:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{20}{15} \quad \Longrightarrow \quad A = 2\ \text{artg}\,\frac{20}{15} \simeq 106^{\text{o}}16'$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{15}{20} \quad \Longrightarrow \quad B = 2\ \text{artg}\,\frac{15}{20} \simeq 73^{\text{o}}44'$$

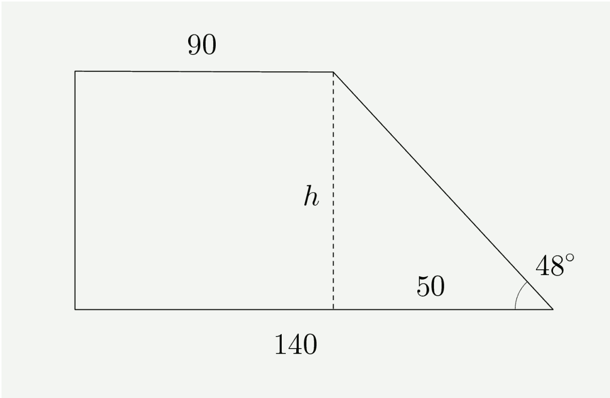
♠♠♠♠

Ejercicio 3. *Calcular el área de un trapecio rectángulo en que las bases miden* 140 *y* 90 cm *y el ángulo agudo* 48^o.

Solución:

La fórmula del área del trapecio es:

$$S = \frac{(b_1 + b_2)\,h}{2}$$



Debemos calcular la altura:

$$h = 50 \operatorname{tg} 48^{\circ}$$

Con este valor:

$$S = \frac{(140 + 90)\, h}{2} \simeq 6390 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *Los lados de un triángulo miden* 8*,* 12 *y* 16 cm*. Calcular el ángulo mayor.*

Solución:

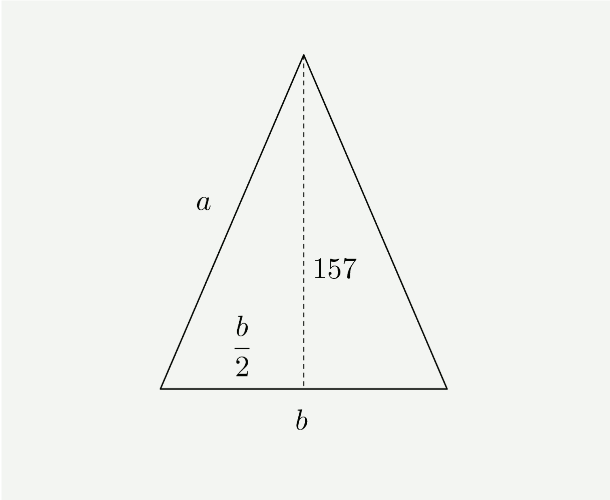
El ángulo mayor es el opuesto al lado mayor, es decir, el opuesto al lado de 16 cm. Por el teorema del coseno:

$$\cos C = \frac{8^2 + 12^2 - 16^2}{2 \cdot 8 \cdot 12} \qquad \Longrightarrow \qquad C = 104^{\circ} 29'$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *Calcular los lados de un triángulo isósceles sabiendo que su superficie es* 3161 cm^2 *y su altura* 157 cm*.*

Solución:



Puesto que la superficie del triángulo es base por altura partido por 2:

$$3161 = \frac{157b}{2} \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{2 \cdot 3161}{157} \simeq 40{,}3 \text{ cm}$$

Los lados iguales los podemos hallar por el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 157^2} \simeq 158 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. *Calcular en forma explícita la ecuación de la recta que pasa por $A(-1, 2)$ y $B(3, 6)$.*

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-2}{3-(-1)} = 1$$

La ecuación de la recta es:

$$y - 2 = x + 1$$

y, en forma explícita:

$$y = x + 3$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. *Calcular la ordenada en el origen de la recta que pasa por $A(3, 2)$ y $B(2, -1)$.*

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-2}{2-3} = 3$$

La ecuación de la recta es:

$$y - 2 = 3\,(x - 3)$$

En forma explícita la ecuación es $y = 3x - 7$. La ordenada en el origen es -7.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. *Dadas las rectas $3x - my = 2$ y $nx + 4y = 5$, calcular los coeficientes m y n sabiendo que son paralelas y que la primera pasa por el punto $(2, 2)$.*

Solución:

Si la primera pasa por $(2, 2)$ se cumple que:

$$3 \cdot 2 - 2m = 2\ ; \qquad -2m = -4\ ; \qquad m = 2$$

Si las rectas son paralelas, sus coeficientes son proporcionales:

$$\frac{3}{n} = \frac{-m}{4}\ ; \qquad \frac{3}{n} = \frac{-2}{4} \quad \Longrightarrow \quad n = -6$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. *Calcular en forma explícita la ecuación de la recta paralela a $2x - 5y + 7 = 0$ que pasa por el punto $P(1, -1)$.*

Solución:

La recta que nos dan tiene como pendiente $m = \frac{2}{5}$.

Puesto que la recta que nos piden es paralela a esta, debe tener la misma pendiente. Como, además, pasa por $P(1, -1)$, su ecuación es:

$$y + 1 = \frac{2}{5}\,(x - 1)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. *En el triángulo de vértices $A(-2, 4)$, $B(6, 5)$ y $C(2, -1)$ calcular la longitud de la mediana correspondiente al vértice A.*

Solución:

La mediana correspondiente al vértice A pasa por A y por el punto medio de BC. Las coordenadas de este punto que llamaremos M son:

$$x = \frac{6 + 2}{2} = 4\ ; \qquad y = \frac{5 - 1}{2} = 2\ ; \qquad C\,(4, 2)$$

La longitud de la mediana es la distancia desde A hasta M:

$$AM = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

♠♠♠♠

10. Sucesiones. Funciones.

Ejercicio 1. *Calcular los siguientes límites de sucesiones:*

$(a)\ \lim_{n\to\infty}(3n-n^2)$ $\qquad$ $(b)\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+1}{3n-5}$

Solución:

$(a)\ \lim_{n\to\infty}(3n-n^2)=\lim_{n\to\infty}(-n^2)=-\infty$

$(b)\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+1}{3n-5}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{3n}=\infty$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Calcular los siguientes límites:*

$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n-1}-\dfrac{n^2+n}{n+1}\right)$ $\qquad$ $(b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{3n^2}\right)^{-n}$

Solución:

$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n-1}-\dfrac{n^2+n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2(n+1)-(n^2+n)(n-1)}{(n-1)(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2}=1$

$(b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{3n^2}\right)^{-n}=0^{-\infty}=\dfrac{1}{0^\infty}=\dfrac{1}{0}=\infty$

o bien:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{3n^2}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2}{n-2}\right)^{n}=\infty^\infty=\infty$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *Calcular el dominio de definición de la función* $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$.

Solución:

El dominio es la solución de la inecuación:

$$\frac{x+2}{x-3}\geq 0$$

El signo de esta fracción está dado por el siguiente esquema:

$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
	-2		3	

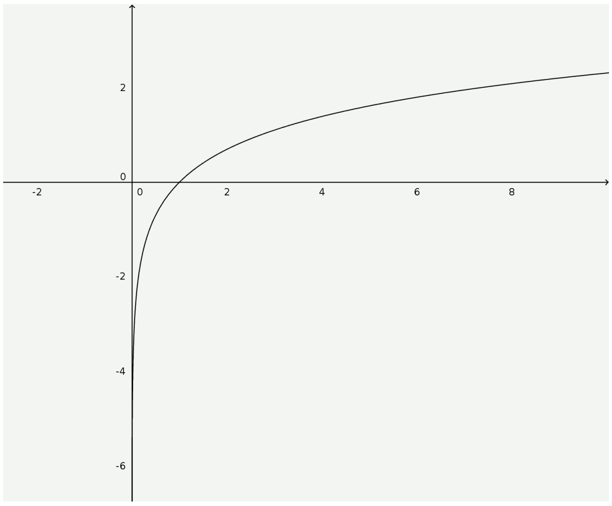
El dominio es $(-\infty,-2]\cup(3,\infty)$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *Representar gráficamente $y = \ln x$ e $y = e^x$ señalando los puntos de corte con los ejes y las asíntotas.*

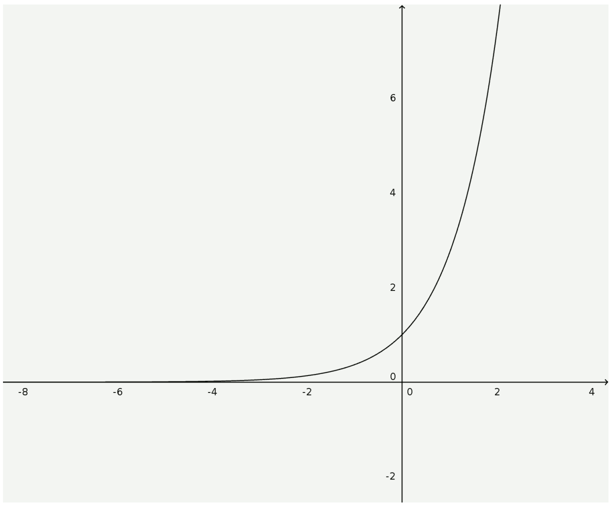
Solución:

La gráfica de la función logaritmo es:



Corta al eje de abscisas en $(1, 0)$ y tiene una asíntota vertical $x = 0$.

La gráfica de la función exponencial es:



Corta al eje de ordenadas en $(0, 1)$ y tiene una asíntota horizontal $y = 0$ en $-\infty$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *Representar gráficamente la función $y = 4 + 3x - x^2$.*

Solución:

La intersección con el eje de ordenadas es el punto:

$$\begin{cases} y = 4 + 3x - x^2 \\ x = 0 \end{cases} \qquad B(0, 4)$$

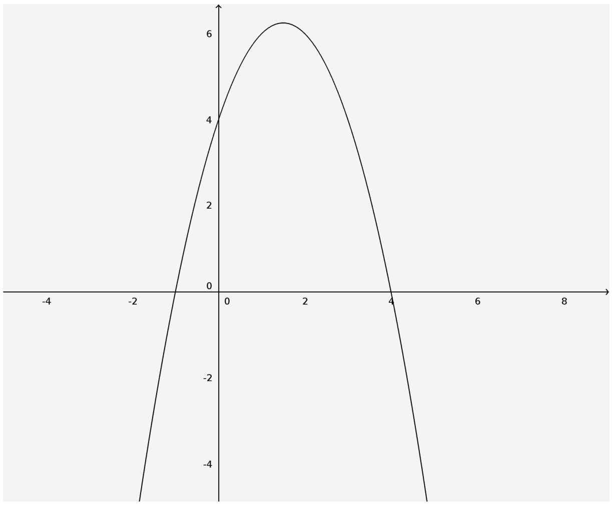
Las intersecciones con el eje de abscisas son:

$$\begin{cases} y = 4 + 3x - x^2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad A_1(-1,0) \quad \text{y} \quad A_2(4,0)$$

El vértice tiene coordenadas

$$x_0 = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}\ ; \qquad y_0 = 4 + \frac{3 \cdot 3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

La gráfica es:



♠♠♠♠

Ejercicio 6. *Representar gráficamente* $y = \dfrac{x+5}{1-x}$.

Solución:

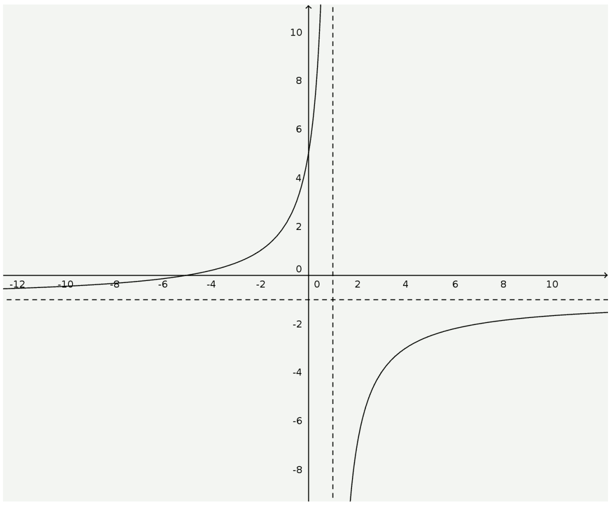
Las asíntotas son las rectas $x = 1$ e $y = -1$.

Las intersecciones con los ejes son los puntos:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+5}{1-x} \\ y = 0 \end{cases} \quad ; \qquad A(-5,0)$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+5}{1-x} \\ x = 0 \end{cases} \quad ; \qquad B(0,5)$$

La gráfica es:



♠♠♠♠

Ejercicio 7. *Calcular lo siguientes límites:*

$(a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1}$ $\qquad (b)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2-4}.$

Solución:

$(a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{x^3} = 0$

$(b)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x+1}{x+2} = \dfrac{13}{4}.$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. *Calcular lo siguientes límites:*

$(a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$ $\qquad (b)\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^2+2}{x+3}\right).$

Solución:

(*a*) Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Efectuando la división obtenemos de cociente 1 y de resto -3. Entonces:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{3}{3x+1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{3}{3x}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x} = e^{-2}$$

(*b*) Este límite es una indeterminación $\infty - \infty$. Efectuando la resta:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+2}{x+3}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x+3)-(x^2+2)(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

♠♠♠♠