EXÁMENES
Bachillerato Internacional
Probabilidad y Estadística

Jesús García de Jalón de la Fuente
IES Ramiro de Maeztu
Madrid

1. Events A and B are such that $\mathrm{p}(A) = 0{,}3$ and $\mathrm{p}(B) = 0{,}4$.
   (*a*) Find the value of $\mathrm{p}(A \cup B)$ when
      (I) A and B are mutually exclusive;
      (II) A and B are independent.
   (*b*) Given that $\mathrm{p}(A \cup B) = 0{,}6$, find $\mathrm{p}(A \mid B)$.

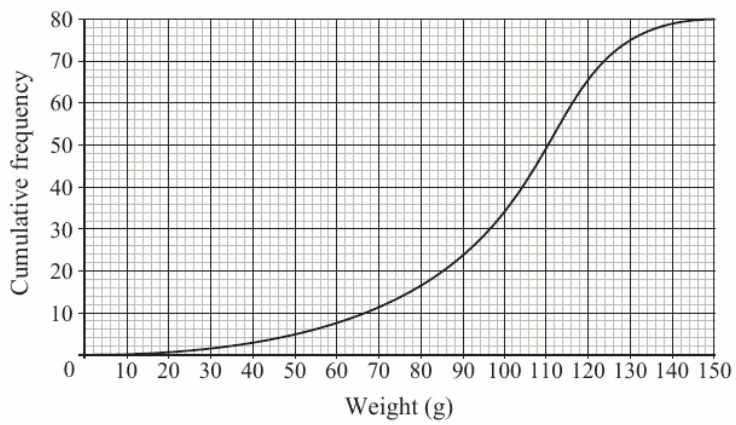
Solución:

(*a*) (I) En este caso $\mathrm{p}(A \cap B) = 0$ y
$$\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) = 0{,}7$$
(II) Si son independientes $\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A)\mathrm{p}(B) = 0{,}12$. Entonces:
$$\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}58$$

(*b*) En este caso:
$$\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}6 = 0{,}1$$
y entonces:
$$\mathrm{p}(A \mid B) = \frac{\mathrm{p}(A \cap B)}{\mathrm{p}(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4}$$

♠♠♠♠

2. The cumulative frequency graph below represents the weight in grams of 80 apples picked from a particular tree.



   (*a*) Estimate the
      (I) median weight of the apples;
      (II) 30th percentile of the weight of the apples.
   (*b*) Estimate the number of apples which weigh more than 110 grams.

Solución:

(*a*) (I) 110 g
(II) 96 g

(*b*) 40 manzanas.

♠♠♠♠

3. A continuous random variable X has a probability density function given by the function $f(x)$, where
$$f(x) = \begin{cases} k(x+2)^2 & -2 \le x < 0 \\ k & 0 \le x \le \frac{4}{3} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) Find the value of k.
(b) Hence find
  (I) the mean of X;
  (II) the median of X.

Solución:

(a) Puesto que la suma de las probabilidades debe ser igual 1:

$$1 = \int_{-2}^{0} k(x+2)^2 \ \mathrm{d}x + \frac{4}{3}k = \left[\frac{k(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \frac{4k}{3} = \frac{8k}{3} + \frac{4k}{3} = 4k$$

Por tanto, $k = \frac{1}{4}$.

(b) (I) La media es

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-2}^{0} \frac{1}{4}x(x+2)^2 \ \mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{4}x \ \mathrm{d}x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = -\frac{1}{9}$$

(II) La mediana m cumple que

$$\int_{-2}^{m} f(x) \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \left[\frac{1}{4}\ \frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{m} = \frac{(m+2)^3}{12} = \frac{1}{2}$$

y, de aquí

$$m = \sqrt[3]{6} - 2 \simeq -0{,}183$$

♠♠♠♠

4. A student arrives at a school X minutes after 08:00, where X may be assumed to be normally distributed. On a particular day it is observed that 40 % of the students arrive before 08:30 and 90 % arrive before 08:55.

(a) Find the mean and standard deviation of X.
(b) The school has 1200 students and classes start at 09:00. Estimate the number of students who will be late on that day.
(c) Maelis had not arrived by 08:30. Find the probability that she arrived late.
(d) At 15:00 it is the end of the school day and it is assumed that the departure of the students from school can be modelled by a Poisson distribution. On average 24 students leave the school every minute. Find the probability that at least 700 students leave school before 15:30.
(e) There are 200 days in a school year. Given that Y denotes the number of days in the year that at least 700 students leave before 15:30, find
  (I) $\mathrm{E}(Y)$;
  (II) $\mathrm{p}(Y > 150)$.

Solución:

(a) Sea $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Para determinar los parámetros de la distribución tenemos las siguientes probabilidades:

$$\mathrm{p}(X < 30) = 0{,}40 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\left(Z < \frac{30-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}40$$

$$\mathrm{p}(X < 55) = 0{,}90 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\left(Z < \frac{55-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}90$$

Con ayuda de la calculadora obtenemos aproximadamente:

$$\frac{30-\mu}{\sigma} = -0{,}253$$

$$\frac{55-\mu}{\sigma} = 1{,}28$$

Resolviendo el sistema se obtiene y $\mu \simeq 34{,}1$ y $\sigma \simeq 16{,}3$.

(b) La probabilidad de llegar tarde es:

$$p = \mathrm{p}(X > 60) \simeq 0{,}0561$$

Sea ahora T la variable aleatoria que representa el número de estudiantes que llegan tarde, $T \sim \mathrm{B}(1200, p)$. El valor esperado de esta variable es:

$$\mathrm{E}(T) = 1200 * p \simeq 67{,}3$$

(c) La probabilidad que nos piden es

$$\mathrm{p}\left(X > 60 \mid X > 30\right) = \frac{\mathrm{p}\left(X > 60\right)}{\mathrm{p}\left(X > 30\right)} \simeq 0{,}0935$$

(d) Sea S la variable aleatoria que representa el número de estudiantes que salen en 30 minutos. Según los datos que nos dan la media es $24 \cdot 30 = 720$. Por tanto $S \sim \mathrm{Po}(720$ y la probabilidad que nos piden es

$$\mathrm{p}\left(S \geq 700\right) = 1 - \mathrm{p}\left(S \leq 699\right) \simeq 0{,}777$$

(e) La variable aleatoria Y sigue una binomial $\mathrm{B}(200, p)$ donde p es la probabilidad calculada en el apartado anterior.

(I) $\mathrm{E}(Y) = 200p \simeq 155$

(II) $\mathrm{p}\left(Y > 150\right) = 1 - \mathrm{p}\left(Y \leq 150\right) \simeq 0{,}797$

♠♠♠♠

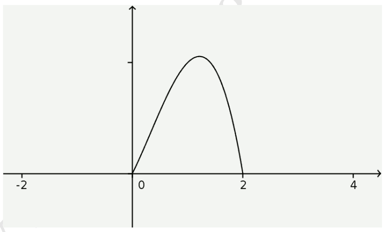
5. The random variable X has probability density function f where

$$f(x) = \begin{cases} kx(x+1)(2-x) & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) Sketch the graph of the function. You are not required to find the coordinates of the maximum.
(b) Find the value of k.

Solución:

(a)



(b) Puesto que la suma de las probabilidades debe ser igual a 1:

$$1 = \int_0^2 kx(x+1)(2-x)\,\mathrm{d}x = k\int_0^2 \left(-x^3 + x^2 + 2x\right)\,\mathrm{d}x = k\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3}k \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{3}{8}$$

♠♠♠♠

6. A batch of 15 DVD players contains 4 that are defective. The DVD players are selected at random, one by one, and examined. The ones that are checked are not replaced.

(a) What is the probability that there are exactly 3 defective DVD players in the first 8 DVD players examined?
(b) What is the probability that the 9th DVD player examined is the 4th defective one found?

Solución:

(a) La probabilidad de que los tres primeros sean defectuosos y los cinco siguientes no lo sean es:

$$\frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{1}{195}$$

Puesto que los tres defectuosos se pueden elegir de $\binom{8}{3}$ maneras:

$$p = \binom{8}{3} \cdot \frac{1}{195} = \frac{56}{195}$$

(b) Es la probabilidad de que haya 3 defectuosos estre los 8 primeros y, además el noveno sea defectuoso:

$$p = \frac{56}{195} \cdot \frac{1}{7} = \frac{8}{195}$$

♠♠♠♠

7. The fish in a lake have weights that are normally distributed with a mean of 1,3 kg and a standard deviation of 0,2 kg.
   (a) Determine the probability that a fish which is caught weighs less than 1,4 kg.
   (b) John catches 6 fish. Calculate the probability that at least 4 of the fish weigh more than 1,4 kg.
   (c) Determine the probability that a fish which is caught weighs less than 1 kg, given that it weighs less than 1,4 kg.

Solución:

(a) La variable aleatoria X sigue la distribución N(1,3 ; 0,2):

$$\mathrm{p}\,(X < 1{,}4) = \simeq 0{,}691$$

(b) Sea Y la variable número de peces que pesan más de 1,4 kg. Esta variable sigue la distribución $\mathrm{B}(6, p)$ donde $p = \mathrm{p}\,(X > 1{,}4)$.

$$\mathrm{p}\,(Y \geq 4) = 1 - \mathrm{p}\,(Y \leq 3) \simeq 0{,}0775$$

(c) Nos piden una probabilidad condicionada

$$\mathrm{p}\,(X < 1 \mid X < 1{,}4) = \frac{\mathrm{p}\,(X < 1)}{\mathrm{p}\,(X < 1{,}4)} \simeq 0{,}0966$$

♠♠♠♠

8. The number of accidents that occur at a large factory can be modelled by a Poisson distribution with a mean of 0,5 accidents per month.
   (a) Find the probability that no accidents occur in a given month.
   (b) Find the probability that no accidents occur in a given 6 month period.
   (c) Find the length of time, in complete months, for which the probability that at least 1 accident occurs is greater than 0,99.
   (d) To encourage safety the factory pays a bonus of \$1000 into a fund for workers if no accidents occur in any given month, a bonus of \$500 if 1 or 2 accidents occur and no bonus if more than 2 accidents occur in the month.
      (I) Calculate the expected amount that the company will pay in bonuses each month.
      (II) Find the probability that in a given 3 month period the company pays a total of exactly \$2000 in bonuses.

Solución:

(a) Sea X la variable aleatoria que representa el número de accidentes en un mes; $X \sim \mathrm{Po}(0{,}5)$ y

$$\mathrm{p}\,(X = 0) \simeq 0{,}607$$

(b) Si ahora X representa el número de accidentes en 6 meses $X \sim \mathrm{Po}(3)$ y:

$$\mathrm{p}\,(X = 0) \simeq 0{,}0498$$

(c) Sea $X \sim \mathrm{Po}(m)$. Vamos a calcular m de modo que $\mathrm{p}\,(X = 0) < 0{,}01$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{p}\,(X = 0) = e^{-m} < 0{,}01 \\ &-m < \ln 0{,}01 \\ &m > 4{,}61 \end{aligned}$$

La media obtenida corresponde a un período de tiempo de $\frac{m}{0{,}5} \simeq 9{,}21$ meses. A partir de 10 meses la probabilidad de que ocurra al menos un accidente es mayor que 0,99.

(d) (I) Si $X \sim \mathrm{Po}(0{,}5)$ el valor esperado del bonus es:

$$1000 \cdot \mathrm{p}\,(X = 0) + 500 \cdot \mathrm{p}\,(X = 1) + 500 \cdot \mathrm{p}\,(X = 2) \simeq 796$$

(II) Para que el bonus en los tres meses sea de \$2000 tiene que haber habido dos meses sin accidentes y uno con más de dos, o bien 1 mes sin accidentes y dos meses con uno o dos accidentes. La probabilidad de que ocurra esto es:

$$3 \cdot \mathrm{p}\,(X = 0) \cdot \mathrm{p}\,(X = 0) \cdot \mathrm{p}\,(X > 2) + 3 \cdot \mathrm{p}\,(X = 0) \cdot \mathrm{p}\,(X = 1 \text{ ó } 2) \cdot \mathrm{p}\,(X = 1 \text{ ó } 2) \simeq 0{,}277$$

Se ha multiplicado por 3 porque el mes con más de dos accidentes ha podido ser el primero, el segundo o el tercero. Lo mismo en el segundo caso.

9. The probability density function of the continuous random variable X is given by

$$f(x) = \begin{cases} k\,2^{\frac{1}{x}} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where k is a constant. Find the expected value of X.

Solución:

Es un problema que se resuelve con la calculadora. Primero calculamos k teniendo en cuenta que

$$k\int_1^2 2^{\frac{1}{x}}\ \mathrm{d}x = 1$$

y obtenemos $k \simeq 0{,}616$.

Una vez calculado k el valor esperado lo obtenemos mediante:

$$\mathrm{E}(X) = k\int_1^2 x\cdot 2^{\frac{1}{x}}\ \mathrm{d}x \simeq 1{,}47$$

♠♠♠♠

10. A team of 6 players is to be selected from 10 volleyball players, of whom 8 are boys and 2 are girls.
   (*a*) In how many ways can the team be selected?
   (*b*) In how many of these selections is exactly one girl in the team?
   (*c*) If the selection of the team is made at random, find the probability that exactly one girl is in the team.

Solución:

(*a*) $C_{10,6} = 210$
(*b*) $2\cdot C_{8,5} = 112$
(*c*) $p = \frac{112}{210} = \frac{8}{15}$

♠♠♠♠

11. A ski resort finds that the mean number of accidents on any given weekday (Monday to Friday) is 2,2. The number of accidents can be modelled by a Poisson distribution.
   (*a*) Find the probability that in a certain week (Monday to Friday only):
      (I) there are fewer than 12 accidents;
      (II) there are more than 8 accidents, given that there are fewer than 12 accidents.
   (*b*) Due to the increased usage, it is found that the probability of more than 3 accidents in a day at the weekend (Saturday and Sunday) is 0,24. Assuming a Poisson model,
      (I) calculate the mean number of accidents per day at the weekend (Saturday and Sunday);
      (II) calculate the probability that, in the four weekends in February, there will be more than 5 accidents during at least two of the weekends.
   (*c*) It is found that 20 % of skiers having accidents are at least 25 years of age and 40 % are under 18 years of age. Assuming that the ages of skiers having accidents are normally distributed, find the mean age of skiers having accidents.

Solución:

(*a*) Si X representa el número de accidentes durante los 5 días, $X \sim \mathrm{Po}(11)$. Entonces:
   (I) $\mathrm{p}\,(X < 12) = \mathrm{p}\,(X \leq 11) = 0{,}579$
   (II) Se trata de una probabilidad condicionada:

$$\mathrm{p}\,(X > 8 \mid X < 12) = \frac{\mathrm{p}\,(X > 8) \cap (X < 12)}{\mathrm{p}\,(X \leq 11)} = \frac{\mathrm{p}\,(X = 9\,\text{ó}\,10\,\text{ó}\,11)}{\mathrm{p}\,(X \leq 11)} \simeq 0{,}600$$

(b) Durante el fin de semana $X \sim \mathrm{Po}(m)$. Entonces:

(I) $\mathrm{p}\,(X > 3) = 0{,}24 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\,(X \leq 3) = 0{,}76$:

$$e^{-m}\left(1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}\right) = 0{,}76$$

Resolvemos la ecuación con la calculadora y obtenemos $m \simeq 2{,}49$.
También podría resolverse con la calculadora gráfica la ecuación:

$$\mathrm{poissoncdf}(X, 3) - 0{,}76 = 0$$

y se obtendría el mismo resultado.

(II) Sea Y la variable aleatoria que representa el número de fines de semana en los que hay más de 5 accidentes. La probabilidad de que en un fin de semana haya más de 5 accidentes es, de acuerdo con la media calculada anteriormente:

$$p = \mathrm{p}\,(X > 5) = 1 - \mathrm{p}\,(X \leq 5) \simeq 0{,}380$$

Entonces $Y \sim \mathrm{B}(4, p)$ y

$$\mathrm{p}\,(Y \geq 2) = 1 - \mathrm{p}\,(Y \leq 1) \simeq 0{,}490$$

(c) Si ahora X representa la edad de los esquiadores accidentados y $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ tenemos que

$$\mathrm{p}\,(X < 25) = \mathrm{p}\left(Z < \frac{25 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}80 \quad \Longrightarrow \quad \frac{25 - \mu}{\sigma} \simeq 0{,}842$$

$$\mathrm{p}\,(X < 18) = \mathrm{p}\left(Z < \frac{18 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}40 \quad \Longrightarrow \quad \frac{18 - \mu}{\sigma} \simeq -0{,}253$$

Resolviendo el sistema se obtiene $\mu \simeq 19{,}6$.

♠♠♠♠

12. Considere las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{75}, \quad x \geq 0 \qquad\qquad g(x) = \frac{|3x - 4|}{10}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) Indique el recorrido de f y de g.

(b) Halle una expresión para la función compuesta $f \circ g(x)$, de la forma $\dfrac{ax^2 + bx + c}{3750}$, donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

(c) (I) Halle una expresión para la función inversa $f^{-1}(x)$.
(II) Indique el dominio y el recorrido de $f^{-1}(x)$.

(d) Ahora el dominio de f y el de g quedan restringidos a $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considerando los valores de f y de g en este nuevo dominio, determine cuál de las dos funciones, f y g, podría utilizarse para hallar una distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta X . Explique claramente las razones por las cuales ha dado esa respuesta.

(e) Utilizando esta distribución de probabilidad, calcule la media de X.

Solución:

(a) La gráfica de f es una rama de parábola con el vértice en $\left(0, \frac{1}{25}\right)$. El recorrido es el intervalo $\left[\frac{1}{25}, \infty\right)$. La función g es continua y solo toma valores positivos. Puesto que tiende a ∞ cuando x tiende a ∞ y toma el valor cero en $x = \frac{4}{3}$ toma todos los valores del intervalo $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$, éste es su recorrido.

(b)
$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f\,(g(x)) = f\left(\frac{|3x - 4|}{10}\right) \\ &= \frac{2\frac{|3x-4|^2}{10^2} + 3}{75} = \frac{2(3x - 4)^2 + 300}{7500} \\ &= \frac{18x^2 - 48x + 332}{7500} = \frac{9x^2 - 24x + 166}{3750} \end{aligned}$$

(c) (I) Intercambiando las variables y despejando:

$$x = \frac{2y^2 + 3}{75} \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{\frac{75x - 3}{2}}$$

(II) El dominio es $\left[\frac{1}{25}, \infty\right)$. El recorrido es $[0, \infty)$.

(d) En este caso, los valores de $f(x)$ y $g(x)$ serían:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{3}{75}$	$\frac{5}{75}$	$\frac{11}{75}$	$\frac{21}{75}$	$\frac{35}{75}$

x	0	1	2	3	4
$g(x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{8}{10}$

$f(x)$ puede ser una función de probabilidad pues toma valores positivos que suman 1. En cambio, los valores de $g(x)$ no suman 1 y, por consiguiente, no puede ser una función de probabilidad.

(e) La media de $f(x)$ sería:

$$0 \cdot \frac{3}{75} + 1 \cdot \frac{5}{75} + 2 \cdot \frac{11}{75} + 3 \cdot \frac{21}{75} + 4 \cdot \frac{35}{75} = \frac{230}{75} = \frac{46}{15}$$

♠♠♠♠

13. La variable aleatoria X tiene una distribución $\mathrm{B}(30, p)$. Sabiendo que $\mathrm{E}(X) = 10$, halle:

(a) el valor de p;
(b) $\mathrm{p}\,(X = 10)$;
(c) $\mathrm{p}\,(X \geq 15)$.

Solución:

(a) Puesto que $30p = 10$ resulta $p = 1/3$.

(b) En la distribución binomial $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{3}\right)$:

$$\mathrm{p}\,(X = 10) \simeq 0{,}153$$

(c) Con la misma distribución:

$$\mathrm{p}\,(X \geq 15) = 1 - \mathrm{p}\,(X \leq 14) \simeq 0{,}0435$$

♠♠♠♠

14. La variable aleatoria X tiene una distribución $\mathrm{Po}(m)$. Sabiendo que

$$\mathrm{p}\,(X = 5) = \mathrm{p}\,(X = 3) + \mathrm{p}\,(X = 4)$$

halle:

(a) el valor de m;
(b) $\mathrm{p}\,(X \geq 2)$.

Solución:

(a) Sustituyendo las probabilidades:

$$\frac{m^5 e^{-m}}{5!} = \frac{m^3 e^{-m}}{3!} + \frac{m^4 e^{-m}}{4!}$$

Simplificamos dividiendo por e^{-m} y multiplicando por 3!:

$$\frac{m^5}{20} = m^3 + \frac{m^4}{4} \quad \Longrightarrow \quad m^5 - 5m^4 - 20m^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad m^3\left(m^2 - 5m - 20\right) = 0$$

Desestimando el caso $m = 0$ obtenemos:

$$m^2 - 5m - 20 = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{5 + \sqrt{105}}{2} \simeq 7{,}62$$

El mismo valor se obtiene resolviendo con la calculadora gráfica la ecuación:

$$\mathrm{poissonpdf}(x, 5) - \mathrm{poissonpdf}(x, 3) - \mathrm{poissonpdf}(x, 4) = 0$$

(b) Para esta distribución:

$$\mathrm{p}\,(X > 2) = 1 - \mathrm{p}\,(X \leq 1) \simeq 0{,}00578$$

♠♠♠♠

15. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}, \qquad 0 \leq x \leq a$$

(a) Halle el valor de a.
(b) Halle la media de X.

Solución:

(a) Lo mas sencillo es probar valores con la calculadora para conseguir

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Así se obtiene $a \simeq 1{,}40$.

(b) Con este valor:

$$\int_0^a \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \simeq 0{,}550$$

♠♠♠♠

16. En un puesto del mercado se venden manzanas, peras y ciruelas.

(a) Los pesos de las manzanas siguen una distribución normal de media 200 gramos y con una desviación típica de 25 gramos.

(I) Sabiendo que en el puesto hay 450 manzanas, ¿cuál es el número esperado de manzanas con un peso superior a 225 gramos?
(II) Sabiendo que el 70 % de las manzanas pesa menos de m gramos, halle el valor de m.

(b) Los pesos de las peras siguen una distribución normal de media μ gramos y con una desviación típica de σ gramos. Sabiendo que el 8 % de estas peras tiene un peso superior a 270 gramos y que el 15 % tiene un peso inferior a 250 gramos, halle μ y σ.

(c) Los pesos de las ciruelas siguen una distribución normal de media 80 gramos y con una desviación típica de 4 gramos. Se cogen 5 ciruelas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellas pesen más de 82 gramos?

Solución:

(a) (I) Calculamos la probabilidad de que una manzana pese más de 225 g

$$p = \mathrm{p}\,(X > 225) \simeq 0{,}159$$

Sea X la variable aleatoria número de manzanas de peso mayor que 225 g- En la binomial $\mathrm{B}(450, p)$ el valor esperado es

$$\mathrm{E}(X) = 450 \cdot p \simeq 71{,}4$$

(II) Sabiendo ahora que

$$\mathrm{p}\,(X < m) = 0{,}70$$

con la función inversa de la función de distribución que encontramos en la calculadora encontramos $m \simeq 213$.

(b) Sea $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Conocemos las siguientes probabilidades:

$$\mathrm{p}\,(X > 270) = 0{,}08 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\,(X < 270) = 0{,}92$$
$$\mathrm{p}\,(X < 250) = 0{,}15$$

Tipificamos la variable y obtenemos

$$\mathrm{p}\left(Z < \frac{270-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}92 \quad \Longrightarrow \quad \frac{270-\mu}{\sigma} \simeq -1{,}04$$
$$\mathrm{p}\left(Z < \frac{250-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}15 \quad \Longrightarrow \quad \frac{250-\mu}{\sigma} \simeq 1{,}41$$

Obteniendo los valores con la calculadora y resolviendo el sistema resulta $\mu \simeq 258$, $\sigma \simeq 8{,}19$.

(c) Sea $X \sim \mathrm{N}(80, 4)$. Con esta distribución:

$$p = \mathrm{p}\,(X > 82) \simeq 0{,}309$$

El número de ciruelas que pesan más de 82 g sigue en este caso una binomial $\mathrm{B}(5, p)$ con la probabilidad p calculada anteriormente. La probabilidad que nos piden es:

$$\mathrm{p}\,(X = 3) \simeq 0{,}140$$

♠♠♠♠

17. The probability density function of the random variable X is defined as

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

find $\mathrm{E}(X)$.

Solución:

El valor esperado se calcula mediante la integral:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}(-\cos x) && \text{integrando por partes} \\ &= \Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-x\cos x + \operatorname{sen} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

♠♠♠♠

18. Two events A and B are such that $\mathrm{p}\,(A \cup B) = 0{,}7$ and $\mathrm{p}\,(A \mid B') = 0{,}6$. Find $\mathrm{p}\,(B)$.

Solución:

$$0{,}6 = \mathrm{p}\,(A \mid B') = \frac{\mathrm{p}\,(A \cap B')}{\mathrm{p}\,(B')} = \frac{\mathrm{p}\,(A) - \mathrm{p}\,(A \cap B)}{1 - \mathrm{p}\,(B)} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\,(A) - \mathrm{p}\,(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}6\mathrm{p}\,(B)$$

Por otra parte

$$0,7 = \mathrm{p}\,(A \cup B) = \mathrm{p}\,(A) + \mathrm{p}\,(B) - \mathrm{p}\,(A \cap B) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\,(A) - \mathrm{p}\,(A \cap B) = 0{,}7 - \mathrm{p}\,(B)$$

Igualando

$$0{,}6 - 0{,}6\mathrm{p}\,(B) = 0{,}7 - \mathrm{p}\,(B) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\,(B) = \frac{1}{4}$$

♠♠♠♠

19. On Saturday, Alfred and Beatrice play 6 different games against each other. In each game, one of the two wins. The probability that Alfred wins any one of these games is $\frac{2}{3}$.
   (a) Show that the probability that Alfred wins exactly 4 of the games is $\frac{80}{243}$.
   (b) (I) Explain why the total number of possible outcomes for the results of the 6 games is 64.
   (II) By expanding $(1 + x)^6$ and choosing a suitable value for x, prove

$$64 = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$$

(III) State the meaning of this equality in the context of the 6 games played.

(c) The following day Alfred and Beatrice play the 6 games again. Assume that the probability that Alfred wins any one of these games is still $\frac{2}{3}$.

(I) Find an expression for the probability Alfred wins 4 games on the first day and 2 on the second day. Give your answer in the form

$$\binom{6}{r}^r\left(\frac{2}{3}\right)^s\left(\frac{1}{3}\right)^t$$

where the values of r, s and t are to be found.

(II) Using your answer to (c) (I) and 6 similar expressions write down the probability that Alfred wins a total of 6 games over the two days as the sum of 7 probabilities.

(III) Hence prove that

$$\binom{12}{6}=\binom{6}{0}^2+\binom{6}{1}^2+\binom{6}{2}^2+\binom{6}{3}^2+\binom{6}{4}^2+\binom{6}{5}^2+\binom{6}{6}^2$$

(d) Alfred and Beatrice play n games. Let A denote the number of games Alfred wins. The expected value of A can be written as

$$\mathrm{E}(A)=\sum_{r=0}^{n}r\binom{n}{r}\frac{a^r}{b^n}$$

(I) Find the values of a and b.

(II) By differentiating the expansion of $(1+x)^n$ prove that the expected number of games Alfred wins is $\frac{2n}{3}$.

Solución:

(a) Sea X la variable aleatoria que representa el número de juegos ganados por Alfred. Entonces $X\sim \mathrm{B}\left(6,\frac{2}{3}\right)$ y la probabilidad de que gane exactamente 4 juegos es

$$\mathrm{p}\left(X=4\right)=\binom{6}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$$

(b) (I) Por la regla del producto. Cada juego puede tener dos resultados,en total para 6 juegos

$$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=64$$

También se puede ver como variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 6 en 6.

(II) El desarrollo de $(1+x)^6$ es

$$(1+x)^6=\binom{6}{0}+\binom{6}{1}x+\binom{6}{2}x^2+\binom{6}{3}x^3+\binom{6}{4}x^4+\binom{6}{5}x^5+\binom{6}{6}x^6$$

Dando a x el valor 1 se obtiene:

$$64=\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$$

(III) El número de posibles resultados de las seis pruebas aparece como suma de las que Alfred gana 0, 1, 2, 3, 4, 5 o 6 de ellas.

(c) (I) La probabilidad será:

$$p=\mathrm{p}\left(X=4\right)\cdot\mathrm{p}\left(X=2\right)=\binom{6}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\binom{6}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

y, puesto que $\binom{6}{4}=\binom{6}{2}$:

$$p=\binom{6}{2}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6$$

(II) Para que gane 6 juegos entre los días, debe ganar 0 un día y 6 en otro, o 1 un día y 5 en otro, etc. La probabilidad de que gane seis juegos es igual a

$$\binom{6}{0}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6+\binom{6}{1}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6+\binom{6}{2}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6+\binom{6}{3}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6$$
$$+\binom{6}{4}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6+\binom{6}{5}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6+\binom{6}{6}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6$$

(iii) La probabilidad de que gane 6 de los 12 juegos es

$$\binom{12}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6$$

Igualando ambas expresiones de la misma probabilidad se obtiene:

$$\binom{12}{6}=\binom{6}{0}^2+\binom{6}{1}^2+\binom{6}{2}^2+\binom{6}{3}^2+\binom{6}{4}^2+\binom{6}{5}^2+\binom{6}{6}^2$$

(*d*) (i) El valor esperado de juegos que gana Alfred es

$$\mathrm{E}(A)=\sum_{r=0}^{n} r\cdot \mathrm{p}\left(A=r\right)=\sum_{r=1}^{n} r\cdot\binom{n}{r}\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(\frac{1}{3}\right)^{n-r}=\sum_{r=1}^{n} r\cdot\binom{n}{r}\frac{2^r}{3^n}$$

Por tanto $a=2$ y $b=3$.

(ii) Sea

$$(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r\ ;\qquad \text{derivando:}\qquad n(1+x)^{n-1}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}rx^{r-1}$$

Entonces:

$$\mathrm{E}(A)=\sum_{r=1}^{n} r\cdot\binom{n}{r}\frac{2^r}{3^n}=\frac{2}{3^n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}r2^{r-1}=\frac{2}{3^n}\cdot n3^{n-1}=\frac{2n}{3}$$

♠♠♠♠

20. The marks obtained by a group of students in a class test are shown below.

Marks	Frequency
5	6
6	k
7	3
8	1
9	2
10	1

Given the mean of the marks is 6,5, find the value of k.

Solución:

$$\frac{30+6k+21+8+18+10}{6+k+3+1+2+1}=\frac{87+6k}{13+k}=6{,}5\quad\Longrightarrow\quad k=5$$

♠♠♠♠

21. Emily walks to school every day. The length of time this takes can be modelled by a normal distribution with a mean of 11 minutes and a standard deviation of 3 minutes. She is late if her journey takes more than 15 minutes.

(*a*) Find the probability she is late next Monday.

(*b*) Find the probability she is late at least once during the next week (Monday to Friday).

Solución:

(*a*) Sea X el tiempo que Emily tarda en llegar. $X\sim \mathrm{N}(11,3)$.

$$\mathrm{p}\left(X>15\right)\simeq 0{,}0912$$

(*b*) Sea Y el número de días que llega tarde. $Y\sim \mathrm{B}(5,p)$ donde p es la probabilidad calculada en el apartado anterior:

$$\mathrm{p}\left(Y\geq 1\right)=1-\mathrm{p}\left(X=0\right)\simeq 0{,}380$$

♠♠♠♠

22. A ferry carries cars across a river. There is a fixed time of T minutes between crossings. The arrival of cars at the crossing can be assumed to follow a Poisson distribution with a mean of one car every four minutes. Let X denote the number of cars that arrive in T minutes.
   (a) Find T, to the nearest minute, if $P(X \leq 3) = 0{,}6$.
   (b) It is now decided that the time between crossings, T, will be 10 minutes. The ferry can carry a maximum of three cars on each trip. One day all the cars waiting at 13:00 get on the ferry. Find the probability that all the cars that arrive in the next 20 minutes will get on either the 13:10 or the 13:20 ferry.

Solución:

(a) Si la media de llegada de coches es una cada cuatro minutos, en T minutos la media será $T/4$. La variable X sigue entonces una distribución Po $\left(\frac{T}{4}\right)$. Entonces

$$e^{-\frac{T}{4}}\left(1+\frac{T}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{T}{4}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{T}{4}\right)^3\right)=0{,}6$$

Resolviendo la ecuación se obtiene $T \simeq 12{,}8$.
También podríamos haber resuelto con la calculadora gráfica la ecuación:

$$\text{poissoncdf}(x/4,3)-0{,}6=0$$

y obtenemos el mismo resultado de una forma más sencilla.

(b) El número de coches que llegan en 10 minutos sigue una distribución $X \sim \text{Po}(2{,}5)$. Llamemos X_1 el número de coches que llegan en los primeros 10 minutos y X_2 los que llegan en los siguientes 10 minutos. La probabilidad de que entren todos en los ferrys es:

$$p=\text{p}\left(X_1\leq 3\right)\cdot\text{p}\left(X_2\leq 3\right)+\text{p}\left(X_1=4\right)\cdot\text{p}\left(X_2\leq 2\right)+\text{p}\left(X_1=5\right)\cdot\text{p}\left(X_2\leq 1\right)+\text{p}\left(X_1=6\right)\cdot\text{p}\left(X_2=0\right)$$

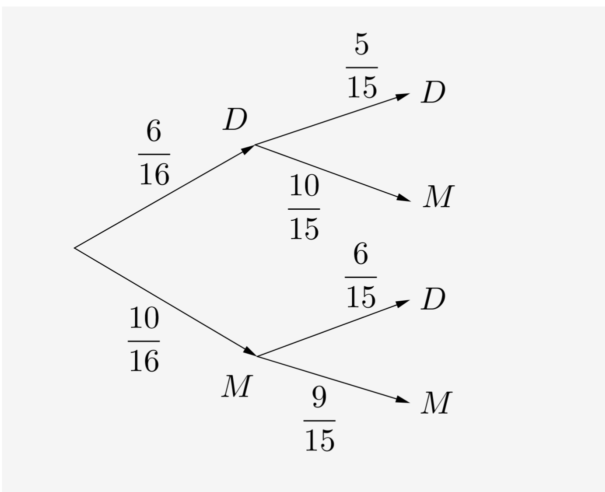
El resultado con tres cifras significativas es 0,668.

♠♠♠♠

23. Tim and Caz buy a box of 16 chocolates of which 10 are milk and 6 are dark. Caz randomly takes a chocolate and eats it. Then Tim randomly takes a chocolate and eats it.
   (a) Draw a tree diagram representing the possible outcomes, clearly labelling each branch with the correct probability.
   (b) Find the probability that Tim and Caz eat the same type of chocolate.

Solución:

(a)



(*b*) $p = \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} + \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} = \frac{120}{16 \cdot 15} = \frac{1}{2}$

♠♠♠♠

24. It is believed that the lifespans of Manx cats are normally distributed with a mean of 13,5 years and a variance of 9,5 years.
    (*a*) Calculate the range of lifespans of Manx cats whose lifespans are within one standard deviation of the mean.
    (*b*) Estimate the number of Manx cats in a population of 10000 that will have a lifespan of less than 10 years. Give your answer to the nearest whole number.

Solución:

(*a*) La desviación es igual a $\sqrt{9{,}5} \simeq 3{,}08$. El rango $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ es $(10{,}4; 16{,}6)$.

(*b*) La probabilidad de que un gato viva más de 10 años es

$$p = \mathrm{p}\,(X > 10) \simeq 0{,}8719$$

En la población de 10000 gatos, sea Y el número de gatos que viven más de 10 años. Entonces $Y \sim \mathrm{B}(10000, p)$. El valor esperado es:

$$\mathrm{E}(Y) = 10000 \cdot 0{,}8719 = 8719$$

♠♠♠♠

25. The length, X metres, of a species of fish has the probability density function

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{for } 0 \leq x \leq 0{,}5 \\ 0{,}5a(1-x) & \text{for } 0{,}5 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(*a*) Show that $a = 9{,}6$.
(*b*) Sketch the graph of the distribution.
(*c*) Find $P(X < 0{,}6)$.

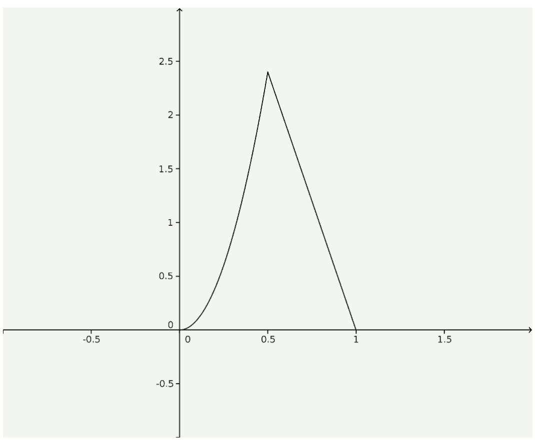
Solución:

(*a*) Como la suma de las probabilidades ha de ser igual a 1:

$$a\int_0^{0{,}5} x^2 \,\mathrm{d}x + 0{,}5a\int_{0{,}5}^{1} (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{0{,}5^3 a}{3} - 0{,}5a\left[\frac{(1-x)^2}{2}\right]_{0{,}5}^{1} = \frac{0{,}5^3 a}{3} + \frac{0{,}5^3 a}{2} = \frac{5 \cdot 0{,}5^3 a}{6} = 1$$

despejando se obtiene $a = 9{,}6$.

(*b*)



(*c*)

$$\mathrm{p}\,(x < 0{,}6) = 9{,}6\int_0^{0{,}5} x^2 \,\mathrm{d}x + 0{,}5 \cdot 9{,}6\int_{0{,}5}^{0{,}6} (1-x)\,\mathrm{d}x = 0{,}4 + 0{,}216 = 0{,}616$$

♠♠♠♠

26. A small car hire company has two cars. Each car can be hired for one whole day at a time. The rental charge is US$60 per car per day. The number of requests to hire a car for one whole day may be modelled by a Poisson distribution with mean 1,2.
   (*a*) Find the probability that on a particular weekend, three requests are received on Saturday and none are received on Sunday.
   (*b*) Over a weekend of two days, it is given that a total of three requests are received. Find the expected total rental income for the weekend.

Solución:

(*a*) Tenemos $X \sim \mathrm{Po}(1{,}2)$:

$$\mathrm{p}\,(X=3)\cdot\mathrm{p}\,(X=0)\simeq 0{,}0261$$

(*b*) Sea Y el número de coches que se solicitan en un fin de semana. Entonces $Y \sim \mathrm{Po}(2{,}4)$ y

$$\mathrm{p}\,(Y=3)=0{,}209$$

Si se han solicitado tres coches el fin de semana es posible que se hayan solicitado dos el sábado y uno el domingo, uno el sábado y dos el domingo, tres el sábado y ninguno el domingo o, finalmente, ninguno el sábado y tres el domingo. En los dos primeros casos se pueden atender todas las solicitudes y los ingresos serán de \$180. En los dos últimos casos solo se podrán atender dos solicitudes y los ingresos serán de \$120.

Sea X_1 el número de coches solicitados el sábado y X_2 el número de coches solicitados el domingo. Las dos variables siguen una distribución Po(1,2). Entonces:

$$\mathrm{p}\;(X_1=2,\;X_2=1\mid Y=3)=\frac{\mathrm{p}\,(X_1=2)\cdot\mathrm{p}\,(X_2=1)}{\mathrm{p}\,(Y=3)}\simeq 0{,}375$$

e, igualmente, $\mathrm{p}\;(X_1=1,\;X_2=2\mid Y=3)=0{,}375$.

Por otra parte,

$$\mathrm{p}\;(X_1=3,\;X_2=0\mid Y=3)=0{,}125$$

e, igualmente, $\mathrm{p}\;(X_1=0,\;X_2=3\mid Y=3)=0{,}125$.

Los ingresos medios serán:

$$2*180*0{,}375+2*120*0{,}125=\$165$$

♠♠♠♠

27. Four numbers are such that their mean is 13, their median is 14 and their mode is 15. Find the four numbers.

Solución:

9, 13, 15, 15.

♠♠♠♠

28. A student sits a national test and is told that the marks follow a normal distribution with mean 100. The student receives a mark of 124 and is told that he is at the 68th percentile. Calculate the variance of the distribution.

Solución:

Si $X \sim \mathrm{N}(100,\sigma)$ sabemos que $\mathrm{p}\,(X<124)=0{,}68$. Por consiguiente:

$$\mathrm{p}\left(Z<\frac{124-100}{\sigma}\right)=0{,}68 \quad\Longrightarrow\quad \frac{24}{\sigma}\simeq 0{,}468$$

y de aquí $\sigma^2\simeq 2630$.

También se puede resolver con la calculadora gráfica la ecuación:

$$\text{normalcdf}(-1\text{E}99, 124, 100, x) - 0{,}68 = 0$$

y se obtiene el mismo resultado.

♠♠♠♠

29. The number of birds seen on a power line on any day can be modelled by a Poisson distribution with mean 5,84.

   (*a*) Find the probability that during a certain seven-day week, more than 40 birds have been seen on the power line.

   (*b*) On Monday there were more than 10 birds seen on the power line. Show that the probability of there being more than 40 birds seen on the power line from that Monday to the following Sunday, inclusive, can be expressed as:

$$\frac{\mathrm{p}\,(X > 40) + \displaystyle\sum_{r=11}^{40} \mathrm{p}\,(X = r)\mathrm{p}\,(Y > 40 - r)}{\mathrm{p}\,(X > 10)}$$

   where $X \sim \mathrm{Po}(5{,}84)$ and $Y \sim \mathrm{Po}(35{,}04)$.

Solución:

(*a*) El número medio de pájaros durante la semana es $7 \cdot 5{,}84 = 40,88$. Para la distribución Po(40,88):

$$\mathrm{p}\,(X > 40) = 1 - \mathrm{p}\,(X \leq 40) \simeq 0{,}513$$

(*b*) El número de pájaros que aparecen el lunes X sigue una distribución Po(5,84) y el número de pájaros que aparecen de martes a domingo Y siguen Po(35,04) ya que $6 \cdot 5,84 = 35{,}04$.

Para que aparezcan más de 40 pájaros durante la semana debe ocurrir que aparezcan mas de 40 el lunes (y cualquier número el resto de los días) o que aparezcan r el lunes, $(10 < r \leq 40)$ y más de $40 - r$ los restantes días. La probabilidad que calculamos está condicionada a que hayan aparecido más de diez pájaros el lunes:

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{p}\,\big((X > 40) \cup (X = r \cap Y > 40 - r) : 10 < r \leq 40 \mid X > 10\big) \\ &= \frac{\mathrm{p}\,(X > 40) + \displaystyle\sum_{r=11}^{40} \mathrm{p}\,(X = r)\mathrm{p}\,(Y > 40 - r)}{\mathrm{p}\,(X > 10)} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

30. A random variable X has probability density function

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

   (*a*) Show that $5a + 2b = 2$.

   Let $\mathrm{E}(X) = \mu$.

   (*b*) (I) Show that $a = 12\mu - 30$.

   (II) Find a similar expression for b in terms of μ.

   Let the median of the distribution be 2.3.

   (*c*) (I) Find the value of μ.

   (II) Find the value of the standard deviation of X.

Solución:

(a) Como la suma de las probabilidades debe ser igual a 1:

$$\int_2^3 (ax+b)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{ax^2}{2} + bx\right]_2^3 = \frac{9a}{2} + 3b - 2a - 2b = \frac{5a}{2} + b = 1$$

y, por consiguiente, $5a + 2b = 2$.

(b) La media es igual a

$$\mu = \int_2^3 x(ax+b)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2}\right]_2^3 = 9a + \frac{9b}{2} - \frac{8a}{3} - 2b = \frac{19a}{3} + \frac{5b}{2}$$

Sustituyendo $b = 1 - \frac{5a}{2}$ resulta:

$$\mu = \frac{19a}{3} + \frac{5}{2} - \frac{25a}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad a = 12\mu - 30$$

(c) Sustituyendo el valor obtenido de a en $b = 1 - \frac{5a}{2}$ resulta $b = -30\mu + 76$

(d) (I) Si la mediana es igual a 2,3 quiere decir que

$$\int_2^{2,3} (ax+b)\ \mathrm{d}x = 0{,}5 \qquad \Longrightarrow \qquad \left[\frac{ax^2}{2} + bx\right]_2^{2,3} = 0{,}5$$

Sustituyendo obtenemos la ecuación

$$1{,}29a + 0{,}6b = 1$$

y, mediante las relaciones que hemos obtenido anteriormente:

$$1{,}29(12\mu - 30) + 0{,}6(-30\mu + 76) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu \simeq 2{,}34$$

Con este valor podemos calcular a y b que necesitaremos en el apartado siguiente.

(II) Calculamos la media de X^2:

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_2^3 x^2(ax+b)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3}\right]_2^3 = \frac{65a}{4} + \frac{19b}{3}$$

La varianza es:

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$$

Sustituyendo los valores obtenidos, resulta para la desviación típica $\sigma \simeq 0{,}241$.

♠♠♠♠

31. Los sucesos A y B son tales que $\mathrm{p}(A) = \frac{2}{5}$, $\mathrm{p}(B) = \frac{11}{20}$ y $\mathrm{p}(A \mid B) = \frac{2}{11}$.
   (a) Halle $\mathrm{p}(A \cap B)$.
   (b) Halle $\mathrm{p}(A \cup B)$.
   (c) Indique, dando una razón, si los sucesos A y B son independientes.

Solución:

(a) $\mathrm{p}\ (A \cap B)) = \mathrm{p}(B)\mathrm{p}(A \mid B) = \dfrac{11}{20} \cdot \dfrac{2}{11} = \dfrac{1}{10}$

(b) $\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{11}{20} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{17}{20}$

(c) $\mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{11}{20} = \frac{11}{50} \neq \mathrm{p}(A \cap B)$. No son independientes.

♠♠♠♠

32. (a) Hay dos máquinas que fabrican baterías para teléfonos móviles. Con la máquina A se fabrica el 60 % de la producción diaria, y con la máquina B se fabrica el 40 %. Al analizar el proceso se observa que, en promedio, el 2 % de las baterías que se fabrican con la máquina A son defectuosas, y el 1 % de las baterías que se fabrican con la máquina B son defectuosas.
   (I) Dibuje un diagrama de árbol que muestre claramente las probabilidades respectivas.
   (II) Se elige una batería al azar. Halle la probabilidad de que sea defectuosa.
   (III) Se elige una batería al azar y se observa que es defectuosa. Halle la probabilidad de que se haya fabricado con la máquina A.

(b) En un paquete de siete transistores, hay tres que son defectuosos. Se eligen al azar tres transistores del paquete, sin reposición. La variable aleatoria discreta X representa el número de transistores defectuosos que se han elegido.

(I) Halle $\mathrm{p}(X = 2)$.

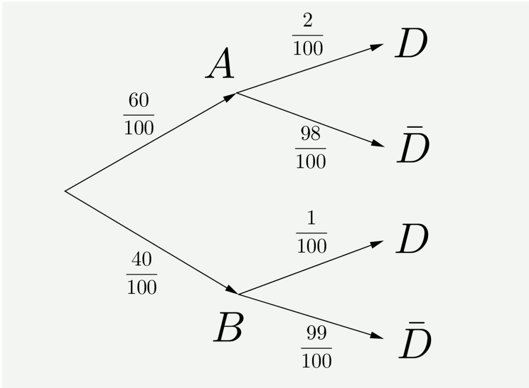
(II) Copie y complete la siguiente tabla.

x	0	1	2	3
$\mathrm{p}(X = x)$				

(III) Determine $\mathrm{E}(X)$.

Solución:

(*a*) (I)



(II) $\mathrm{p}\,(D) = \frac{60}{100} \cdot \frac{2}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{1}{100} = \frac{180}{10000} = 0{,}018$

(III) $\mathrm{p}\,(A \mid D) = \frac{\frac{60}{100} \cdot \frac{2}{100}}{\frac{180}{10000}} = \frac{2}{3}$

(*b*) (I) $\mathrm{p}\,(X = 2) = 3 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{35}$

(II)

x	0	1	2	3
$\mathrm{p}\,(X = x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

(III) $\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{4}{35} + 1 \cdot \frac{18}{35} + 2 \cdot \frac{12}{35} + 3 \cdot \frac{1}{35} = \frac{9}{7}$

♠♠♠♠

33. Los pesos, en kg, de los oseznos de un año siguen una distribución normal, de media μ y desviación típica σ.

(*a*) Sabiendo que el peso correspondiente al tercer cuartil es 21,3 kg y que el peso correspondiente al primer cuartil es 17,1 kg, calcule el valor de μ y el valor de σ.

(*b*) Se toma una muestra aleatoria compuesta por 100 oseznos. Halle el número esperado de oseznos que pesan más de 22 kg.

Solución:

(*a*) Tenemos el siguiente sistema

$$\mathrm{p}\,(X < 17{,}1) = 0{,}25$$
$$\mathrm{p}\,(X < 21{,}3) = 0{,}75$$

o, tipificando la variable:

$$\mathrm{p}\left(Z < \frac{17{,}1 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}25\ ; \qquad \frac{17{,}1 - \mu}{\sigma} \simeq -0{,}674$$
$$\mathrm{p}\left(Z < \frac{21{,}3 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}75\ ; \qquad \frac{21{,}3 - \mu}{\sigma} \simeq 0{,}674$$

Resolviendo el sistema se obtiene $\mu \simeq 19{,}2$ y $\sigma \simeq 3{,}11$.

(*b*) La probabilidad de que un osezno pes más de 22 kg es

$$p = \mathrm{p}\,(X > 22) \simeq 0{,}184$$

Tenemos ahora una distribución de probabilidad $\mathrm{B}(100, p)$. El valor esperado es $100p \simeq 18{,}4$.

♠♠♠♠

34. Seis clientes hacen cola en un supermercado. Cada cliente puede elegir si paga en efectivo o con tarjeta de crédito. Suponga que el que un cliente pague o no con tarjeta de crédito es independiente del método de pago elegido por otros clientes. Se sabe que el 60 % de los clientes eligen pagar con tarjeta de crédito.

(*a*) Halle la probabilidad de que:

(I) Los tres primeros clientes paguen con tarjeta de crédito y los siguientes tres paguen en efectivo.

(II) De los seis clientes, exactamente tres paguen con tarjeta de crédito.

(*b*) Hay n clientes en otra cola en el mismo supermercado. La probabilidad de que al menos un cliente pague en efectivo es mayor que 0,995. Halle el mínimo valor de n.

Solución:

(*a*) (I) $p = 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^3 \simeq 0{,}0138$

(II) Sea X la variable aleatoria que representa el número de clientes que paga con tarjeta de crédito. X sigue una distribución binomial $\mathrm{B}(6; 0{,}6)$ y

$$\mathrm{p}\,(X = 3) \simeq 0{,}276$$

(*b*) Consideremos la distribución binomial $\mathrm{B}(n; 0{,}4)$ donde n representa el número de clientes y el éxito es que el cliente pague en efectivo. Debemos encontrar el menor n que cumple:

$$\mathrm{p}\,(X \geq 1) > 0{,}995 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \mathrm{p}\,(X = 0) > 0{,}995 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\,(X = 0) < 0{,}005$$

Con la calculadora vemos ue el número más pequeño que cumple la condición es $n = 11$.

♠♠♠♠

35. La variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson de media μ. Sabiendo que

$$\mathrm{p}\,(X = 2) + \mathrm{p}\,(X = 3) = \mathrm{p}\,(X = 5)$$

(*a*) halle el valor de μ;

(*b*) halle la probabilidad de que X esté a menos de una desviación típica de la media.

Solución:

(*a*) Sustituyendo las probabilidades:

$$\frac{m^5 e^{-m}}{5!} = \frac{m^2 e^{-m}}{2!} + \frac{m^3 e^{-m}}{3!}$$

Simplificamos dividiendo por e^{-m} y multiplicando por 5!:

$$m^5 = 60m^2 + 20m^3 \; ; \qquad m(m^4 - 20m^2 - 60m) = 0$$

Desestimando el caso $m = 0$ obtenemos $m \simeq 5{,}55$.

También podemos resolver con la calculadora gráfica la ecuación:

$$\mathrm{poissonpdf}(x, 2) + \mathrm{poissonpdf}(x, 3) - \mathrm{poissonpdf}(x, 5) = 0$$

(*b*) En la distribución de Poisson, la media y la varianza son iguales a m. La desviación típica es entonces $\sqrt{m} \simeq 2{,}36$. La variable X debe estar comprendida entre $5{,}55 - 2{,}36$ y $5{,}55 + 2{,}36$, es decir, debe tomar los valores 4, 5, 6 o 7:

$$\mathrm{p}\,(X \leq 7) - \mathrm{p}\,(X \leq 3) \simeq 0{,}607$$

♠♠♠♠

36. La función densidad de probabilidad de una variable aleatoria X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax\cos x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ donde } a \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

(*a*) Muestre que $a = \dfrac{2}{\pi - 2}$.

(*b*) Halle $\mathrm{p}\left(X < \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(*c*) Halle:

(I) la moda de X;

(II) la mediana de X.

(*d*) Halle $\mathrm{p}\left(X < \dfrac{\pi}{8} \mid X < \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solución:

(*a*) Puesto que la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1:

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \, \mathrm{d}x = 1$$

Integrando por partes:

$$a\Big[x\operatorname{sen}x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$$

y de aquí:

$$a = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 1} = \frac{2}{\pi - 2}$$

La función de distribución es entonces:

$$\mathrm{p}\,(X < x) = \frac{2}{\pi - 2}\Big[x\operatorname{sen}x + \cos x\Big]_0^{x} = \frac{2}{\pi - 2}\,(x\operatorname{sen}x + \cos x - 1)$$

(*b*) Con esa función de distribución:

$$\mathrm{p}\,\left(X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi - 2}\left(\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \simeq 0{,}460$$

(*c*) (I) La moda es el máximo de la función de densidad. Con la calculadora obtenemos:

$$\text{moda} \simeq 0{,}860$$

(II) La mediana cumple que

$$\mathrm{p}\,(X < \text{med}) = 0{,}5$$

es decir, es la solución de la ecuación

$$\frac{2}{\pi - 2}\,(x\operatorname{sen}x + \cos x - 1) = 0{,}5$$

Con la calculadora obtenemos

$$\text{med} \simeq 0{,}826$$

(III) En este caso

$$\mathrm{p}\,\left(X < \frac{\pi}{8}\,\middle|\, X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathrm{p}\,\left(X < \frac{\pi}{8}\right)}{\mathrm{p}\,\left(X < \frac{\pi}{4}\right)} \simeq 0{,}283$$

♠♠♠♠

37. A y B son dos sucesos tales que $\mathrm{p}\,(A) = 0{,}25$, $\mathrm{p}\,(B) = 0{,}6$ y $\mathrm{p}\,(A \cup B) = 0{,}7$.
   (*a*) Halle $\mathrm{p}\,(A \cap B)$.
   (*b*) Determine si los sucesos A y B son independientes.

Solución:

(*a*) $\mathrm{p}\,(A \cap B) = \mathrm{p}\,(A) + \mathrm{p}\,(B) - \mathrm{p}\,(A \cup B) = 0{,}25 + 0{,}6 - 0{,}7 = 0{,}15$.

(*b*) Puesto que $\mathrm{p}\,(A)\mathrm{p}\,(B) = 0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}15 = \mathrm{p}\,(A \cap B)$, los sucesos son independientes.

♠♠♠♠

38. A Emma le regalan un teléfono móvil nuevo para su cumpleaños y en él recibe mensajes de texto de sus amigos. Se supone que el número de mensajes de texto que Emma recibe al día sigue una distribución de Poisson de media $m = 5$.
   (*a*) (I) Halle la probabilidad de que en un día dado Emma reciba más de 7 mensajes de texto.
   (II) Determine el número esperado de días a la semana en los que Emma recibe más de 7 mensajes de texto.
   (*b*) Halle la probabilidad de que Emma reciba menos de 30 mensajes de texto a lo largo de una semana dada.

Solución:

(*a*) (I) Basta aplicar la distribución de Poisson

$$\mathrm{p}\,(X \leq 7) \simeq 0{,}867 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\,(X > 7) \simeq 0{,}133$$

(II) Sea Y el número de días de la semana en los que Emma recibe más de 7 mensajes de texto. Y sigue una distribución $\mathrm{B}(7, p)$ siendo p:

$$p = \mathrm{p}\,(X > 7) \simeq 0{,}133$$

El valor esperado de Y es:

$$\mathrm{E}(Y) = 7 \cdot \mathrm{p}\,(X > 7) \simeq 0{,}934$$

(*b*) En este caso la distribución de Poisson tiene media 35:

$$\mathrm{p}\,(X < 30) \simeq 0{,}177$$

♠♠♠♠

39. Natasha vive en Chicago y tiene familia en Nashville y St. Louis. Cada vez que quiere visitar a su familia, o bien va en avión o bien va en coche.

Cuando va a Nashville, la probabilidad de que vaya en coche es $\frac{4}{5}$, y cuando va a St. Louis la probabilidad de que vaya en avión es $\frac{1}{3}$.

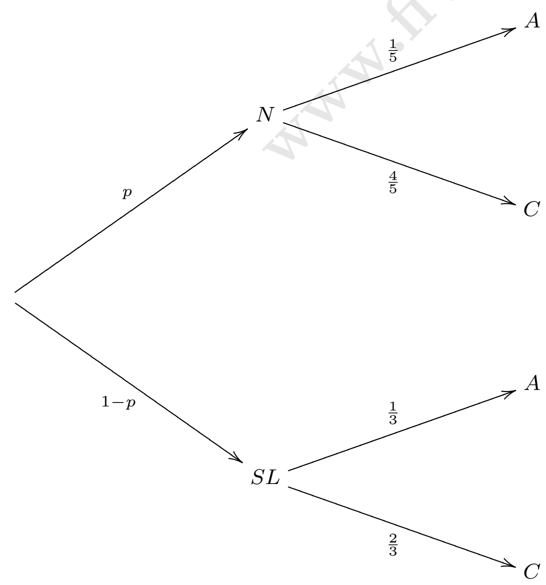
Sabiendo que cuando va a visitar a su familia la probabilidad de que vaya en coche es $\frac{13}{18}$, Halle la probabilidad de que para un viaje en particular,

(*a*) Vaya a Nashville.

(*b*) Esté camino de Nashville, sabiendo que está yendo en avión.

Solución

El problema responde al siguiente esquema:



(*a*) Puesto que $\mathrm{p}\,(C) = \frac{13}{18}$:

$$\frac{13}{18} = p \cdot \frac{4}{5} + (1-p) \cdot \frac{2}{3}$$

$$p = \frac{5}{12}$$

(*b*) Por la fórmula de Bayes:

$$\mathrm{p}\,(N|A) = \frac{\frac{5}{12}\,\frac{1}{5}}{\frac{5}{12}\,\frac{1}{5} + \frac{7}{12}\,\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{7}{36}} = \frac{3}{10}$$

♠♠♠♠

40. La agricultora Suzie cultiva nabos. Los pesos de los nabos que cosecha siguen una distribución normal de media 122 g y desviación típica 14,7 g.

   (*a*) (I) Calcule el porcentaje de los nabos de Suzie que pesan entre 110 g y 130 g.

   (II) Suzie tiene listos 100 nabos para llevarlos al mercado. Halle el número esperado de nabos que pesan más de 130 g.

   (III) Halle la probabilidad de que al menos 30 de estos 100 nabos pesen más de 130 g.

   (*b*) El agricultor Ray también cultiva nabos. Los pesos de los nabos que cultiva siguen una distribución normal de media 144 g. Ray solamente lleva al mercado aquellos nabos que pesan más de 130 g. Durante un determinado período, Ray observa que tiene que rechazar 1 de cada 15 nabos por pesar menos de lo debido.

   (I) Halle la desviación típica de los nabos de Ray.

   (II) Ray tiene listos 200 nabos para llevarlos al mercado. Halle el número esperado de nabos que pesan más de 150 g.

Solución:

(*a*) (I) Es una distribución normal N(122; 14,7):

$$\mathrm{p}\,(110 < X < 130) = 50{,}0\,\%$$

(II) Sea Y el número de nabos que pesan más de 130 g. Ahora $Y \sim \mathrm{B}(100, \mathrm{p}\,(X > 130))$:

$$\mathrm{p}\,(X > 130) = 0{,}293$$

y el número esperado será $\mathrm{E}(Y) = 0{,}293 \times 100 = 29{,}3$.

(III) Con la distribución binomial del apartado anterior:

$$p(Y \geq 30) = 1 - \mathrm{p}\,(Y \leq 29) = 0{,}478$$

(*b*) (I) Es una distribución N(144; σ) de desviación típica desconocida. Pero sabemos que:

$$\mathrm{p}\,(X < 130) = \frac{1}{15} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\left(Z < \frac{130-144}{\sigma}\right) = \frac{1}{15}$$

Con la función inversa de la normal obtenemos:

$$\frac{-14}{\sigma} = -1{,}50108... \quad \Longrightarrow \quad \sigma \simeq 9{,}33$$

con tres cifras significativas.
También podemos resolver con la calculadora gráfica la ecuación:

$$\mathrm{normalcdf}(-1\mathrm{E}99, 130, 144, x) - 1/15 = 0$$

y obtener el mismo resultado.

(II) Puesto que los nabos están listos para llevarlos al mercado, pesan más de 130 g. Con el valor obtenido de la desviación, la probabilidad de que un nabo pese más de 150 g es:

$$p(X > 150 \mid X > 130) = \frac{\mathrm{p}\,(X > 150)}{\mathrm{p}\,(X > 130)} = 0{,}278579...$$

y por tanto, el número esperado de nabos que pesan más de 150 g es $200 \times 0{,}278... \simeq 55{,}7$.

♠♠♠♠

41. A y B son dos sucesos tales que $\mathrm{p}\,(A) = 0{,}65$, $\mathrm{p}\,(B) = 0{,}48$ y $\mathrm{p}\,(A \cup B) = 0{,}818$.

   (*a*) Halle $\mathrm{p}\,(A \cap B)$.

   (*b*) A partir de lo anterior, muestre que los sucesos A y B son independientes.

Solución:

(*a*) $\mathrm{p}\,(A \cap B) = \mathrm{p}\,(A) + \mathrm{p}\,(B) - \mathrm{p}\,(A \cup B) = 0{,}312$

(*b*) $\mathrm{p}\,(A) \cdot \mathrm{p}\,(B) = 0{,}65 \cdot 0{,}48 = 0{,}312 = \mathrm{p}\,(A \cap B)$. Los sucesos son independientes.

♠♠♠♠

42. La siguiente tabla muestra los datos de los goles que han marcado los jugadores de un equipo de fútbol a lo largo de una temporada.

Goles	Frecuencia
0	4
1	k
2	3
3	2
4	3
8	1

(a) Sabiendo que la media de goles marcados por jugador es igual a 1,95 , halle el valor de k.

Ahora descubren que ha habido un error en los datos, pues no han incluido en la tabla al máximo anotador, que marcó 22 goles.

(b) (I) Halle el valor correcto de la media de goles marcados por jugador.
(II) Halle el valor correcto de la desviación típica del número de goles marcados por jugador.

Solución:

(a) La media es igual a

$$1{,}95 = \frac{0\cdot 4 + 1\cdot k + 3\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 1\cdot 8}{4+k+3+2+3+1} = \frac{32+k}{13+k} \quad \Longrightarrow \quad k = 7$$

(b) (I) La nueva media es

$$\bar{x} = \frac{7+6+6+12+8+22}{21} \simeq 2{,}90$$

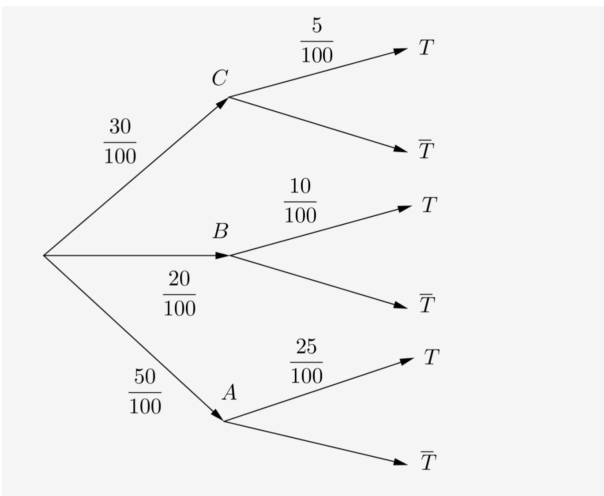
(II) La varianza es la media de los cuadrados menos el cuadrado de la media

$$\sigma^2 = \frac{7+12+18+48+64+22^2}{21} - \bar{x}^2 \simeq 21{,}7 \quad \Longrightarrow \quad \sigma \simeq 4{,}66$$

♠♠♠♠

43. Josie tiene tres formas de ir al colegio. Un 30 % de las veces va en coche, un 20 % de las veces va en bicicleta y un 50 % de las veces va andando. Cuando va en coche, Josie llega tarde el 5 % de las veces. Cuando va en bicicleta, llega tarde el 10 % de las veces. Cuando va andando, llega tarde el 25 % de las veces. Sabiendo que llegó a la hora, halle la probabilidad de que haya ido en bicicleta.

Solución:



$$\mathrm{p}\,(B \mid \overline{T}) = \frac{\frac{20}{100}\cdot\frac{90}{100}}{\frac{30}{100}\cdot\frac{95}{100}+\frac{20}{100}\cdot\frac{90}{100}+\frac{50}{100}\cdot\frac{75}{100}} = \frac{1800}{8400} = \frac{3}{14}$$

♠♠♠♠

44. La variable aleatoria continua X tiene la función de distribución de probabilidad $f(x) = A\,\mathrm{sen}(\ln x)$, $1 \leq x \leq 5$.
   (a) Halle el valor de A con una aproximación de tres cifras decimales.
   (b) Halle la moda de X.
   (c) Halle el valor $\mathrm{p}\,(X \leq 3 \mid x \geq 2)$.

Solución:

(a) Con la calculadora vemos que

$$I = \int_1^5 \mathrm{sen}\ln x \;\mathrm{d}x \simeq 3{,}09$$

Entonces, A debe valer

$$A = \frac{1}{I} \simeq 0{,}323$$

(b) Calculamos el máximo de la función de densidad. Con la calculadora obtenemos que la moda es 4,81.

(c) La probabilidad es:

$$\mathrm{p}\,(X \leq 3 \mid x \geq 2) = \frac{\mathrm{p}\,(2 \leq X \leq 3)}{\mathrm{p}\,(X \geq 2)}$$

Las probabilidades las calculamos mediante integrales:

$$\mathrm{p}\,(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 A\,\mathrm{sen}\ln x \;\mathrm{d}x \simeq 0{,}253$$
$$\mathrm{p}\,(X \geq 2) = \int_2^5 A\,\mathrm{sen}\ln x \;\mathrm{d}x \simeq 0{,}881$$

Entonces

$$\mathrm{p}\,(X \leq 3 \mid x \geq 2) = \frac{\mathrm{p}\,(2 \leq X \leq 3)}{\mathrm{p}\,(X \geq 2)} \simeq 0{,}288$$

45. Se realiza una encuesta en un edificio de oficinas de gran tamaño. Hallan que el 30 % de los oficinistas pesan menos de 62 kg y que el 25 % de los oficinistas pesan más de 98 kg. Los pesos de los oficinistas se pueden modelizar con una distribución normal, de media μ y desviación típica σ.
   (a) (I) Determine un sistema formado por dos ecuaciones lineales que satisfagan μ y σ.
   (II) Halle el valor de μ y σ.
   (b) Halle la probabilidad de que un oficinista pese más de 100 kg.

   En el edificio hay ascensores que llevan a los oficinistas hasta su oficina. Sabiendo que en un ascensor dado hay 10 oficinistas,

   (c) halle la probabilidad de que haya al menos cuatro oficinistas que pesen más de 100 kg.

   Sabiendo que hay 10 oficinistas en un ascensor y que al menos uno de ellos pesa más de 100 kg,

   (d) halle la probabilidad de que haya menos de cuatro oficinistas que pesen más de 100 kg.

   La llegada de los ascensores a la planta baja entre las 08 : 00 y las 09 : 00 se puede modelizar con una distribución de Poisson. En promedio llega un ascensor cada 36 segundos.

   (e) Halle la probabilidad de que en un período cualquiera de media hora, entre las 08 : 00 y las 09 : 00, lleguen más de 60 ascensores a la planta baja.

   Cada ascensor puede llevar a un máximo de 10 oficinistas. Sabiendo que en un período de media hora llegan 400 oficinistas, independientemente unos de otros, (*f*) halle la probabilidad de que haya suficientes ascensores para llevarlos a todos hasta sus oficinas.

Solución:

(*a*) (I) Tenemos que:

$$\mathrm{p}\,(X < 62) = \mathrm{p}\left(Z < \frac{62-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}30 \quad\Longrightarrow\quad \frac{62-\mu}{\sigma} = -0{,}5244$$

$$\mathrm{p}\,(X > 98) = \mathrm{p}\left(Z > \frac{98-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}25 \quad\Longrightarrow\quad \frac{98-\mu}{\sigma} = 0{,}6745$$

Podemos escribir el sistema

$$\begin{cases} \mu = 62 + 0{,}5244\sigma \\ \mu = 98 - 0{,}6745\sigma \end{cases}$$

(II) Resolviendo el sistema se obtiene $\mu \simeq 77{,}7$ kg y $\sigma \simeq 30{,}0$ kg.

(*b*) La probabilidad de que un oficinista pese más de 100 kg es

$$p = \mathrm{p}\,(X > 100) \simeq 0{,}229$$

(*c*) Sea Y la variable aleatoria que representa el número de oficinistas en el ascensor que pesan más de 100 kg. Entonces $Y \sim \mathrm{B}(10, p)$ y

$$\mathrm{p}\,(Y \geq 4) = 1 - \mathrm{p}\,(Y \leq 3) = 0{,}177$$

(*d*) En este caso se trata de una probabilidad condicionada:

$$\mathrm{p}\,(Y < 4 \mid Y \geq 1) = \frac{\mathrm{p}\,(1 \leq Y \leq 3)}{\mathrm{p}\,(Y \geq 1)} \simeq 0{,}809$$

(*e*) Si en promedio llega un ascensor cada 36 segundos, la media de ascensores que llegan en media hora es $30 \cdot 60/36 = 50$ ascensores. Así, si A es la variable aleatoria que representa el número de ascensores que llega en media hora $A \sim \mathrm{Po}(50)$ y

$$\mathrm{p}\,(A > 60) = 1 - \mathrm{p}\,(A \leq 60) \simeq 0{,}0722$$

(*f*) Deberán llegar al menos 40 ascensores:

$$\mathrm{p}\,(A \geq 40) = 1 - \mathrm{p}\,(A \leq 39) \simeq 0{,}935$$

♠♠♠♠

46. Una moneda no equilibrada se lanza al aire cinco veces. En cada lanzamiento, la probabilidad de que salga cara es igual a p. Sea X el número de veces que sale cara.

(*a*) Halle en función de p, una expresión para $\mathrm{p}\,(X = 4)$.

(*b*) (I) Determine el valor de p para el cual $\mathrm{p}\,(X = 4)$ alcanza el valor máximo.

(II) Para este valor de p, determine el número esperado de veces que sale cara.

Solución:

(*a*) $X \sim \mathrm{B}(5, p)$:

$$\mathrm{p}\,(X = 4) = \binom{5}{4} p^4 (1-p) = 5p^4(1-p)$$

(*b*) (I) Sea $f(p)$ la probabilidad de obtener cuatro caras. Derivamos e igualamos a cero la derivada:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p} = 20p^3(1-p) - 5p^4 = 20p^3 - 25p^4 = 5p^3(4-5p)$$

La probabilidad es máxima para $p = \frac{4}{5}$.

(II) El número esperado de caras es

$$\mathrm{E}(X) = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$$

♠♠♠♠

47. A B son sucesos independientes tales que $\mathrm{p}(A) = \mathrm{p}(B) = p$, $p \neq 0$.
   (a) Muestre que $\mathrm{p}(A \cup B) = 2p - p^2$.
   (b) Halle $\mathrm{p}(A \mid A \cup B)$ en su forma más simple.

Solución:

(a) Si los sucesos son independientes $\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(B) = p^2$. Entonces

$$\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B) = 2p - p^2$$

(b) Teniendo en cuenta que $A \cap (A \cup B) = A$:

$$\mathrm{p}(A \mid A \cup B) = \frac{\mathrm{p}(A)}{\mathrm{p}(A \cup B)} = \frac{p}{2p - p^2} = \frac{1}{2 - p}$$

♠♠♠♠

48. Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 3 y varianza igual a 2^2.
   (a) Halle $\mathrm{p}(0 \leq X \leq 2)$.
   (b) Halle $\mathrm{p}(|X| > 1)$.
   (c) Sabiendo que $\mathrm{p}(X > c) = 0{,}44$, halle el valor de c.

Solución:

Tenemos que $X \sim \mathrm{N}(3, 2)$. En esta distribución:

(a) $\mathrm{p}(0 \leq X \leq 2) \simeq 0{,}242$

(b) $\mathrm{p}(|X| > 1) = 1 - \mathrm{p}(-1 < X < 1) \simeq 0{,}864$

(c) $\mathrm{p}(X > c) = 0{,}44 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{p}(X < c) = 0{,}56$. Entonces, $c \simeq 3{,}30$.

♠♠♠♠

49. Una empresa fabrica láminas de vidrio rectangulares de 5 metros cuadrados de área. Durante el proceso de fabricación de estas láminas de vidrio aparecen defectos, que se producen a razón de 0,5 por cada 5 metros cuadrados. Se supone que el número de defectos por lámina de vidrio sigue una distribución de Poisson.

   (a) Halle la probabilidad de que una lámina de vidrio elegida al azar contenga al menos un defecto.

   Las láminas de vidrio que no tienen ningún defecto generan un beneficio de \$5. Las láminas de vidrio que tienen al menos un defecto ocasionan una pérdida de \$3.

   (b) Halle el beneficio esperado, P en dólares, que se obtiene por cada lámina de vidrio.

   Esta empresa también fabrica láminas de vidrio más grandes, de 20 metros cuadrados de área. La razón a la que se producen defectos sigue siendo de 0,5 por cada 5 metros cuadrados. Se elige al azar una de estas láminas de vidrio grandes,

   (c) Halle la probabilidad de que no contenga ningún defecto.

Solución:

(a) Si X representa el número de defectos de la lámina $X \sim \mathrm{Po}(0{,}5)$:

$$\mathrm{p}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{p}(X = 0) \simeq 0{,}393$$

(b) El valor esperado de P es:

$$\mathrm{E}(P) = 5\mathrm{p}(X = 0) - 3\mathrm{p}(X \geq 1) \simeq 1{,}85\$$$

(c) Sea Y la variable aleatoria que representa el número de defectos de la lámina. Ahora $Y \sim \mathrm{Po}(2)$.

$$\mathrm{p}(Y = 0) \simeq 0{,}135$$

♠♠♠♠

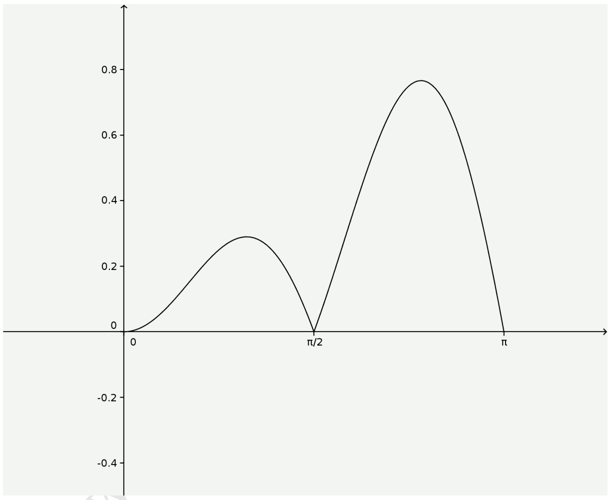
50. Una variable aleatoria continua T tiene la siguiente función de densidad de probabilidad f:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t|\operatorname{sen} 2t|}{\pi} & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(t)$.
(b) Utilice este gráfico aproximado para hallar la moda de T.
(c) Halle la media de T.
(d) Halle la varianza de T.
(e) Halle la probabilidad de que el valor de T esté comprendido entre la media y la moda.
(f) (I) Halle $\displaystyle\int_0^T f(t)\ \mathrm{d}t$ donde $0 \leq T \leq \frac{\pi}{2}$.
(II) A partir de lo anterior, verifique que el primer cuartil de T es $\dfrac{\pi}{2}$.

Solución:

(a) Podemos obtener el gráfico con la calculadora.



(b) La moda es aproximadamente 2,46. Se obtiene con la calculadora.

(c) La media la obtenemos integrando

$$\mathrm{E}(T) = \int_0^\pi f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t^2 \operatorname{sen} 2t\ \mathrm{d}t \simeq 2{,}04$$

El valor exacto de esta integral puede obtenerse calculando una primitiva por partes. El valor que damos lo hemos obtenido con la calculadora.

(d) Calculamos primero

$$\mathrm{E}(T^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t^3 \operatorname{sen} 2t\ \mathrm{d}t \simeq 4,67$$

Entonces

$$\mathrm{Var}(T) = \mathrm{E}(T^2) - \mathrm{E}(T)^2 \simeq 0{,}516$$

(e)

$$p = \frac{1}{\pi}\int_{2{,}04}^{2{,}46} t|\operatorname{sen} 2t|\ \mathrm{d}t \simeq 0{,}285$$

(f) (I)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^T t \operatorname{sen} 2t\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^T t\ \mathrm{d}(-\cos 2t) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[-t\cos 2t\Big]_0^T + \frac{1}{2\pi}\int_0^T \cos 2t\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[-t\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\Big]_0^T \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[-T\cos 2T + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2T\Big]
\end{aligned}$$

(II) Para $T = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \operatorname{sen} 2t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi\right) = \frac{1}{4}$$

y, por consiguiente, el primer cuartil es $\frac{\pi}{2}$.

♠♠♠♠