Matemáticas. Bachillerato Internacional.

Exámenes de conjuntos, aplicaciones y grupos.

Jesús García de Jalón de la Fuente
IES Ramiro de Maeztu
Madrid

Índice

1. Examen 2012

Ejercicio 1.

(a) Dos de las cinco condiciones que tiene que cumplir un conjunto S con respecto a la operación binaria $*$ para ser un grupo abeliano son la asociatividad y la conmutatividad. Indique las otras tres condiciones.

(b) A continuación se muestra la tabla de Cayley para la operación binaria $\odot$ definida en el conjunto $T = \{p, q, r, s, t\}$.

$\odot$	p	q	r	s	t
p	s	r	t	p	q
q	t	s	p	q	r
r	q	t	s	r	p
s	p	q	r	s	t
t	r	p	q	t	s

(I) Compruebe que se cumplen exactamente tres de las condiciones necesarias par que $\{T, \odot\}$ sea un grupo abeliano, pero que ni la asociatividad ni la conmutatividad se cumplen.

(II) Halle los subgrupos propios de T que son grupos de orden 2, y comente el resultado en el contexto del teorema de Lagrange.

(III) Halle las soluciones de la ecuación $(p \odot x) \odot x = x \odot p$.

Solución:

(a) La operación debe ser cerrada, debe haber elemento neutro y cada elemento debe tener su simétrico.

(b) (I) De la tabla se deduce que la operación es cerrada, existe elemento neutro (s) y todo elemento tiene su simétrico Todos son simétricos de sí mismos). Veamos que en algún caso no se cumple la propiedad asociativa:

$$p \odot (q \odot t) = p \odot r = t$$
$$(p \odot q) \odot t = r \odot t = p$$

ni la conmutativa:

$$p \odot q = r$$
$$q \odot p = t$$

(II) En realidad no se les puede llamar subgrupos puesto que $(T, \odot)$ no es un grupo. Todos los elementos salvo el elemento neutro son de orden 2. Las potencias de estos elementos forman grupos:

$$\{p, s\}\ ; \qquad \{q, s\}\ ; \qquad \{r, s\}\ ; \qquad \{t, s\}$$

El orden de estos grupos 2 no es divisor del orden de T pero esto no quiere decir que no se cumpla el teorema de Lagrange puesto que T no es un grupo.

(III) Desde luego $x = s$ (el elemento neutro) es solución. Probemos con los otros elementos:

- Para $x = p$:

$$(p \odot p) \odot p = s \odot p = p\ ; \qquad p \odot p = s$$

luego p no es solución.

- Para $x = q$:

$$(p \odot q) \odot q = r \odot q = t\ ; \qquad q \odot p = t$$

Por tanto, $x = q$ es solución.

- Probemos con $x = r$:

$$(p \odot r) \odot r = t \odot r = q\ ; \qquad r \odot p = q$$

y $x = r$ es solución.

- Probemos finalmente $x = t$:

$$(p \odot t) \odot t = q \odot t = r\ ; \qquad t \odot p = r$$

y, por consiguiente, $x = t$ también es solución.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Los elementos de los conjuntos P y Q se toman del conjunto universal $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. $P = \{1,2,3\}$ y $Q = \{2,4,6,8,10\}$.

(*a*) Sabiendo que $R = (P \cap Q')'$, enumere los elementos de R.

(*b*) Para un conjunto S, sea S^* el conjunto de todos los subconjuntos de S, (I) Halle P^* (II) Halle $n(R^*)$

Solución:

(*a*) Teniendo en cuenta que por las leyes de Morgan:

$$R = (P \cap Q')' = P' \cup Q = \{2,4,5,6,7,8,9,10\}$$

(*b*) (I) $P^* = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

(II) Puesto que R tiene 8 elementos, el número de subconjuntos de R es $2^8 = 256$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. La relación R se define sobre el conjunto $\mathbb{N}$ de manera tal que, para $a, b \in \mathbb{N}$, aRb si y solo si $a^3 \equiv b^3 \pmod 7$.

(*a*) Compruebe que R es una relación de equivalencia.

(*b*) Halle la clase de equivalencia a la que pertenece el 0.

(*c*) Denote como C_n la clase de equivalencia a la que pertenece el número n. Enumere los seis primeros elementos de C_1.

(*d*) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\quad C_n = C_{n+7}$.

Solución:

(*a*) Comprobemos que se cumplen las tres propiedades:

- Reflexiva: aRa puesto que $a^3 \equiv a^3 \pmod 7$.
- Simétrica:

$$aRb \quad \Longrightarrow \quad a^3 \equiv b^3 \pmod 7 \quad \Longrightarrow \quad b^3 \equiv a^3 \pmod 7 \quad \Longrightarrow \quad bRa$$

- Transitiva.

$$\begin{cases} aRb & \Longrightarrow \quad a^3 \equiv b^3 \pmod 7 \\ bRc & \Longrightarrow \quad b^3 \equiv c^3 \pmod 7 \end{cases}$$

Entonces, por la propiedad transitiva de la congruencia:

$$a^3 \equiv c^3 \pmod 7 \quad \Longrightarrow \quad aRc$$

(*b*) Los números relacionados con cero cumplen que

$$aR0 \quad \Longrightarrow \quad a^3 \equiv 0 \pmod 7 \quad \Longrightarrow \quad a^3 = \dot{7} \quad \Longrightarrow \quad a = \dot{7}$$

Es decir, son equivalentes a cero, los múltiplos de 7. La clase de equivalencia es:

$$[0] = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, \dots\}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} 2^3 &= 8 \equiv 1 \pmod 7 \\ 3^3 &= 27 \equiv 6 \pmod 7 \\ 4^3 &= 64 \equiv 1 \pmod 7 \\ 5^3 &= 125 \equiv 6 \pmod 7 \\ 6^3 &= 216 \equiv 6 \pmod 7 \end{aligned}$$

la clase de equivalencia C_1 es:

$$C_1 = \{1, 2, 4, 8, 9, 11, \dots\}$$

(*c*) Basta ver que $(n+7)Rn$. En efecto

$$(n+7)^3 - n^3 = n^3 + 21n^2 + 63n + 343 - n^3 = 21n^2 + 63n + 343 = \dot{7} \quad \Longrightarrow \quad (n+7)Rn$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4.

(a) La función $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ viene dada por $g(n) = |n| - 1$ para $n \in \mathbb{Z}$. Compruebe que g no es ni sobreyectiva ni inyectiva.

(b) El conjunto S es finito. Si la función $f : S \longrightarrow S$ es inyectiva, compruebe que f es sobreyectiva.

(c) Utilizando el conjunto $\mathbb{Z}^+$ como dominio y como conjunto final, dé un ejemplo de función inyectiva que no sea sobreyectiva.

Solución:

(a) La función no es inyectiva puesto que, por ejemplo, $g(-1) = g(1)$. Tampoco es sobreyectiva puesto que -2 está en el conjunto final de la aplicación y no hay ningún $n \in \mathbb{Z}$ tal que $g(n) = -2$.

(b) Sea N el número de elementos del conjunto S. El conjunto

$$B = \{f(x) \mid x \in S\}$$

está formado por elementos de S. Además como la función es inyectiva, todos los valores de la función son diferentes. El conjunto B está contenido en S y tiene el mismo número de elementos que S. Entonces $B = S$.

(c) En este caso es posible porque el conjunto no es finito. Un ejemplo de función inyectiva y no sobreyectiva sería:

$$f(n) = n + 3$$

Es inyectiva y no sobreyectiva puesto que no existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f(n) = 1$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. El grupo G tiene un único elemento h de orden 2.

(a) (I) Compruebe que para todo $g \in G$, ghg^{-1} tiene orden 2.

(II) Deduzca que para todo $g \in G$, $gh = hg$.

(b) Considere el grupo G para la multiplicación de matrices, que consta de cuatro matrices 2×2 y contiene un único elemento de orden 2, siendo

$$h = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(I) Compruebe que G es cíclico.

(II) Dado el elemento neutro $e = I_2$, halle un par de matrices que representen a los dos elementos restantes de G, donde cada elemento es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Solución:

(a) (I) En efecto, sea $h^2 = e$:

$$\begin{aligned} (ghg^{-1})(ghg^{-1}) &= (gh)(g^{-1}g)(hg^{-1}) && \text{por la propiedad asociativa} \\ &= (gh)e(hg^{-1}) \\ &= gh^2g^{-1} \\ &= gg^{-1} && \text{como } h \text{ es de orden 2, } h^2 = e \\ &= e \end{aligned}$$

y, por consiguiente, ghg^{-1} es de orden 2.

(II) Puesto que h es el único elemento de orden 2 y ghg^{-1} es de orden 2, se verifica que:

$$ghg^{-1} = h \implies ghg^{-1}g = hg \implies gh = hg$$

(b) (I) Salvo isomorfismo, solamente hay dos grupos de orden 4, el grupo cíclico y el grupo de Klein. En el grupo de Klein todos los elementos salvo el neutro tienen orden 2. En el grupo de las matrices solamente hay un elemento de orden 2. Entonces debe ser cíclico.

(II) Sea:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

un generador del grupo:

$$g^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad g = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el elemento que falta es:

$$g^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

2. Examen 2013

Ejercicio 1. La operación binaria $*$ se define sobre $\mathbb{N}$ del siguiente modo:

$$a * b = 1 + ab$$

Determine si $*$: (a) Es cerrada. (b) Es conmutativa. (c) Es asociativa. (d) Tiene elemento neutro.

Solución:

(a) La operación es cerrada puesto que:

$$a, b \in \mathbb{N} \implies a * b = 1 + ab \in \mathbb{N}$$

(b) Es conmutativa ya que:

$$a * b = 1 + ab = 1 + ba = b * a$$

(c) Veamos si es asociativa:

$$(a * b) * c = (1 + ab) * c = 1 + (1 + ab)c = 1 + c + abc$$
$$a * (b * c) = a * (1 + bc) = 1 + a(1 + bc) = 1 + a + abc$$

La operación no es asociativa.

(d) El elemento neutro, si existe, debe cumplir:

$$ae = a \implies 1 + ae = a \implies e = \frac{a-1}{a}$$

no existe elemento neutro pues, debería ser el mismo para cualquier elemento y, además, $\frac{a-1}{a}$ no es un número natural.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Considere el conjunto

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

con la operación binaria de multiplicación módulo 14 denotada por $\times_{14}$.

(a) Copie y complete la siguiente tabla de Cayley para esta operación binaria:

$\times_{14}$	1	3	5	7	9	11	13
1	1	3	5	7	9	11	13
3	3				13	5	11
5	5				3	13	9
7	7						
9	9	13	3				
11	11	5	13				
13	13	11	9				

(b) Dé una razón que explique por qué $\{S, \times_{14}\}$ no es un grupo.

(c) Compruebe que se puede formar un nuevo conjunto G eliminando uno de los elementos de S de modo que $\{G, \times_{14}\}$ sea un grupo.

(d) Determinar el orden de cada uno de los elementos de $\{G, \times_{14}\}$.

(e) Halle los subgrupos propios de $\{G, \times_{14}\}$.

Solución:

(a)

$\times_{14}$	1	3	5	7	9	11	13
1	1	3	5	7	9	11	13
3	3	9	1	7	13	5	11
5	5	1	11	7	3	13	9
7	7	7	7	7	7	7	7
9	9	13	3	7	11	1	5
11	11	5	13	7	1	9	3
13	13	11	9	7	5	3	1

(b) El elemento 7 no tiene inverso.

(c) Eliminando el elemento 7 el conjunto que queda es un grupo:

$\times_{14}$	1	3	5	9	11	13
1	1	3	5	9	11	13
3	3	9	1	13	5	11
5	5	1	11	3	13	9
9	9	13	3	11	1	5
11	11	5	13	1	9	3
13	13	11	9	5	3	1

Hay elemento neutro, todos tienen inverso y se cumple la propiedad asociativa pues es una propiedad que se cumple siempre para el producto de clases de restos. Además es un grupo conmutativo.

(d) El orden de los elementos es el siguiente:

Elementos	1	3	5	9	11	13
Orden	1	6	6	3	3	2

(e) Puesto que el grupo tiene orden 6 los subgrupos propios deben de tener orden 2 o 3, de acuerdo con el teorema de Lagrange. Por otra parte, los grupos de orden 2 o 3 son cíclicos. Teniendo esto en cuenta, tenemos un subgrupo de orden 2 generado por 13:

$$G_1 = \{1, 13\}$$

y un subgrupo de orden 3 generado por el número 9 (o el 11 que también es generador):

$$G_2 = \{1, 9, 11\}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se define del siguiente modo:

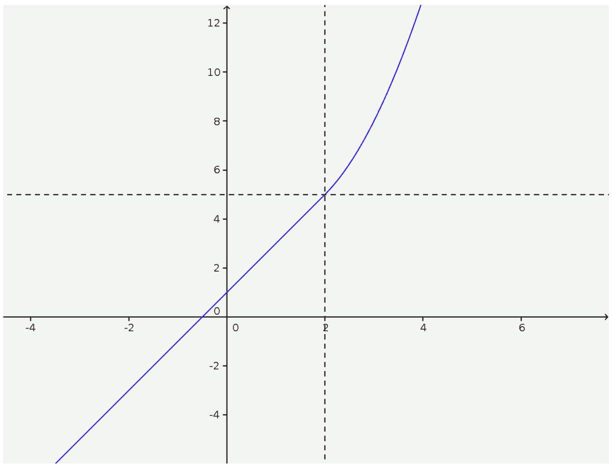
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) (I) Dibuje aproximadamente la gráfica de f (II) Haciendo referencia a la gráfica que ha dibujado, compruebe que f es una aplicación biyectiva.

(b) Halle $f^{-1}(x)$.

Solución:

(a) (I)



(II) Podemos ver que la función es siempre creciente, por consiguiente, es inyectiva. Por otra parte, es una función continua que tiende a $-\infty$ a la izquierda y a $+\infty$ por la derecha. Su recorrido son todos los números reales y es, por tanto, suprayectiva.

(b) Calculamos la función inversa de $u = 2x + 1$:

$$x = 2u + 1 \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{x-1}{2} \quad \Longrightarrow \quad u^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

y la inversa de $v = x^2 - 2x + 5$:

$$x = v^2 - 2v + 5 \quad \Longrightarrow \quad v^2 - 2v + 5 - x = 0$$

$$v = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(x-5)}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + (x-5)} = 1 \pm \sqrt{x-4}$$

Debemos tomar el signo positivo para que cuando $x = 5$, $y = 2$. así la función inversa es:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \le 5 \\ 1 + \sqrt{x-4} & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. La relación R se define sobre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ de la siguiente manera:

$$aRb \quad \Longleftrightarrow \quad a(a+1) \equiv b(b+1) \pmod 5$$

(a) Compruebe que R es una relación de equivalencia.

(b) Compruebe que la equivalencia que define R se puede escribir de la forma:

$$aRb \quad \Longleftrightarrow \quad (a-b)(a+b+1) \equiv 0 \pmod 5$$

(c) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo determine las clases de equivalencia.

Solución:

(a) Veamos que se cumplen las tres propiedades:

- Reflexiva: aRa puesto que $a(a+1) \equiv a(a+1) \pmod 5$.
- Simétrica:

$$\begin{aligned} aRb \quad &\Longrightarrow \quad a(a+1) \equiv b(b+1) \pmod 5 \\ &\Longrightarrow \quad b(b+1) \equiv a(a+1) \pmod 5 \\ &\Longrightarrow \quad bRa \end{aligned}$$

- Transitiva:

$$\begin{cases} aRb \quad \Longrightarrow \quad a(a+1) \equiv b(b+1) \pmod 5 \\ bRc \quad \Longrightarrow \quad b(b+1) \equiv c(c+1) \pmod 5 \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$a(a+1) \equiv c(c+1) \pmod 5 \quad \Longrightarrow \quad aRc$$

(b) En efecto:

$$\begin{aligned} aRb \quad &\Longrightarrow \quad a(a+1) \equiv b(b+1) \pmod 5 \\ &\Longrightarrow \quad a^2 - b^2 + a - b \equiv 0 \pmod 5 \\ &\Longrightarrow \quad (a-b)(a+b) + (a-b) \equiv 0 \pmod 5 \\ &\Longrightarrow \quad (a-b)(a+b+1) \equiv 0 \pmod 5 \end{aligned}$$

(c) A partir de lo anterior vemos que dos números son equivalentes si su diferencia es múltiplo de 5 o lo es la suma de los números más 1. Así, 1 es equivalente a 6 y también a 3. Las clases de equivalencia son las siguientes:

$$[1] = \{1, 3, 6, 8, 11\}$$
$$[2] = \{2, 7, 12\}$$
$$[4] = \{4, 5, 9, 10\}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. H y K son subgrupos de un grupo G. Considerando los cuatro axiomas de grupo, demuestre que $H \cap K$ también es un subgrupo de G.

Solución:

Veamos que se cumplen en $H \cap K$ las propiedades de grupo:

- La operación es cerrada en $H \cap K$:

$$\begin{aligned} a, b \in H \cap K &\implies a, b \in H,\ a, b \in K && \text{por ser } H \text{ y } K \text{ subgrupos} \\ &\implies ab \in H,\ ab \in K \\ &\implies ab \in H \cap K \end{aligned}$$

- La propiedad asociativa se cumple en $H \cap K$ puesto que se cumple en H y en K.
- El elemento neutro está en $H \cap K$:

$$\begin{cases} e \in H \\ e \in K \end{cases} \implies e \in H \cap K$$

- Demostremos que si $a \in H \cap K$ entonces $a^{-1} \in H \cap K$. En efecto:

$$\begin{aligned} a \in H \cap K &\implies a \in H,\ a \in K && \text{por ser } H \text{ y } K \text{ grupos:} \\ &\implies a^{-1} \in H,\ a^{-1} \in K \\ &\implies a^{-1} \in H \cap K \end{aligned}$$

♠♠♠♠

3. Examen 2014

Ejercicio 1. La operación binaria Δ se define sobre el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mediante la siguiente tabla de Cayley

Δ	1	2	3	4	5
1	1	1	2	3	4
2	1	2	1	2	3
3	2	1	3	1	2
4	3	2	1	4	1
5	4	3	2	1	5

(*a*) Indique si S es cerrado respecto a la operación Δ y justifique su respuesta.

(*b*) Indique si Δ es conmutativa y justifique su respuesta.

(*c*) Indique si existe un elemento neutro y justifique su respuesta.

(*d*) Determine si Δ es asociativa y justifique su respuesta.

(*e*) Halle las soluciones de la ecuación $a\Delta b = 4\Delta b$, para $a \neq 4$.

Solución:

(*a*) Es cerrado prque todos los resultados de operar dos elementos de S están en S.

(*b*) Es conmutativa porque la tabla es simétrica.

(*c*) No hay elemento neutro. Esto se desprende de la tabla, ningún elemento al operarlo con los demás los deja invariantes.

(*d*) No es asociativa puesto que, por ejemplo,

$$2\Delta(3\Delta 4) = 2\Delta 1 = 1$$
$$(2\Delta 3)\Delta 4 = 1\Delta 4 = 3$$

(*e*) De la tabla se desprenden las soluciones $a = 2, b = 2$ y $a = 2, b = 3$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Considere el conjunto S, definido mediante $S = \{s \in \mathbb{Q} \mid 2s \in \mathbb{Z}\}$. Puede suponer que $+$ y $\times$ son operaciones binarias asociativas sobre $\mathbb{Q}$.

(*a*) (I) Escriba los seis elementos más pequeños de S que no son negativos.

(II) Muestre que $\{S, +\}$ es un grupo.

(III) Dé una razón que explique por qué $\{S, \times\}$ no es un grupo. Justifique su respuesta.

(*b*) La relación R se define sobre S mediante $s_1 R s_2$ si $3s_1 + 5s_2 \in \mathbb{Z}$.

(I) Muestre que R es una relación de equivalencia.

(II) Determine las clases de equivalencia.

Solución:

(*a*) (I) $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$. El conjunto S está formado por los números enteros y las fracciones irreducibles de denominador igual a 2.

(II) La operación es interna y asociativa. El elemento neutro, cero, está en S y también el opuesto de cada elemento.

(III) La operación no es interna. Por ejemplo

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \notin S$$

(*b*) (I) Veamos que se cumplen las tres propiedades

- Reflexiva. aRa puesto que $3a + 5a \in \mathbb{Z}$ tanto si a es entero como si es una fracción de denominador dos.

– Simétrica. Hay que tener en cuenta que si $a \in S$ entonces $2a \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$\begin{aligned} aRb &\implies 3a+5b \in \mathbb{Z} \\ &\implies 3a+2a+5b-2b \in \mathbb{Z} && \text{puesto que } 2a, 2b \in \mathbb{Z} \\ &\implies 3b+5a \in \mathbb{Z} \\ &\implies bRa \end{aligned}$$

– Transitiva:

$$\begin{aligned} \begin{cases} aRb \\ bRc \end{cases} &\implies \begin{cases} 3a+5b \in \mathbb{Z} \\ 3b+5c \in \mathbb{Z} \end{cases} && \text{sumando} \\ &\implies 3a+8b+5c \in \mathbb{Z} && \text{y puesto que } 8b \in \mathbb{Z} \\ &\implies 3a+5c \in \mathbb{Z} \\ &\implies aRc \end{aligned}$$

(II) Una clase de equivalencia está formada por los números enteros y otra por las fracciones irreducibles de denominador igual a 2.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Los conjuntos X e Y se definen mediante $X =]0,1[$, $Y = \{0,1,2,3,4,5\}$.

(a) (I) Dibuje aproximadamente en el plano cartesiano el conjunto $X \times Y$.

(II) Dibuje aproximadamente en el plano cartesiano el conjunto $Y \times X$.

(III) Indique $(X \times Y) \cap (Y \times X)$.

(b) Considere la función $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $f(x,y) = x+y$ y la función $g : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $g(x,y) = xy$.

(I) Halle el recorrido de la función f.

(II) Halle el recorrido de la función g.

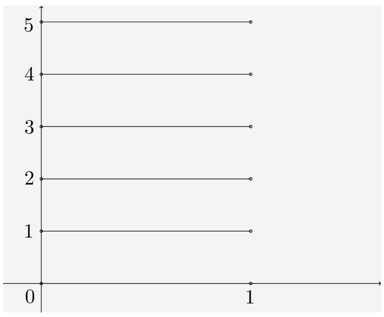
(III) Muestre que f es inyectiva.

(IV) Halle $f^{-1}(\pi)$ como valor exacto.

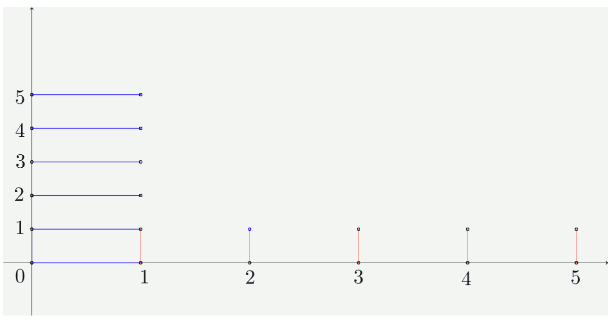
(V) Halle todas las soluciones de $g(x,y) = \frac{1}{2}$.

Solución:

(a) (I)



(II)



(III) La intersección es vacía.

(b) (I) El recorrido de la función f es $(0,6)\setminus\{1,2,3,4,5\}$.
(II) El recorrido de la función g es $[0,5)$.
(III) Por una parte se verifica que:

$$x_1 > x_2 \quad\Longrightarrow\quad f(x_1,y) > f(x_2,y)$$

Es decir, para puntos del mismo segmento, los valores de la función son todos diferentes. Por otra parte

$$y_1 > y_2 \quad\Longrightarrow\quad f(x_1,y_1) > f(x_2,y_2)$$

O sea que el valor de la función en un segmento correspondiente a un valor mayor de y siempre es mayor que el del valor menor valga lo que valga x. Los valores de la función se ordenan según los valores de la ordenada y si las ordenadas son iguales, según los valores de la abscisa. En consecuencia la función no toma valores iguales en puntos diferentes y es, en consecuencia, inyectiva.
(IV) $f^{-1}(\pi) = (\pi-3,3)$.
(V) Las soluciones son $\left(\frac{1}{2},1\right)$, $\left(\frac{1}{4},2\right)$, $\left(\frac{1}{6},3\right)$, $\left(\frac{1}{8},4\right)$ y $\left(\frac{1}{10},5\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos finitos.

(a) Demuestre que $f(e_G) = e_H$, donde e_G es el elemento neutro de G y e_H es el elemento neutro de H.
(b) (I) Demuestre que el núcleo de f, $K = \operatorname{Ker}(f)$, es cerrado respecto a la operación del grupo.
(II) Deduzca que K es un subgrupo de G.
(c) (I) Demuestre que $gkg^{-1} \in K$ para todo $g \in G,\ k \in K$.
(II) Deduzca que toda clase lateral por la izquierda de K en G es también una clase lateral por la derecha.

Solución:

(a) Sea x un elemento cualquiera de G:

$$f(x) = f(e_Gx) = f(e_G)f(x) \quad\Longrightarrow\quad f(e_G) = e_H$$

Al operar $f(x)$ con $f(e_G)$ queda invariante. Por eso $f(e_G)$ debe ser el elemento neutro de H.

(b) (I) En efecto

$$\begin{aligned} a,b \in \operatorname{Ker}(f) \quad &\Longrightarrow\quad f(a) = e_H,\ f(b) = e_H \\ &\Longrightarrow\quad f(ab) = f(a)f(b) = e_He_H = e_H \\ &\Longrightarrow\quad ab \in \operatorname{Ker}(f) \end{aligned}$$

y la operación es cerrada.

(II) Ya se ha demostrado que la operación es cerrada en el núcleo del homomorfismo y que el elemento neutro pertenece al núcleo. Queda por demostrar que si $a \in \operatorname{Ker}(f)$ entonces también $a^{-1} \in \operatorname{Ker}(f)$:

$$a \in K \quad\Longrightarrow\quad e_H = f(e_G) = f(a^{-1}a) = f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1})e_H = f(a^{-1}) \quad\Longrightarrow\quad a^{-1} \in K$$

(c) (I) En efecto:

$$\begin{aligned} g \in G,\ k \in K \quad\Longrightarrow\quad f(gkg^{-1}) &= f(g)f(k)f(g^{-1}) \\ &= f(g)e_Hf(g^{-1}) \\ &= f(g)f(g^{-1}) \\ &= f(gg^{-1}) \\ &= f(e_G) \\ &= e_H \end{aligned}$$

y por tanto, $gkg^{-1} \in K$.

(II) Sea

$$\begin{aligned} x \in gK \quad &\Longrightarrow\quad \exists k \in K \mid x = gk \\ &\Longrightarrow\quad gkg^{-1} = xg^{-1} \in K \\ &\Longrightarrow\quad xg^{-1} = k',\ k' \in K \\ &\Longrightarrow\quad x = k'g \\ &\Longrightarrow\quad x \in Kg \end{aligned}$$

♠♠♠♠

4. Examen 2015

Ejercicio 1. Considere el conjunto $S = \{p, q, r, s, t, u\}$, compuesto por las permutaciones de los elementos del conjunto $\{1, 2, 3\}$ y definido mediante:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sea $\circ$ la composición de permutaciones, de modo tal que $a \circ b$ significa b seguida de a. Puede suponer que $(S, \circ)$ forma un grupo.

(a) Complete la siguiente tabla de Cayley:

$\circ$	p	q	r	s	t	u
p						
q			t			s
r		u		t	s	q
s		t	u			r
t		s	q	r		
u		r	s	q		

(b) (I) Indique el simétrico de cada elemento.

(II) Determine el orden de cada elemento.

(c) Escriba los subgrupos que contienen a:

(I) r

(II) u

Solución:

(a)

$\circ$	p	q	r	s	t	u
p	p	q	r	s	t	u
q	q	p	t	u	r	s
r	r	u	p	t	s	q
s	s	t	u	p	q	r
t	t	s	q	r	u	p
u	u	r	s	q	p	t

(b) (I)

Elemento	Simétrico
p	p
q	q
r	r
s	s
t	u
u	t

(II)

Elemento	Orden
p	1
q	2
r	2
s	2
t	3
u	3

(c) (I) $\{p, r\}$
(II) $\{p, t, u\}$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. La operación binaria $*$ se define para $x, y \in S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mediante:

$$x * y = \left(x^3y - xy\right) \quad \text{mód } 7$$

(a) Halle el elemento e tal que $e * y = y$ para todo $y \in S$.

(b) (I) Halle la menor solución de $x * x = e$.
(II) Deduzca que $\{S, *\}$ no es un grupo.

(c) Determine si e es o no un elemento neutro.

Solución:

(a) $e = 5$ puesto que:

$$5 * y = (125y - 5y) \quad \text{mód } 7 \equiv 120y \quad \text{mód } 7 \equiv y \quad \text{mód } 7$$

ya que $120 \equiv 1 \pmod 7$.

(b) (I) $0 * 0 = 0 \ \text{ mód } 7$; $\quad 1 * 1 = 0 \ \text{ mód } 7$; $\quad 2 * 2 = (16 - 4) \ \text{ mód } 7 = 5 = e$
El número menor que cumple la condición es 2.

(II) Si S fuese un grupo sería un grupo de orden 7. De acuerdo con el apartado anterior, 2 tendría orden 2, lo cual es imposible porque según el teorema de Lagrange el orden de un elemento debe ser un divisor del orden del grupo.

(c) No es un elemento neutro porque no cumple la condición:

$$e * x = x * e = x$$

por ejemplo:

$$3 * 5 = (27 \cdot 5 - 3 \cdot 5) \quad \text{mód } 7 = 120 \quad \text{mód } 7 = 1$$
$$5 * 3 = 3$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. La relación R se define sobre $\mathbb{Z}$ mediante xRy si y solo si $x^2y \equiv y \ \text{ mód } 6$.

(a) Muestre que el producto de tres enteros consecutivos es divisible entre 6.

(b) A partir de la anterior, demuestre que R es reflexiva.

(c) Halle el conjunto de todos los y para los cuales $5Ry$.

(d) Halle el conjunto de todos los y para los cuales $3Ry$.

(e) Utilizando las respuestas de los apartados (c) y (d), muestre que R no es simétrica.

Solución:

(a) Para que un número sea múltiplo de 6 debe ser múltiplo de 2 y de 3. Entre tres números consecutivos hay siempre un múltiplo de 3 y al menos un múltiplo de 2. Por consiguiente, su producto es múltiplo de 6.

(*b*) Demostremos que la relación es reflexiva. Hay que demostrar que:

$$xRx \iff x^3 \equiv x \mod 6 \iff x^3 - x = \dot{6}$$

En efecto, para cualquier $x \in \mathbb{Z}$:

$$x^3 - x = x(x^2-1) = (x-1)x(x+1) = \dot{6}$$

puesto que $x-1$, x y $x+1$ son tres enteros consecutivos y, de acuerdo con el apartado anterior, su producto es múltiplo de 6.

(*c*) Veamos que enteros cumplen $5Ry$:

$$5Ry \iff 5^2y \equiv y \mod 6 \iff 25y - y = 24y = \dot{6}$$

Esta igualdad se cumple siempre ya que 24 es múltiplo de 6. Por tanto $5Ry$ se cumple para todo y.

(*d*) De la misma forma:

$$3Ry \iff 3^2y \equiv y \mod 6 \iff 9y - y = 8y = \dot{6}$$

El entero $8y$ es múltiplo de 6 si y solo si y es múltiplo de 3. Los números relacionados con 3 son los múltiplos de 3.

(*e*) Está claro que la relación no es simétrica pues, de acuerdo con lo obtenido en los apartados anteriores, $5R3$ pero no se cumple $3R5$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Sean X e Y conjuntos. las funciones $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ son tales que $g \circ f$ es la función identidad sobre X.

(*a*) Demuestre que:

  (I) f es una función inyectiva.

  (II) g es una función sobreyectiva.

(*b*) Sabiendo que $X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y que $Y = \mathbb{R}$, elija un par apropiado de funciones f y g para mostrar que g no es necesariamente una función biyectiva.

Solución:

(*a*) Que $g \circ f$ es la función identidad significa que $g \circ f(x) = x$.

  (I) Hay que demostrar que $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$. En efecto:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

  (II) Hay que demostrar que para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $g(y) = x$. Sea $x \in X$ y llamemos $y = f(x)$:

$$y = f(x) \implies g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = x$$

(*b*) Hemos demostrado que g es una función sobreyectiva. Vamos a ver que, sin embargo, g no es necesariamente inyectiva y, en consecuencia, no tiene por qué ser biyectiva. Sean las funciones:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto +\sqrt{x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Se cumple que para $x \in X$, $g \circ f(x) = g(\sqrt{x}) = x$. Sin embargo, g no es inyectiva porque, por ejemplo, $g(-1) = g(1)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Considere los conjuntos:

$$G = \left\{ \frac{n}{6^i} \mid n \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N} \right\}, \qquad H = \left\{ \frac{m}{3^j} \mid m \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N} \right\}$$

(*a*) Muestre que $(G, +)$ forma un grupo, donde $+$ denota la suma sobre $\mathbb{Q}$. se puede suponer que se cumple la asociatividad.

(*b*) Suponiendo que $(H, +)$ forma un grupo, muestre que es un subgrupo propio de $(G, +)$.

La aplicación $\phi : G \longrightarrow G$ viene dada por $\phi(g) = g + g$, para $g \in G$.

(*c*) Demuestre que ϕ es un isomorfismo.

Solución:

(*a*) El conjunto G es cerrado respecto a la suma. Sean

$$a = \frac{n}{6^i}\ ; \quad b = \frac{m}{6^j}$$

dos elementos de G. Entonces:

$$a + b = \frac{n}{6^i} + \frac{m}{6^j} = \frac{6^j n + 6^i m}{6^{i+j}} \in G$$

El elemento neutro es:

$$e = 0 = \frac{0}{6} \in G$$

y, finalmente, el simétrico de $a = \dfrac{n}{6^i}$ es $-a = \dfrac{-n}{6^i}$.

(*b*) Puesto que suponemos que H es un grupo hay que demostrar que H es un subconjunto de G y que existen elementos de G que no están en H:
Sea $x \in H$:

$$x \in H \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{m}{3^j} = \frac{m \cdot 2^j}{2^j 3^j} = \frac{2^j m}{6^j} \quad \Longrightarrow \quad x \in G$$

Por tanto H es un subconjunto de G. Además $\frac{1}{6} \in G$ pero $\frac{1}{6} \notin H$ por lo que H es distinto de G y es un subgrupo propio.

(*c*) Veamos en primer lugar que es un homomorfismo es decir $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$.
Sean $a = \dfrac{m}{6^i}$, $b = \dfrac{n}{6^j}$:

$$\begin{aligned}\phi\,(a + b) &= 2(a + b)\\ &= 2a + 2b\\ &= \phi(a) + \phi(b)\end{aligned}$$

Comprobemos ahora que la aplicación es inyectiva:

$$\phi(g_1) = \phi(g_2) \quad \Longrightarrow \quad 2g_1 = 2g_2 \quad \Longrightarrow \quad g_1 = g_2 \quad \Longrightarrow \quad \phi \text{ inyectiva}$$

Para demostrar que es suprayectiva hay que ver que para todo $g \in G$ existe $g' \in G$ tal que $\phi(g') = g$.
Sea $g = \dfrac{m}{6^i}$ y $g' = \dfrac{g}{2}$. Entonces

- Comprobemos que $g' \in G$:

$$g' = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{6^i} = \frac{m}{2 \cdot 6^i} = \frac{6m}{2 \cdot 6^{i+1}} = \frac{3m}{6^{i+1}} \in G$$

- Además:

$$\phi(g') = 2g' = g$$

luego la aplicación es suprayectiva. Como también es inyectiva resulta que es biyectiva.
Puesto que ϕ es un homomorfismo y la aplicación es biyectiva es un isomomorfismo.

♠♠♠♠

5. Examen 2016

Ejercicio 1. (19 puntos) La siguiente tabla de Cayley correponde a la operación binaria multiplicación módulo 9 representada mediante el símbolo $*$, sobre el conjunto $S = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

$*$	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8				
5	5	1				
7	7	5				
8	8	7				

(a) Copie y complete la tabla.

(b) Muestre que $\{S, *\}$ es un grupo abeliano.

(c) Determine el orden de cada uno de los elementos de $\{S, *\}$.

(d) (I) Halle los dos subgrupos propios de $\{S, *\}$.

(II) Halle la clase lateral de cada uno de estos subgrupos con respecto al elemento 5.

(e) Resuelva la ecuación $2 * x * 4 * x * 4 = 2$.

Solución:

(a)

$*$	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8	7	2	1	5
5	5	1	2	7	8	4
7	7	5	1	8	4	2
8	8	7	5	4	2	1

(b) La operación es asociativa pueto que lo es la multiplicación módulo 9. El elemento neutro es el 1 y todos los elementos tienen inverso. También es conmutativa puesto que lo es la multiplicación módulo 9 y, además, la tabla es simétrica. Por consiguiente se trata de un grupo abeliano.

(c) El orden está dado en la siguiente tabla:

elemento	1	2	4	5	7	8
orden	1	6	3	6	3	2

(d) (I) Los subgrupos son $\{1, 8\}$ de orden 2 y $\{1, 4, 7\}$ de orden 3.

(II) Multiplicando cada uno de los elementos de cada subgrupo por 5 se obtienen las clases. Son $\{5, 4\}$ y $\{5, 2, 8\}$

(e) Puesto que el grupo es conmutativo la ecuación es equivalente a:

$$\begin{aligned}
&2 * 4 * 4 * x * x = 2\\
&8 * 4 * x * x = 2\\
&5 * x * x = 2\\
&x * x = 5^{-1} * 2\\
&x * x = 2 * 2\\
&x * x = 4\\
&x = 2, \quad x = 7
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (12 puntos) La relación R se define sobre $\mathbb{Z}^+$ de tal modo que

$$aRb \iff b^n - a^n \equiv 0 \mod p$$

donde n, p son números enteros positivos fijos y mayores que 1.

(a) Muestre que R es una relación de equivalencia.

(b) Sabiendo que $n = 2$ y $p = 7$, determine los cuatro primeros elementos de cada una de las cuatro clases de equivalencia de R.

Solución:

(a) Es una relación de equivalencia puesto que:

- Reflexiva: aRa puesto que $a^n - a^n = 0 \equiv 0 \mod p$
- Simétrica:

$$\begin{aligned} aRb &\implies a^n - b^n \equiv 0 \mod p \\ &\implies a^n - b^n = \dot{p} \\ &\implies b^n - a^n = \dot{p} \\ &\implies b^n - a^n \equiv 0 \mod p \\ &\implies bRa \end{aligned}$$

- Transitiva:

$$\begin{aligned} aRb \text{ y } bRc &\implies a^n - b^n \equiv 0 \mod p \text{ y } b^n - c^n \equiv 0 \mod p \\ &\implies a^n - b^n = \dot{p} \text{ y } b^n - c^n = \dot{p} \\ &\implies a^n - b^n + b^n - c^n = \dot{p} \\ &\implies a^n - c^n = \dot{p} \\ &\implies a^n - c^n \equiv 0 \mod p \\ &\implies aRc \end{aligned}$$

(b) En este caso $aRb \iff a^2 - b^2 = \dot{7}$:

$$\begin{aligned} [1] &= \{1, 6, 8, 13 \ldots\} \\ [2] &= \{2, 5, 9, 12 \ldots\} \\ [3] &= \{3, 4, 10, 11, \ldots\} \\ [7] &= \{7, 14, 21, 28, \ldots\} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (7 puntos) El grupo $\{G, *\}$ es abeliano y la función biyectiva $f : G \longrightarrow G$ viene dada por $f(x) = x^{-1}$, $x \in G$. Muestre que f es un isomorfismo.

Solución:

La aplicación es inyectiva puesto que:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies x^{-1} = y^{-1} && \text{multiplicando por } x \\ &\implies xx^{-1} = xy^{-1} \\ &\implies e = xy^{-1} && \text{y como } e = yy^{-1} \\ &\implies xy^{-1} = yy^{-1} && \text{y por la propiedad simplificativa} \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

Además es suprayectiva pues cualquier elemento x es imagen de otro elemento (de x^{-1}). Por consiguiente es biyectiva.

Además es un homomorfismo pues:

$$\begin{aligned} f(xy) &= (xy)^{-1} \\ &= y^{-1}x^{-1} && \text{puesto que el grupo es abeliano} \\ &= x^{-1}y^{-1} \\ &= f(x)f(y) \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (13 puntos) La función f viene dada por

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \text{ donde } f(x,y) = \left(\sqrt{xy}, \frac{x}{y}\right)$$

(a) Demuestre que f es una función inyectiva.

(b) (I) Demuestre que f es una función sobreyectiva.

(II) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, escriba la función inversa f^{-1}.

Solución:

(a) Debemos demostrar que

$$f(x,y) = f(u,v) \quad \Longrightarrow \quad x = y,\ u = v$$

En efecto:

$$f(x,y) = f(u,v) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{xy} = \sqrt{uv} \\ \frac{x}{y} = \frac{u}{v} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} xy = uv \\ \frac{x}{y} = \frac{u}{v} \end{cases}$$

Despejando y en la segunda igualdad y sustituyendo en la primera se obtiene:

$$x\frac{xv}{u} = uv \quad \Longrightarrow \quad x^2 = u^2$$

y, puesto que x y u son positivos, resulta $x = u$. De $x = u$ y $xy = uv$ obtenemos $y = v$.

(b) (I) Debemos demostrar que dados el par (u,v) siempre existe (x,y) tal que $f(x,y) = (u,v)$. En efecto:

$$f(x,y) = (u,v) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{xy} = u \\ \frac{x}{y} = v \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} xy = u^2 \\ \frac{x}{y} = v \end{cases}$$

Despejando y en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$y = \frac{x}{v} \quad \Longrightarrow \quad x\frac{x}{v} = u^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = u^2 v \quad \Longrightarrow \quad x = u\sqrt{v}$$

y entonces

$$y = \frac{x}{v} = \frac{u\sqrt{v}}{v} = \frac{u}{\sqrt{v}}$$

Estas igualdades son ciertas puesto que u y v son números positivos.

(II) Puesto que la función es inyectiva y suprayectiva es biyectiva y existe la función inversa. En el apartado anterior hemos visto que:

$$f\left(u\sqrt{v}, \frac{u}{\sqrt{v}}\right) = (u,v)$$

Por consiguiente:

$$f^{-1}(u,v) = \left(u\sqrt{v}, \frac{u}{\sqrt{v}}\right)$$

o, cambiando el nombre de las variables:

$$f^{-1}(x,y) = \left(x\sqrt{y}, \frac{x}{\sqrt{y}}\right)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (9 puntos) El grupo $\{G, *\}$ está definido en el conjunto G, con la operación binaria $*$. H es un subconjunto de G que se define mediante

$$H = \{x \in G \mid a * x * a^{-1} = x, \forall a \in G\}$$

Demuestre que $\{H, *\}$ es un subgrupo de $\{G, *\}$.

Solución:

Veamos en primer lugar que la operación está bien definida en H, es decir, que si $x, y \in H$ entonces $x * y \in H$:

$$\forall a \in G: \qquad a * (*x * y) * a^{-1} = a * x * a^{-1} * a * y * a^{-1} = (a * x * a^{-1}) * (a * y * a^{-1}) = x * y \quad \Longrightarrow \quad xy \in H$$

La operación es asociativa en H puesto que lo es en G.

El elemento neutro pertenece a H ya que:

$$a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e$$

Solo queda por comprobar que si $x \in H$ también $x^{-1} \in H$. Sea $x \in H$:

$$\begin{aligned} a * x^{-1} * a^{-1} &= \left(a^{-1} * x * a\right)^{-1} && \text{el término entre paréntesis es igual a } x \\ &= x^{-1} \\ &\Longrightarrow x^{-1} \in H \end{aligned}$$

La demostración se puede hacer también dándose cuenta que H es el conjunto de los elementos del grupo que conmutan con todos los demás. Veamos, por ejemplo que si x conmuta con a también lo hace x^{-1}:

$$\begin{aligned} & x * a = a * x && \text{multiplicando a la izquierda y derecha por } x^{-1} \\ & x^{-1} * x * a * x^{-1} = x^{-1} * a * x * x^{-1} \\ & e * a * x^{-1} = x^{-1} * a * e \\ & a * x^{-1} = x^{-1} * a \end{aligned}$$

o que si x e y conmutan con a, también conmuta su producto:

$$a * (x * y) = (a * x) * y = (x * a) * y = x * (a * y) = x * (y * a) = (x * y) * a$$

♠♠♠♠

6. Examen 2017

Ejercicio 1. (10 puntos)

El conjunto A contiene todos los números enteros positivos menores que 20 que son congruentes con 3 módulo 4.
El conjunto B contiene todos los números primos menores que 20.

(a) (I) Escriba todos los elementos de A y todos los elementos de B.
(II) Determine la diferencia simétrica, $A \triangle B$ de los conjuntos A y B.

(b) El conjunto C se define como $C = \{7, 9, 13, 19\}$.
(I) Escriba todos los elementos de $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cup C$.
(II) A partir de lo anterior y considerando $A \cap (B \cup C)$, verifique que, en este caso, la operación $\cap$ es distributiva respecto a la operación $\cup$.

Solución:

(a) (I) $A = \{3, 7, 11, 15, 19\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
(II) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{15\} \cup \{2, 5, 13, 17\} = \{2, 13, 15, 17\}$

(b) (I) $A \cap B = \{3, 7, 11, 19\}$, $A \cap C = \{7, 19\}$, $B \cup C = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$
(II) $A \cap (B \cup C) = \{3, 7, 11, 15, 19\} \cap \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\} = \{3, 7, 11, 19\}$
$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{3, 7, 11, 19\} \cup \{7, 19\} = \{3, 7, 11, 19\}$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (11 puntos)

Una relación R se define tal que aRb si y solo si $4^a - 4^b$ es divisible entre 7, donde $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

(a) (I) Muestre que R es una relación de equivalencia.
(II) Determine las clases de equivalencia de R.

La relación de equivalencia S se define tal que cSd si y solo si $4^c - 4^d$ es divisible entre 6, donde $c, d \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Determine el número de clases de equivalencia de S

Solución:

(a) (I) Veamos que se cumplen las tres propiedades:
- Reflexiva: aRa puesto que $4^a - 4^a = 0$ es múltiplo de 7.
- Simétrica:

$$aRb \implies 4^a - 4^b = \dot{7} \implies 4^b - 4^a = \dot{7} \implies bRa$$

- Transitiva:

$$\begin{cases} aRb \\ bRc \end{cases} \implies \begin{cases} 4^a - 4^b = \dot{7} \\ 4^b - 4^c = \dot{7} \end{cases} \implies 4^a - 4^c = \dot{7} \implies aRc$$

(II) La relación de equivalencia puede expresarse como $aRb \iff 4^a \equiv 4^b \pmod 7$. Calculemos las potencias de 4 módulo 7:

$$4^1 = 4 \equiv 4 \pmod 7$$
$$4^2 = 16 \equiv 2 \pmod 7$$
$$4^3 = 64 \equiv 1 \pmod 7$$

A partir de aquí, los restos se repiten. Hay tres clases de equivalencia:

$$[1] = \{1, 4, 7, 10, \ldots\}$$
$$[2] = \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$$
$$[3] = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$$

(b) En este caso $aSb \iff 4^a \equiv 4^b \pmod 6$. Como en el caso anterior, calculemos las potencias de 4 módulo 6:

$$4^1 = 4 \equiv 4 \pmod 6$$
$$4^2 = 16 \equiv 4 \pmod 6$$
$$4^3 = 64 \equiv 4 \pmod 6$$

Todas las potencias de 4 son equivalentes. Hay una sola clase de equivalencia.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (13 puntos)

La función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ viene dada por $f(x,y) = (2x^3 + y^3, x^3 + 2y^3$.

(a) Muestre que f es biyectiva.

(b) A partir de lo anterior escriba la función inversa $f^{-1}(x,y)$.

Solución:

(a) Veamos que la función es inyectiva:

$$\begin{aligned}
f(x,y) = f(x',y') &\implies (2x^3+y^3, x^3+2y^3) = (2x'^3+y'^3, x'^3+2y'^3) \\
&\implies \begin{cases} 2x^3+y^3 = 2x'^3+y'^3 \\ x^3+2y^3 = x'^3+2y'^3 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} -4x^3-2y^3 = -4x'^3-2y'^3 \\ x^3+2y^3 = x'^3+2y'^3 \end{cases} \qquad \text{sumando las igualdades} \\
&\implies -3x^3 = -3x'^3 \\
&\implies x = x' \ ; \quad y = y' \\
&\implies f \text{ inyectiva}
\end{aligned}$$

Para demostrar que es suprayectiva debemos comprobar que para cualquier $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ podemos encontrar $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = (u,v)$. En efecto:

$$\begin{aligned}
f(x,y) = (u,v) &\implies (2x^3+y^3, x^3+2y^3) = (u,v) \\
&\implies \begin{cases} 2x^3+y^3 = u \\ x^3+2y^3 = v \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} 4x^3+2y^3 = 2u \\ x^3+2y^3 = v \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^3+y^3 = u \\ 2x^3+4y^3 = 2v \end{cases} \qquad \text{restando} \\
&\implies 3x^3 = 2u - v \ ; \qquad 3y^3 = 2v - u
\end{aligned}$$

y de aquí:

$$x = \sqrt[3]{\frac{2u-v}{3}} \ ; \qquad y = \sqrt[3]{\frac{2v-u}{3}}$$

Estos números siempre existen, por consiguiente, la función es suprayectiva. Como también es inyectiva, es biyectiva.

(b) En el apartado anterior hemos visto que:

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{2u-v}{3}}, \sqrt[3]{\frac{2v-u}{3}}\right) = (u,v)$$

Cambiando el nombre de las variables:

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{2x-y}{3}}, \sqrt[3]{\frac{2y-x}{3}}\right) = (x,y) \implies f^{-1}(x,y) = \left(\sqrt[3]{\frac{2x-y}{3}}, \sqrt[3]{\frac{2y-x}{3}}\right)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (16 puntos)

La operación binaria $*$ se define mediante:

$$a * b = a + b - 3 \ ; \qquad a, b \in \mathbb{Z}$$

(a) Muestre que $(\mathbb{Z}, *)$ es un grupo abeliano.

(b) Muestre que no hay ningún elemento de orden 2.

(c) Halle un subgrupo propio de $(\mathbb{Z}, *)$.

La operación binaria $\circ$ se define mediante:

$$a \circ b = a + b + 3 \; ; \qquad a, b \in \mathbb{Z}$$

Considere el grupo $(\mathbb{Z}, \circ)$ y la función biyectiva $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ que viene dada por $f(a) = a - 6$.

(d) Muestre que los grupos $(\mathbb{Z}, *)$ y $(\mathbb{Z}, \circ)$ son isomorfos.

Solución:

(a) La operación es cerrada en $\mathbb{Z}$. Veamos que cumple las propiedades de grupo:

- Asociativa: se cumple puesto que:

$$a * (b * c) = a * (b + c - 3) = a + (b + c - 3) - 3 = a + b + c - 6$$
$$(a * b) * c = (a + b - 3) * c = (a + b - 3) + c - 3 = a + b + c - 6$$

- Veamos cuál es el elemento neutro. Si lo llamamos e debe cumplir que:

$$a * e = a \quad \Longrightarrow \quad a + e - 3 = a \quad \Longrightarrow \quad e = 3$$

  El elemento neutro es 3.

- Elemento simétrico. El simétrico de a es un entero a^{-1} que cumple que:

$$a * a^{-1} = a + a^{-1} - 3 = 3 \quad \Longrightarrow \quad a^{-1} = 6 - a \in \mathbb{Z}$$

- La operación es claramente conmutativa.

En consecuencia $(\mathbb{Z}, *)$ es un grupo abeliano.

(b) Un elemento de orden 2 debería cumplir que:

$$a * a = 3 \; ; \qquad a + a - 3 = 3 \; ; \qquad 2a = 6 \quad \Longrightarrow \quad a = 3$$

El único elemento que cumple $a * a = 3$ es el elemento neutro 3.

(c) El conjunto $3\mathbb{Z}$ formado por los múltiplos de 3 es un subgrupo propio:

- La operación es cerrada en $3\mathbb{Z}$ puesto que si a y b son múltiplos de 3, también lo es $a + b - 3$.
- La operación es asociativa en $3\mathbb{Z}$ puesto que lo es en $\mathbb{Z}$.
- El elemento neutro 3 pertenece a $3\mathbb{Z}$.
- Si a es múltiplo de 3, su simétrico $6 - a$ también es múltiplo de 3.

(d) Puesto que f es biyectiva, basta demostrar que es un homomorfismo:

$$f(a * b) = f(a + b - 3) = a + b - 3 - 6 = a + b - 9$$
$$f(a) \circ f(b) = (a - 6) + (b - 6) + 3 = a + b - 9$$

Entonces $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ y f es homomorfismo.

♠♠♠♠