

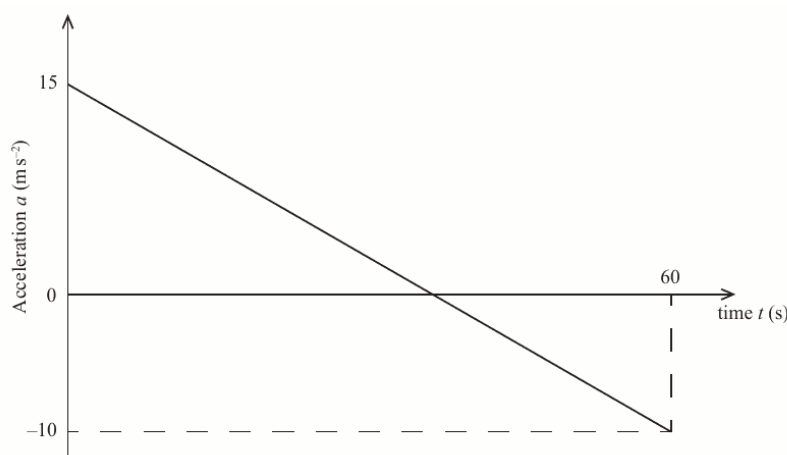
Exámenes
Bachillerato Internacional NS
Problemas de Cinemática

Jesús García de Jalón de la Fuente
IES Ramiro de Maeztu
Madrid

www.five-fingers.es

1. (8 puntos)

A jet plane travels horizontally along a straight path for one minute, starting at time $t = 0$, where t is measured in seconds. The acceleration, a , measured in m s^{-2} , of the jet plane is given by the straight line graph below.



- (a) Find an expression for the acceleration of the jet plane during this time, in terms of t .
- (b) Given that when $t = 0$ the jet plane is travelling at 125 m s^{-1} , find its maximum velocity in m s^{-1} during the minute that follows.
- (c) Given that the jet plane breaks the sound barrier at 295 m s^{-1} , find out for how long the jet plane is travelling greater than this speed.

Solución:

- (a) La recta pasa por los puntos $(60, -10)$ y $(0, 15)$. La ecuación de la recta es

$$a - 15 = \frac{25}{-60} t; \quad a = 15 - \frac{5}{12} t$$

- (b) La velocidad la obtenemos integrando la aceleración:

$$v = \int \left(15 - \frac{5}{12} t \right) dt = 15t - \frac{5t^2}{24} + C$$

y teniendo en cuenta el valor inicial de la velocidad:

$$v = 125 + 15t - \frac{5t^2}{24}$$

El máximo de la velocidad se da cuando su derivada, la aceleración, es igual a cero:

$$15 - \frac{5}{12} t = 0 \implies t = 36 \text{ s}; \quad v = 395 \text{ m s}^{-1}$$

- (c) Tenemos que resolver la inecuación

$$v > 295 \implies 125 + 15t - \frac{5t^2}{24} > 295$$

Con la calculadora obtenemos que el avión viaja a velocidad superior a la del sonido entre $t \simeq 14,1 \text{ s}$ y $t \simeq 57,9 \text{ s}$, es decir, aproximadamente durante 43,8 s.



2. (6 puntos)

A skydiver jumps from a stationary balloon at a height of 2000 m above the ground. Her velocity, $v \text{ m s}^{-1}$, t seconds after jumping, is given by $v = 50(1 - e^{-0,2t})$.

- (a) Find her acceleration 10 seconds after jumping.
- (b) How far above the ground is she 10 seconds after jumping?

Solución:

(a) La aceleración se obtiene derivando la velocidad:

$$a = \frac{dv}{dt} = 50 \cdot (-e^{-0,2t}) \cdot (-0,2) = 10e^{-0,2t}$$

Al cabo de 10 s, $a = 10e^{-2} \simeq 1,35 \text{ m s}^{-2}$.

(b) La distancia recorrida la calculamos por integración

$$s = \int_0^{10} 50(1 - e^{-0,2t}) dt$$

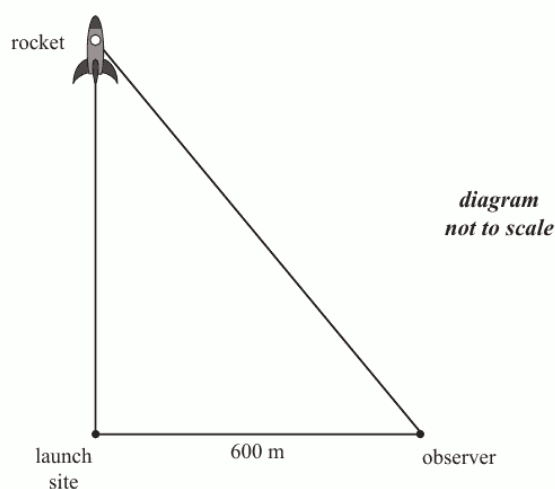
Se puede hacer la integral o calcularla con la calculadora. En cualquier caso se obtiene aproximadamente 283 m.

La altura en ese momento es $2000 - 283 = 1716 \text{ m}$.



3. (6 puntos)

A rocket is rising vertically at a speed of 300 m s^{-1} when it is 800 m directly above the launch site. Calculate the rate of change of the distance between the rocket and an observer, who is 600 m from the launch site and on the same horizontal level as the launch site.

**Solución:**

Llamemos l a la distancia:

$$l = \sqrt{600^2 + h^2}$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{2h}{2\sqrt{600^2 + h^2}} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{800}{\sqrt{600^2 + 800^2}} \cdot 300$$

$$= 240 \text{ m s}^{-1}$$



4. (22 puntos)

Una partícula se mueve en línea recta a una velocidad de v metros por segundo. En un instante cualquiera, t segundos, $0 \leq t < \frac{3\pi}{4}$, la velocidad viene dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} + v^2 + 1 = 0.$$

También se sabe que $v = 1$ cuando $t = 0$.

- (a) Halle una expresión para v en función de t .
- (b) Dibuje aproximadamente la gráfica de v en función de t , mostrando claramente las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes y las ecuaciones de todas las asíntotas.
- (c) (I) Escriba el tiempo T para el cual la velocidad es igual a cero.
(II) Halle la distancia recorrida en el intervalo $[0, T]$.
- (d) Halle una expresión para el desplazamiento s en función de t , sabiendo que $s = 0$ cuando $t = 0$.
- (e) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, compruebe que

$$s = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{1 + v^2}$$

Solución:

- (a) Separando las variables e integrando

$$\frac{dv}{1 + v^2} = - dt$$

$$\operatorname{artg} v = -t + C$$

$$v = \operatorname{tg}(C - t)$$

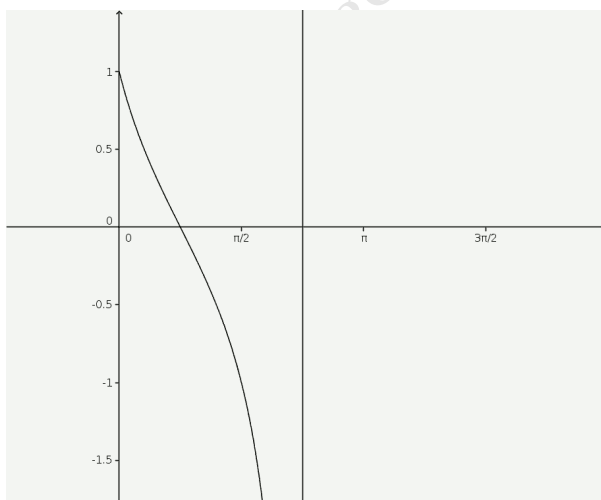
Para $t = 0$, $v = 1$. Entonces

$$\operatorname{tg} C = 1 \implies C = \frac{\pi}{4}$$

La función queda:

$$v = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$$

- (b)



- (c) (I) La velocidad es cero para $t = \frac{\pi}{4}$.
(II) Calculamos la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt$$

Puede calcularse exactamente (la integral de la tangente es menos el logaritmo del coseno). La calculadora nos da 0,347.

- (d) Calculamos ahora la integral

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t v dt = \int_0^t \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt \\ &= \int_0^t \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)} dt \\ &= \left[\ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \right]_0^t \\ &= \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) + \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

(e) Teniendo en cuenta:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \implies \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

$$\ln \cos x = -\frac{1}{2} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} s &= \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - t \right) + \frac{1}{2} \ln 2 \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - t \right) \right) + \frac{1}{2} \ln 2 \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1 + v^2) + \frac{1}{2} \ln 2 \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{2}{1 + v^2} \end{aligned}$$



5. (21 puntos)

A particle, A , is moving along a straight line. The velocity, $v_A \text{ m s}^{-1}$, of A t seconds after its motion begins is given by

$$v_A = t^3 - 5t^2 + 6t$$

- (a) Sketch the graph of $v_A = t^3 - 5t^2 + 6t$ for $t \geq 0$, with v_A on the vertical axis and t on the horizontal. Show on your sketch the local maximum and minimum points, and the intercepts with the t -axis.
- (b) Write down the times for which the velocity of the particle is increasing.
- (c) Write down the times for which the magnitude of the velocity of the particle is increasing.

At $t = 0$ the particle is at point O on the line.

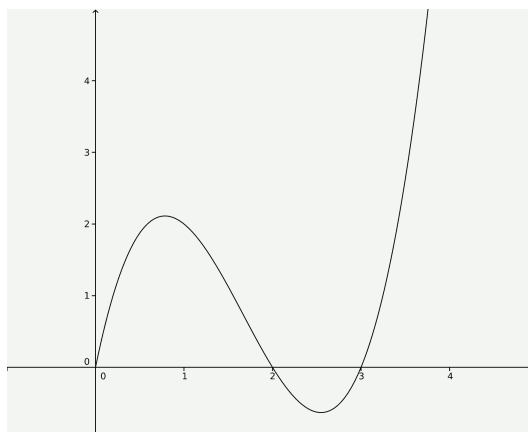
- (d) Find an expression for the particle's displacement, x_A m, from O at time t .

A second particle, B , moving along the same line, has position x_B m, velocity $v_B \text{ m s}^{-1}$ and acceleration, $a_B \text{ m s}^{-2}$, where $a_B = -2v_B$ for $t \geq 0$. At $t = 0$, $x_B = 20$ and $v_B = -20$.

- (e) Find an expression for v_B in terms of t .
- (f) Find the value of t when the two particles meet.

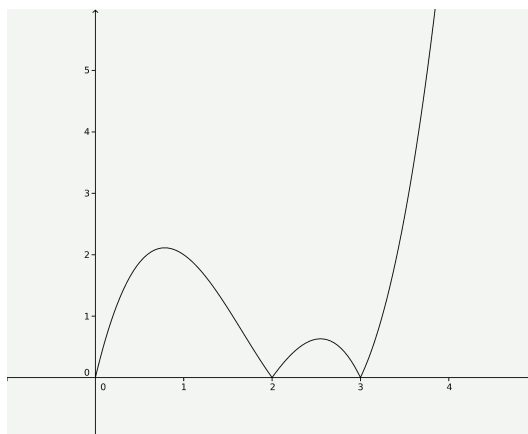
Solución:

(a)



El máximo se da para $t = \frac{5-\sqrt{7}}{3} \simeq 0,785$ y el mínimo para $t = \frac{5+\sqrt{7}}{3} \simeq 2,55$.

- (b) La velocidad está aumentando en todo momento salvo entre $\frac{5-\sqrt{7}}{3}$ y $\frac{5+\sqrt{7}}{3}$.
- (c) El módulo de la velocidad se representa en la siguiente figura



El módulo de la velocidad es creciente excepto en el intervalo $\left[\frac{5-\sqrt{7}}{3}, 2\right]$ y en $\left[\frac{5+\sqrt{7}}{3}, 3\right]$.

(d) La posición del móvil la obtenemos integrando la velocidad:

$$x_A = \int (t^3 - 5t^2 + 6t) dt = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^3}{3} + \frac{6t^2}{2} + C$$

La constante de integración C vale cero por las condiciones iniciales:

$$x_A = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^3}{3} + 3t^2$$

(e) Calculamos la velocidad de la partícula B :

$$\frac{dv}{dt} = -2v; \quad \frac{dv}{v} = -2 dt; \quad \ln(-v) = -2t + C; \quad v = -e^{-2t+C} = -Ke^{-2t}$$

Puesto que la velocidad inicial es negativa, hemos tomado la primitiva $\ln(-v)$ en lugar de $\ln v$. En el instante inicial la velocidad es igual a -20 . Así pues

$$v_B = -20e^{-2t}$$

La posición de la partícula B la obtenemos integrando la velocidad:

$$x_B = \int -20e^{-2t} dt = -20e^{-2t} \left(-\frac{1}{2}\right) + C = 10e^{-2t} + C$$

En el instante inicial

$$20 = 10 + C \implies C = 10$$

y la posición de la partícula B está dada por

$$x_B = 10(1 + e^{-2t})$$

Para calcular el tiempo en que las partículas se encuentran basta obtener (con la calculadora) la intersección de las dos funciones de posición. Hemos obtenido $t \simeq 4,41$ s.



6. (6 puntos)

The acceleration of a car is $\frac{1}{40}(60 - v)$ m s², when its velocity is v . Given the car starts from rest, find the velocity of the car after 30 seconds.

Solución:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{40}(60 - v) \implies \frac{dv}{60 - v} = \frac{1}{40} dt$$

Integrando

$$-\ln(60 - v) = \frac{1}{40}t + C \implies 60 - v = e^{-\frac{t}{40} - C} = Ke^{-\frac{t}{40}} \implies v = 60 - Ke^{-\frac{t}{40}}$$

donde hemos llamado $K = e^{-C}$. Cuando $t = 0$ la velocidad es 0. Entonces, debe ser $K = 60$ y tenemos

$$v = 60 \left(1 - e^{-\frac{t}{40}}\right)$$

Cuando $t = 30$ la velocidad es aproximadamente igual a 31,7 m s⁻¹.



7. (6 puntos)

A body is moving in a straight line. When it is s metres from a fixed point O on the line its velocity, v , is given by $v = -\frac{1}{s^2}$, $s > 0$. Find the acceleration of the body when it is 50 cm from O .

Solución:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v = \frac{1}{s^3} \cdot \frac{-1}{s^2} = \frac{-1}{s^5}$$

Cuando $s = 0,5$ m, $a = 32 \text{ m s}^{-2}$



8. (12 puntos)

Una partícula A se mueve de modo tal que su velocidad $v \text{ m s}^{-1}$, en el instante t segundos, viene dada por

$$v(t) = \frac{t}{12 + t^4}, \quad t \geq 0.$$

- (a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = v(t)$. Indique claramente el máximo local y escriba sus coordenadas.
- (b) Utilice la sustitución $u = t^2$ para hallar $\int \frac{t}{12 + t^4} dt$.
- (c) Halle la distancia exacta que recorre la partícula A entre $t = 0$ y $t = 6$ segundos. Dé la respuesta de la forma $k \operatorname{artg}(b)$, $k, b \in \mathbb{R}$.
- (d) La partícula B se mueve de tal modo que su velocidad $v \text{ m s}^{-1}$ y su desplazamiento $s \text{ m}$ están relacionados mediante la ecuación $v(s) = \operatorname{arsen}(\sqrt{s})$. Halle la aceleración de la partícula B cuando $s = 0,1$ m.

Solución:

- (a) La derivada de la función es:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{12 + t^4 - 4t^3 \cdot t}{(12 + t^4)^2} = \frac{12 - 3t^4}{(12 + t^4)^2}$$

La derivada se anula en $t = \sqrt{2}$. La función tiene un máximo en $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{16})$.

- (b) Con el cambio $u = t^2$, $du = 2t dt$ tenemos:

$$\int \frac{t}{12 + t^4} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{12 + u^2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} \operatorname{artg} \frac{u}{\sqrt{12}} + C = \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{x^2}{2\sqrt{3}} + C$$

- (c) Calculamos la integral definida:

$$s = \int_0^6 \frac{t}{12 + t^4} dt = \left[\frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{x^2}{2\sqrt{3}} \right]_0^6 = \frac{\sqrt{3}}{12} \operatorname{artg} 6\sqrt{3}$$

- (d) Teniendo en cuenta que

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v$$

Derivando y sustituyendo v :

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-s}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{s}} \cdot \operatorname{arsen} \sqrt{s}$$

Sustituyendo $s = 0,1$ se obtiene $a \simeq 0,536 \text{ m s}^{-2}$.



9. Una partícula se mueve en línea recta. Su velocidad en m s^{-1} en el instante t segundos viene dada por $v = 9t - 3t^2$, $0 \leq t \leq 5$.

En el instante $t = 0$, el desplazamiento s de la partícula desde el origen O es de 3 m.

- (a) Halle el desplazamiento de la partícula cuando $t = 4$.
- (b) Dibuje aproximadamente el gráfico del desplazamiento/tiempo para esta partícula $0 \leq t \leq 5$, mostrando claramente dónde toca la curva a los ejes y las coordenadas de los puntos en los que el desplazamiento alcanza valores máximos y mínimos.
- (c) Para $t > 5$ el desplazamiento de la partícula viene dado por:

$$s = a + b \cos \frac{2\pi t}{5}$$

de modo tal que s es continuo para todo $t \geq 0$.

Sabiendo que $s = 16,5$ para $t = 7,5$, halle los valores de a y b .

- (d) Halle los valores t_1 y t_2 ($0 < t_1 < t_2 < 8$) en los que la partícula vuelve al punto de partida.

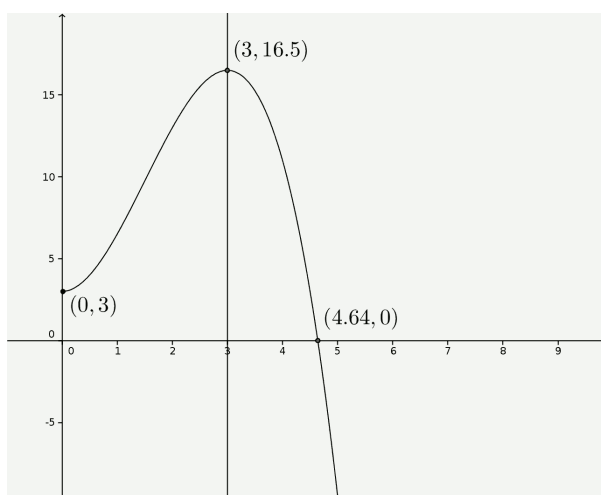
Solución:

- (a) Integrando la velocidad y teniendo en cuenta que $s(0) = 3$ se obtiene:

$$s(t) = \frac{9t^2}{2} - \frac{3t^3}{3} + 3 = \frac{9}{2}t^2 - t^3 + 3$$

Sustituyendo $s(4) = 11$.

- (b) El gráfico de esta función entre 0 y 5 s es:



- (c) Puesto que $s(5) = \frac{9}{2}25 - 125 + 3 = -9,5$, para que la función sea continua debe ocurrir:

$$a + b \cos \frac{2\pi 5}{5} = a + b \cos 2\pi = -9,5$$

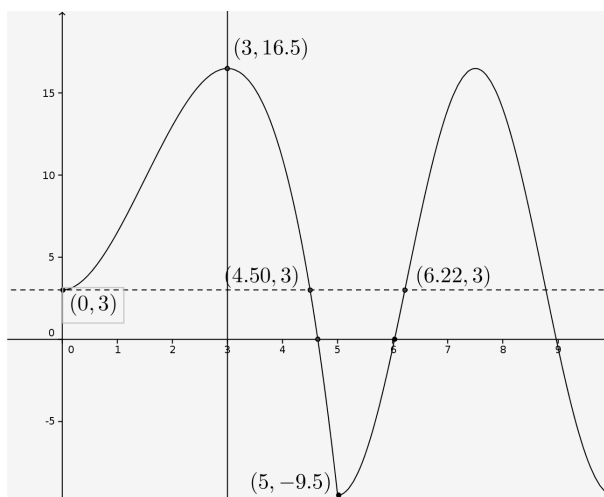
y además:

$$s(7,5) = a + b \cos \frac{2\pi 7,5}{5} = a + b \cos 3\pi = 16,5$$

Entonces a y b son la solución del sistema:

$$\begin{cases} a + b = -9,5 \\ a - b = 16,5 \end{cases} \implies a = 3,5, b = -13$$

- (d) Representamos la función:



y de aquí $x_1 = 4,50$ y $x_2 = 6,22$.



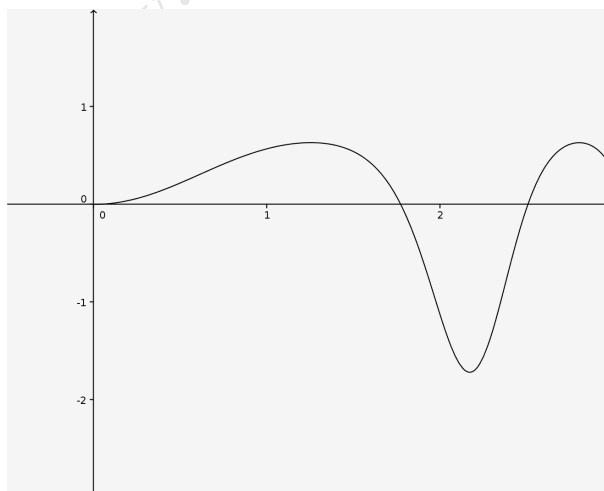
10. (8 puntos)

Una partícula se puede mover a lo largo de una línea recta partiendo de un punto O . La velocidad v , en m s^{-1} , viene dada por la función $v(t) = 1 - e^{-\text{sen } t^2}$ donde el tiempo $t \geq 0$ se mide en segundos.

- Escriba los dos primeros instantes $t_1, t_2 > 0$ en los que la partícula cambia de sentido.
- (i) Halle el instante $t < t_2$ en el que la partícula tiene una velocidad máxima.
(ii) Halle el instante $t < t_2$ en el que la partícula tiene una velocidad mínima.
- Halle la distancia que ha recorrido la partícula entre los instantes $t = t_1$ y $t = t_2$.

Solución:

- La gráfica de la velocidad es



La partícula cambia de sentido cuando la velocidad se hace cero. Estos valores son $t_1 \simeq 1,77$ y $t_2 = 2,51$ s.

- (i) La velocidad máxima se da para $t \simeq 1,25$ s.
(ii) La velocidad mínima se da para $t \simeq 2,17$ s.
- Como no hay cambio de sentido, la distancia recorrida es igual al cambio en la posición:

$$\int_{t_1}^{t_2} (1 - e^{-\text{sen } t^2}) dt \simeq -0,711$$

La distancia recorrida es aproximadamente 0,711 m.



11. (6 puntos)

Una partícula se mueve de modo tal que su velocidad v m s⁻¹ y su desplazamiento s m, están relacionados mediante la ecuación $v(s) = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} s)$, $0 \leq s \leq 1$. La aceleración de la partícula es a m s⁻².

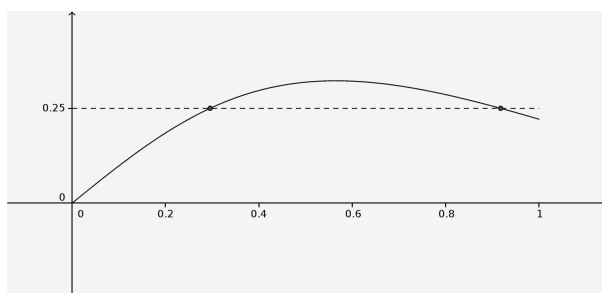
- (a) Halle la aceleración de la partícula en función de s .
 (b) Utilizando un gráfico aproximado adecuado, halle el desplazamiento de la partícula cuando su aceleración es igual a 0,25 m s⁻².

Solución:

- (a) Obtenemos la aceleración derivando:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v = \frac{\cos s}{1 + \operatorname{sen}^2 s} \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} s)$$

- (b) La gráfica de la aceleración es



Hay dos posiciones en que la aceleración es 0,25 m s⁻²: $s_1 \simeq 0,296$ m y $s_2 \simeq 0,918$ m.

