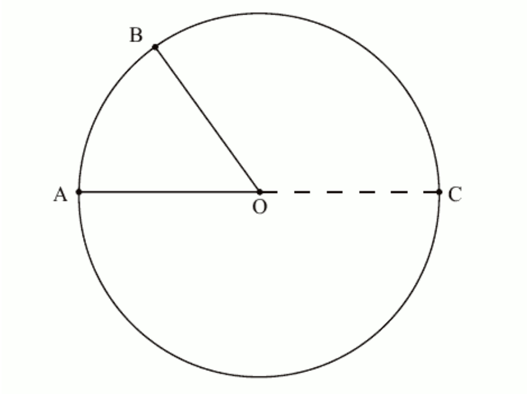
Exámenes
Bachillerato Internacional NS
Problemas de Álgebra y Geometría

Jesús García de Jalón de la Fuente
IES Ramiro de Maeztu
Madrid

1. (5 puntos)

   The diagram below shows a circle with centre O .The points A, B, C lie on the circumference of the circle and AC is a diameter.



Let $\vec{OA} = \vec{a}$ and $\vec{OB} = \vec{b}$.

(a) Write down expressions for $\vec{AB}$ and $\vec{CB}$ in terms of the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$.

(b) Hence prove that angle $\widehat{ABC}$ is a right angle.

Solución:

(a) $$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \quad \Longrightarrow \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

(b) Como en el apartado anterior puede verse que $\vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$. Entonces si r es el radio de la circunferencia:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = r^2 - r^2 = 0$$

Puesto que el producto escalar es cero, los dos vectores son perpendiculares y el ángulo $\widehat{ABC}$ es recto.

♠♠♠♠

2. (19 puntos)

   The points $A(1, 2, 1)$, $B(-3, 1, 4)$, $C(5, -1, 2)$ and $D(5, 3, 7)$ are the vertices of a tetrahedron.

(a) Find the vectors $\vec{AB}$ and $\vec{AC}$.

(b) Find the Cartesian equation of the plane π that contains the face ABC.

(c) Find the vector equation of the line that passes through D and is perpendicular to π. Hence, or otherwise, calculate the shortest distance to D from π.

(d) (I) Calculate the area of the triangle ABC.
(II) Calculate the volume of the tetrahedron $ABCD$.

(e) Determine which of the vertices B or D is closer to its opposite face.

Solución:

(a) $$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{vmatrix} x-1 & -4 & 4 \\ y-2 & -1 & -3 \\ z-1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 8(x-1) + 16(y-2) + 16(z-1) = 0$$

Simplificando, la ecuación del plano es $x + 2y + 2z - 7 = 0$.

(c) $$\vec{OX} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La distancia del punto al plano es:

$$d = \frac{5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 - 7}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{18}{3} = 6$$

(*d*) (I) Calculamos el producto vectorial

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & -4 & 4\\ \vec{\jmath} & -1 & -3\\ \vec{k} & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}8\\16\\16\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{1+4+4}=12$$

(II) El volume del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]$:

$$[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]=(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AD}=8\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix}=144$$

El volumen es:

$$V=\frac{1}{6}\cdot 144=24$$

(*e*) Ya hemos calculado la distancia de D al plano ABC. Calculemos ahora la distancia de B al plano ACD. La ecuación de este plano es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & 4 & 4\\ y-2 & -3 & 1\\ z-1 & 1 & 6\end{vmatrix}=0 \quad\Longrightarrow\quad -19(x-1)-20(y-2)+16(z-1)=0$$

o, en forma general $-19x-20y+16z+43=0$.

La distancia del punto B a este plano es:

$$\frac{-19(-3)-20\cdot 1+16\cdot 4+43}{\sqrt{19^2+20^2+16^2}}<6$$

El vértice B está más próximo a la cara opuesta.

♠♠♠♠

3. (6 puntos)

Solve the following system of equations.

$$\begin{cases}\log_{x+1} y = 2\\ \log_{y+1} x = \frac{1}{4}\end{cases}$$

Solución:

La primera ecuación equivale a

$$y=(x+1)^2$$

y la segunda

$$x=(y+1)^{\frac{1}{4}} \quad\Longrightarrow\quad y+1=x^4\ ; \qquad y=x^4-1$$

De aquí:

$$x^4-1=(x+1)^2\ ; \qquad (x^2+1)(x-1)(x+1)=(x+1)^2$$

Puesto que $x+1$ no puede ser 0, esta ecuación es equivalente a:

$$(x^2+1)(x-1)=x+1$$

que tiene como solución $x\simeq 1{,}70$, $y\simeq 7{,}27$.

♠♠♠♠

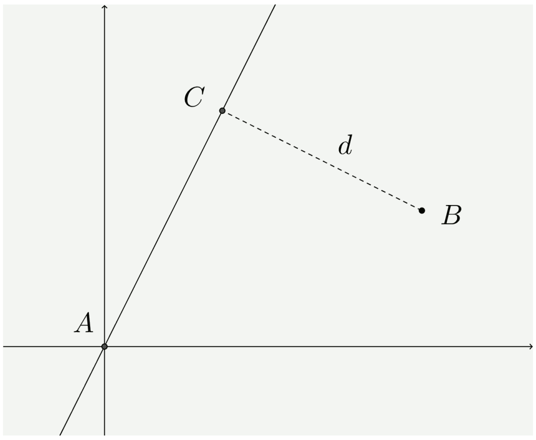
4. (7 puntos)

Port A is defined to be the origin of a set of coordinate axes and port B is located at the point $(70,30)$, where distances are measured in kilometres. A ship S_1 sails from port A at 10:00 in a straight line such that its position t hours after 10:00 is given by

$$\vec{r}=t\begin{pmatrix}10\\20\end{pmatrix}$$

A speedboat S_2 is capable of three times the speed of S_1 and is to meet S_1 by travelling the shortest possible distance. What is the latest time that S_2 can leave port B?

Solución:



La trayectoria del barco S_1 es la recta $2x - y = 0$. Para que el barco S_2 recorra la menor distancia posible, debe encontrarlo en el punto C. Este punto es la intersección de $2x - y = 0$ con la perpendicular por el punto $(70, 30)$. Esta perpendicular tiene por ecuación

$$y - 30 = -\frac{1}{2}(x - 70) \ ; \qquad x + 2y = 130$$

Resolviendo el sistema obtenemos $C(26, 52)$. La distancia d es

$$d = \sqrt{16 + 324} = \sqrt{340} = 2\sqrt{85}$$

La velocidad de S_1 es

$$v_1 = \sqrt{100 + 400} = 10\sqrt{5}$$

La velocidad de S_2 es entonces $30\sqrt{5}$ km h^{-1}. El barco S_2 tardará en llegar a C:

$$t = \frac{2\sqrt{85}}{30\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{17}}{30} \text{ h} \simeq 0{,}275 \text{ h}$$

El barco S_1 tarda en llegar 2,6 h, o sea que está en C a las 12,6. El barco S_2 debe partir 0,275 h antes o sea a las 12,33 o sea a las 12 h19,5 mín.

♠♠♠♠

5. (14 puntos)

The equations of three planes, are given by

$$\begin{aligned} &ax + 2y + z = 3 \\ &-x + (a+1)y + 3z = 1 \\ &-2x + y + (a+2)z = k \end{aligned}$$

where $a \in \mathbb{R}$.

(a) Given that $a = 0$, show that the three planes intersect at a point.

(b) Find the value of a such that the three planes do not meet at a point.

(c) Given a such that the three planes do not meet at a point, find the value of k such that the planes meet in one line and find an equation of this line in the form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

Solución:

(a) Para $a = 0$, el rango de la matriz de coeficientes es:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} = 3$$

Por tanto, el sistema es compatible determinado sea cual sea el valor de k. Los tres planos se cortan en un punto.

(*b*) Para que el rango sea menor que 3, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ -1 & a+1 & 3 \\ -2 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo la ecuación resulta una única solución $a = 1$.

(*c*) Si no hay una solución única el rango de la matriz ampliada debe ser igual 2:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & k \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 6+k \end{pmatrix}$$

Para que el rango de la matriz sea 2 debe ocurrir $k = -1$.

En este caso el sistema es compatible indeterminado, los tres planos se cortan en una recta. Para determinar la ecuación de esta recta consideramos el sistema formado por la ecuación de dos de estos planos. La matriz del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando como parámetro $z = \lambda$, obtenemos de la segunda ecuación $y = 1 - \lambda$ y de la primera $x = 1 + \lambda$. La ecuación vectorial de la recta es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

6. (5 puntos)

Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & -1 \end{pmatrix}$.

(*a*) Find the matrix A^2.

(*b*) If $\det A^2 = 16$, determine the possible values of a.

Solución:

(*a*) Multiplicamos A por sí misma:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ -a & 2a+1 \end{pmatrix}$$

(*b*) Calculamos el determinante:

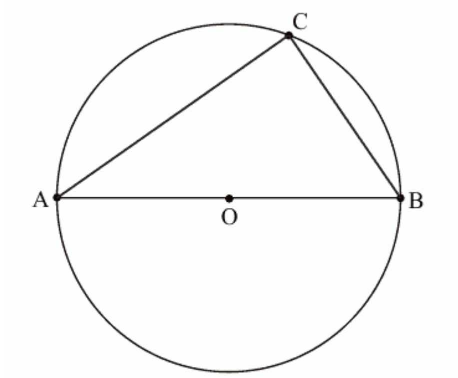
$$\begin{vmatrix} 2a & -2 \\ -a & 2a+1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & -1 \\ -a & 2a+1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & -1 \\ 0 & 2a \end{vmatrix} = 4a^2$$

Como el determinante es igual a 16 los valores posibles de a son -2 y 2.

♠♠♠♠

7. (5 puntos)

In the diagram below, $[AB]$ is a diameter of the circle with centre O. Point C is on the circumference of the circle. Let $\vec{OB} = \vec{b}$ and $\vec{OC} = \vec{c}$.



(a) Find an expression for $\vec{CB}$ and for $\vec{AC}$ in terms of $\vec{b}$ and $\vec{c}$.

(b) Hence prove that $\widehat{ACB}$ is a right angle.

Solución:

(a) $\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{b} - \vec{c}$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{OC} + \vec{OB} = \vec{b} + \vec{c}$

(b) Para ver que el ángulo es recto comprobemos que el producto escalar de los dos vectores es cero:

$$\vec{AC} \cdot \vec{CB} = \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{c} = r^2 - r^2 = 0$$

♠♠♠♠

8. (6 puntos)

Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin\theta \\ -\sin 2\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, for $0 < \theta < 2\pi$.

(a) Show that $\det A = \cos\theta$

(b) Find the values of θ for which $\det A^2 = \sin\theta$.

Solución:

(a) Calculamos el determinante:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \cos 2\theta & \sin\theta \\ -\sin 2\theta & \cos\theta \end{vmatrix} &= \cos 2\theta \cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\theta \\ &= (\cos^\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta + 2\cos\theta(1 - \cos^\theta) \\ &= -\cos\theta + 2\cos\theta \\ &= \cos\theta \end{aligned}$$

(b) Puesto que $|A^2| = |A|^2$ resulta que $|A^2| = cos^2\theta$. Entonces:

$$\cos^2\theta = \operatorname{sen}\theta$$

$$1 - \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

y de aquí obtenemos $\theta \simeq 38{,}2^{o}$ y $\theta \simeq 141{,}8^{o}$,

♠♠♠♠

9. (17 puntos)

The points $P(-1, 2, -3)$, $Q(-2, 1, 0)$, $R(0, 5, 1)$ and S form a parallelogram, where S is diagonally opposite Q.

(a) Find the coordinates of S.

(b) The vector product

$$\vec{PQ} \times \vec{PS} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ m \end{pmatrix}.$$

Find the value of m.

(c) Hence calculate the area of parallelogram $PQRS$.

(d) Find the Cartesian equation of the plane, Π_1, containing the parallelogram $PQRS$.

(e) Write down the vector equation of the line through the origin $(0, 0, 0)$ that is perpendicular to the plane Π_1.

(f) Hence find the point on the plane that is closest to the origin.

(g) A second plane, π_2, has equation $x - 2y + z = 3$. Calculate the angle between the two planes.

Solución:

(a) Si es un paralelogramo debe ocurrir $\vec{PQ} = \vec{SR}$. Sea $S(x, y, z)$:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 5 - y \\ 1 - z \end{pmatrix}$$

Se obtiene $S(1, 6, -2)$.

(b) Calculamos el producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & -1 & 2 \\ \vec{\jmath} & -1 & 4 \\ \vec{k} & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad m = -2$$

(c) El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial

$$S = \sqrt{169 + 49 + 4} = \sqrt{222}$$

(d) Podemos tomar como vector normal el producto $\vec{PQ} \times \vec{PS}$ que hemos calculado y como punto del plano el punto $P(-1, 2, -3)$:

$$-13(x + 1) + 7(y - 2) - 2(z + 3) = 0\ ; \qquad -13x + 7y - 2z - 33 = 0$$

(e) La recta es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(f) El punto que nos piden es el punto de intersección del plano y la recta perpendicular:

$$\begin{cases} x = -13\lambda \\ y = 7\lambda \\ z = -2\lambda \\ -13x + 7y - 2z - 33 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $\lambda = \frac{11}{74}$ y el punto es $\left(\frac{-143}{74}, \frac{77}{74}, \frac{-22}{74}\right)$.

(g) Es el ángulo entre los vectores:

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Este ángulo es:

$$\cos\varphi = \frac{|-13 \cdot 1 - 7 \cdot 2 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{222}\sqrt{6}} = \frac{22}{\sqrt{222}\sqrt{6}} = \frac{11}{\sqrt{333}}$$

♠♠♠♠

10. (17 puntos)

(a) A and U are square matrices, and $X = U^{-1}AU$. Use mathematical induction to prove that $X^n = U^{-1}A^nU$, for $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Let $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ and $U = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Find the matrix D such that $AU = UD$.

(ii) Write down the matrix D^2.

(iii) Hence prove that $A^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, for $n \in \mathbb{Z}^+$.

(iv) Using the result from part (iii), show that $(A^n)^{-1} = A^n$, for $n \in \mathbb{Z}^+$.

Solución:

(a) – La igualdad se cumple para $n = 1$.

- Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir, supongamos

$$X^k = U^{-1}A^kU$$

y comprobemos que, en ese caso, también se cumple para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= X^kX \\ &= U^{-1}A^kUX \\ &= U^{-1}A^kUU^{-1}AU \\ &= U^{-1}A^kAU \\ &= U^{-1}A^{k+1}U \end{aligned}$$

- Como consecuencia del principio de inducción, la igualdad se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) (I) Calculamos U^{-1} y multiplicamos las matrices:

$$\begin{aligned} D = U^{-1}AU &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(II) Multiplicando la matriz D por sí misma:

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(III) De acuerdo con el resultado obtenido anteriormente:

$$A = UDU^{-1} \quad \Longrightarrow \quad A^{2n} = UD^{2n}U^{-1} = UIU^{-1} == UU^{-1} = I$$

(IV) Puesto que $A^{2n} = I$:

$$A^nA^n = I \quad \Longrightarrow \quad (A^n)^{-1} = A^n$$

♠♠♠♠

11. (5 puntos)

The planes $2x + 3y - z = 5$ and $x - y + 2z = k$ intersect in the line $5x + 1 = 9 - 5y = -5z$. Find the value of k.

Solución:

Escribimos la recta en forma paramétrica. Tomando $z = \lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} 5x = -1 - 5\lambda \\ 5y = 9 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \text{o bien} \begin{cases} x = -\frac{1}{5} - \lambda \\ y = \frac{9}{5} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Cualquier punto de esta recta, por ejemplo $\left(-\frac{1}{5}, \frac{9}{5}, 0\right)$ debe estar contenido en los dos planos. Entonces

$$x - y + 2z = k \quad \Longrightarrow \quad k = -\frac{1}{5} - \frac{9}{5} = -2$$

♠♠♠♠

12. (24 puntos)

The coordinates of points A, B and C are given as $(5, -2, 5)$, $(5, 4, -1)$ and $(-1, -2, -1)$ respectively.

(a) Show that $AB = AC$ and that $\widehat{BAC} = 60^{\mathrm{o}}$.

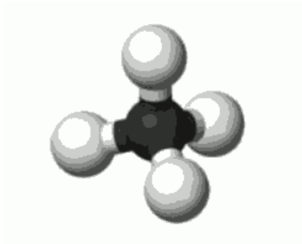
(b) Find the Cartesian equation of Π, the plane passing through A, B, and C.

(c) (I) Find the Cartesian equation of Π_1, the plane perpendicular to (AB) passing through the midpoint of $[AB]$.

(II) Find the Cartesian equation of Π_2, the plane perpendicular to (AC) passing through the midpoint of $[AC]$.

(d) Find the vector equation of L, the line of intersection of Π_1 and Π_2, and show that it is perpendicular to Π.

A methane molecule consists of a carbon atom with four hydrogen atoms symmetrically placed around it in three dimensions.



The positions of the centres of three of the hydrogen atoms are A, B and C as given. The position of the centre of the fourth hydrogen atom is D.

(e) Using the fact that $AB = AD$, show that the coordinates of one of the possible positions of the fourth hydrogen atom is $(-1, 4, 5)$.

(f) Letting D be $(-1, 4, 5)$, show that the coordinates of G, the position of the centre of the carbon atom, are $(2, 1, 2)$. Hence calculate $\widehat{DGA}$, the bonding angle of carbon.

Solución:

(a) Calculamos los vectores:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La longitud de ambos vectores es igual a $6\sqrt{2}$.

(b) La ecuación del plano que pasa por los tres puntos es

$$\begin{vmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ y+2 & 1 & 0 \\ z+1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene la ecuación $x - y.z - 2 = 0$.

(c) (I) El punto medio es $M(5, 1, 2)$ y como vector normal podemos tomar el vector $\frac{1}{6}\vec{AB}$:

$$0(x-5) + 1(y-1) - 1(z-2) = 0 \; ; \qquad y - z + 1 = 0$$

(II) De la misma forma que el anterior, el plano debe pasar por $N(2, -2, 2)$ y su dirección es la de $\vec{AC}$:

$$1(x-2) + 0(y+2) + 1(z-2) \; ; \qquad x + z - 4 = 0$$

(d) La recta tiene por ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Tomando $z = \lambda$ como parámetro la ecuación de la recta es

$$\begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

o en forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(e) Por la simetría de la molécula, los otros tres átomos de hidrógeno deben estar a la misma distancia de A. Deben estar sobre la superficie esférica de centro A y radio $6\sqrt{2}$:

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 72$$

También debe estar sobre la recta que hemos calculado. De ser una de las soluciones del sistema

$$\begin{cases} (x-5)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=72\\ x=4-\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=\lambda \end{cases}$$

Puede verse fácilmente que el punto $D(-1,4,5)$ es la solución del sistema para $\lambda=5$

(f) Calculamos el plano bisector de AD:

$$\begin{aligned}&(x-5)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=(x+1)^2+(y-4)^2+(z-5)^2\\&-10x+25+4y+4=2x+1-8y+16\\&12x-12y-12=0\\&x-y-1=0\end{aligned}$$

El centro del átomo de carbono de ser el punto de intersección de los tres planos bisectores. Debe ser la solución del sistema:

$$\begin{cases} y-z+1=0\\ x+z-4=0\\ x-y-1=0 \end{cases} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{cases} x=4-\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=\lambda\\ x-y-1=0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene el punto $G(2,1,2)$. También se podía haber calculado como la media aritmética de las coordenadas de los cuatro puntos.

Para calcular el ángulo $\widehat{DGA}$ calculamos los vectores $\vec{GA}$ y $\vec{GD}$:

$$\vec{GA}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{GD}=\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

El ángulo que forman estos vectores cumple

$$\cos\varphi=\frac{\vec{GA}\cdot\vec{GD}}{|GA||GD|}=\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{-1}{3} \quad\Longrightarrow\quad \varphi\simeq 109^{\text{o}}$$

♠♠♠♠

13. (6 puntos)

Cuando se divide $2x^3+kx^2+6x+32$ y $x^4-6x^2-k^2x+9$ entre $x+1$, en ambos casos se obtiene el mismo resto. Halle los posibles valores de k.

Solución:

De acuerdo con el teorema del resto, el valor numérico para $x=-1$ es el mismo para ambos polinomios. Entonces

$$-2+k-6+32=1-6+k^2+9 \quad\Longrightarrow\quad k^2-k-20=0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtiene $k=-4$ y $k=5$.

♠♠♠♠

14. (5 puntos)

Halle los valores de x para los cuales los vectores

$$\begin{pmatrix}1\\2\cos x\\0\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix}-1\\2\operatorname{sen} x\\1\end{pmatrix}$$

son perpendiculares, siendo $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

Solución:

Si los vectores son perpendiculares, su producto escalar debe ser igual a cero:

$$-1+4\operatorname{sen}x\cos x=0 \quad\Longrightarrow\quad -1+2\operatorname{sen}2x=0 \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{sen}2x=\frac{1}{2}$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$2x = 30^{\circ} \pm 360^{\circ}k$$
$$2x = 150^{\circ} \pm 360^{\circ}k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

o sea, $x = 15^{\circ} \pm 180^{\circ}k$ o $x = 75^{\circ} \pm 180^{\circ}k$.

Las soluciones comprendidas entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ son 15° y 75°, o sea, $\frac{\pi}{12}$ y $\frac{5\pi}{12}$.

♠♠♠♠

15. (5 puntos)
Tres matrices de 2×2 no singulares, A, B y X, satisfacen la ecuación $4A - 5BX = B$.
   (a) Halle X en función de A y B.
   (b) Sabiendo que $A = 2B$, halle X.

Solución:

(a) Puesto que las matrices son no singulares tienen inversa. Así:

$$5BX = 4A - B \quad \Longrightarrow \quad BX = \frac{4}{5}A - \frac{1}{5}B$$

y multiplicando por la izquierda por B^{-1}

$$X = \frac{4}{5}B^{-1}A - \frac{1}{5}B^{-1}B = \frac{4}{5}B^{-1}A - \frac{1}{5}I$$

(b) Si $A = 2B$:

$$X = \frac{4}{5}B^{-1}2B - \frac{1}{5}I = \frac{8}{5}I - \frac{1}{5}I = \frac{7}{5}I$$

♠♠♠♠

16. (24 puntos)
   (a) Halle los valores de k para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones no tiene solución y el valor de k para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 3 \\ x + 5y - 2z = 1 \\ 16y - 6z = k \end{cases}$$

   (b) Sabiendo que el sistema de ecuaciones se puede resolver, halle las soluciones en forma de ecuación vectorial de una recta, $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$, donde las componentes de $\vec{b}$ son números enteros.
   (c) El plano π es paralelo tanto a la recta del apartado (b) como a la recta

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-2}{0}$$

   Sabiendo que el punto $(1, 2, 0)$ pertenece a π, compruebe que la ecuación cartesiana de π es $16x + 24y - 11z = 64$.
   (d) El eje z corta al plano π en el punto P. Halle las coordenadas de P.
   (e) Halle el ángulo entre la recta

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z}{2}$$

   y el plano π.

Solución:

(*a*) El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 16 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -3 \\ 0 & 16 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Entonces, el rango de la matriz no puede ser 3. Es fácil ver que el rango es 2.

Veamos cuánto vale el rango de la matriz ampliada según los valores de k. Tomemos dos columnas independientes de la matriz de coeficientes y añadamos una columna con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 16 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 16 & k \end{vmatrix} = 8k + 32$$

El determinante se anula para $k = -4$. Entonces

- Para $k \neq -4$ el sistema es incompatible.
- Para $k = -4$ el sistema es compatible indeterminado.

(*b*) Escojamos dos ecuaciones independientes, por ejemplo las dos primeras

$$\begin{cases} x - 3y + z = 3 \\ x + 5y - 2z = 1 \end{cases}$$

Tomamos $x = \lambda$ como parámetro y el sistema queda:

$$\begin{cases} -3y + z = 3 - \lambda \\ 5y - 2z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Resolviendo por cualquier método obtenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -18 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(*c*) La ecuación del plano como determinante es

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 1 \\ y-2 & -2 & 3 \\ z & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene $16x + 24y - 11z - 64 = 0$.

(*d*) Hacemos $x = y = 0$ en la ecuación del plano y obtenemos $z = -\frac{64}{3}$. El punto es $P\left(0, 0, -\frac{64}{3}\right)$.

(*e*) Los vectores directores de la recta y normal al plano son

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ -11 \end{pmatrix}$$

El ángulo agudo que forman la recta y el plano está dado por

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|} = \frac{122}{\sqrt{29}\sqrt{953}} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi \simeq 38{,}4^{\text{o}}$$

♠♠♠♠

17. (6 puntos)

Consider the points $A(1, 2, 3)$, $B(1, 0, 5)$ and $C(2, -1, 4)$.

(*a*) Find $\vec{AB} \times \vec{AC}$.

(*b*) Hence find the area of the triangle ABC.

Solución:

(*a*)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 0 & 1 \\ \vec{\jmath} & -2 & -1 \\ \vec{k} & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(*b*) El área es la mitad del módulo del producto vectorial:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{2}$$

♠♠♠♠

18. (5 puntos)

Given $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, find the matrix X, such that $AXA^{-1} = B$.

Solución:

Despejamos la matriz X:

$$X = A^{-1}BA = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

19. (6 puntos)

The matrix A is such that $A^2 = I$, where I is the identity matrix. Use mathematical induction to prove that $(A+I)^n = 2^{n-1}(A+I)$, for all $n \in \mathbb{Z}^+$.

Solución:

– La igualdad se cumple evidentemente para $n = 1$.

– Supongamos que se cumple para $n = k$:

$$(A+I)^k = 2^{k-1}(A+I)$$

y veamos que, en ese caso, también se cumple para $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
(A+I)^{k+1} &= (A+I)^k(A+I) \\
&= 2^{k-1}(A+I)(A+I) \\
&= 2^{k-1}(A^2 + 2A + I)) && \text{puesto que } A^2 = I \\
&= 2^{k-1}(2A + 2I \\
&= 2 \cdot 2^{k-1}(A+I) \\
&= 2^k(A+I)
\end{aligned}$$

– Como consecuencia del principio de inducción, la igualdad se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

20. (5 puntos)

Find the value of k such that the following system of equations does not have a unique solution.

$$\begin{cases} kx + y + 2z = 4 \\ -y + 4z = 5 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \end{cases}$$

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -18k + 18$$

El determinante se anula para $k = 1$. Para $k \neq 1$ el determinante es distinto de cero. En consecuencia, el rango de la matriz es 3 igual al rango de la matriz ampliada y al número de incógnitas. El sistema será compatible determinado y su solución será única.

♠♠♠♠

21. (20 puntos)

Consider the points $P(-3,-1,2)$ and $Q(5,5,6)$.

(a) Find a vector equation for the line, L_1, which passes through the points P and Q.

(b) The line L_2 has equation

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

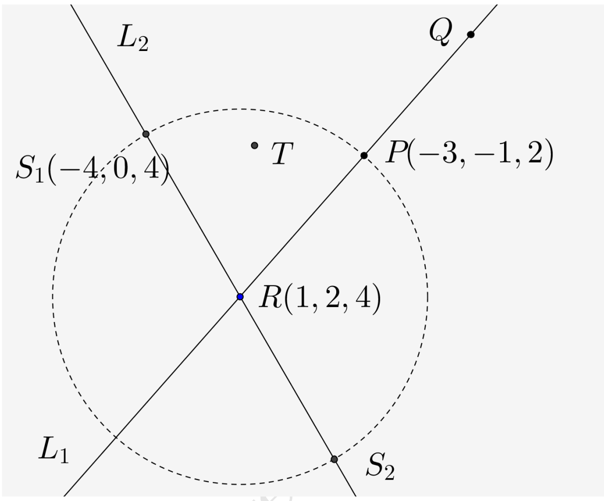
Show that L_1 and L_2 intersect at the point $R(1, 2, 4)$.

(c) Find the acute angle between L_1 and L_2.

(d) Let S be a point on L_2 such that $|\vec{RP}| = |\vec{RS}|$. Show that one of the possible positions for S is $S_1(-4, 0, 4)$ and find the coordinates of the other possible position, S_2.

(e) Find a vector equation of the line which passes through R and bisects PRS_1.

Solución:



(a) Tomando como vector director

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La ecuación resulta:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) El punto $R(1, 2, 4)$ cumple ambas ecuaciones. La de L_1 para $\lambda = 1$ y la de L_2 también para $\lambda = 1$.

(c) Calculamos mediante el producto escalar de los vectores directores:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{5 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2}{\sqrt{29}\sqrt{29}} = \frac{26}{29}$$

(d) Vamos a calcular la ecuación de la superficie esférica de centro R y radio RP. El vector $\vec{RP}$ es

$$\vec{RP} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad RP = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}$$

La ecuación de la superficie esférica es

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 29$$

La intersección de esta superficie con la recta L_2 nos da los puntos que buscamos:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 29 \\ x = -4 + 5s \\ y = 2s \\ z = 4 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos los puntos $S_1(-4, 0, 4)$ y $S_2(6, 4, 4)$.

(e) La recta pasa por R y por $T\left(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2},3\right)$ que es el punto medio de P y S_1. Podemos tomar como vector de dirección el vector $\vec{RT}$:

$$\vec{RT}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}\\-\frac{5}{2}\\-1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}9\\5\\2\end{pmatrix}$$

La recta bisectora es

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}9\\5\\2\end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

22. (5 puntos)

Consider the matrices $A=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-5\\2&-3\end{pmatrix}$.

(a) Find $\det A$ and hence write down the matrix A^{-1}.
(b) Find the matrix $A^{-1}B$

Solución:

(a)
$$|A|=\begin{vmatrix}5&3\\3&2\end{vmatrix}=1\ ;\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}$$

(b)
$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5\\2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

23. (21 puntos)

The vertices of a triangle ABC have coordinates given by $A(-1,2,3)$, $B(4,1,1)$ and $C(3,-2,2)$.

(a) (I) Find the lengths of the sides of the triangle.
(II) Find $\cos\widehat{BAC}$.
(b) (I) Show that $\vec{BC}\times\vec{CA}=-7\vec{\imath}-3\vec{\jmath}-16\vec{k}$.
(II) Hence, show that the area of the triangle ABC is $\frac{1}{2}\sqrt{314}$.
(c) Find the Cartesian equation of the plane containing the triangle ABC.
(d) Find a vector equation of (AB).

The point D on (AB) is such that OD is perpendicular to BC where O is the origin.

(e) (I) Find the coordinates of D.
(II) Show that D does not lie between A and B.

Solución:

(a) (I) Tenemos los siguientes vectores:

$$\vec{AB}=\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}\ ;\qquad \vec{AC}=\begin{pmatrix}4\\-4\\-1\end{pmatrix}\ ;\qquad \vec{BC}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Las longitudes de los lados son:

$$AB=|\vec{AB}|=\sqrt{30}$$
$$AC=|\vec{AC}|=\sqrt{33}$$
$$BC=|\vec{BC}|=\sqrt{11}$$

(II) Aplicando el teorema del coseno:

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{30+33-11}{2\cdot\sqrt{30}\cdot\sqrt{33}} = \frac{26}{3\sqrt{110}}$$

(*b*) (I) Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{BC}\times\vec{CA} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -1 & -4 \\ \vec{\jmath} & -3 & 4 \\ \vec{k} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -16 \end{pmatrix} = -7\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 16\vec{k}$$

(II) El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{49+9+256} = \frac{1}{2}\sqrt{314}$$

(*c*) Tomamos $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ como vectores directores. La ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 5 & 4 \\ y-2 & -1 & -4 \\ z-3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies -9(x+1) - 13(y-2) - 16(z-3) = 0$$

Quitando los paréntesis resulta $9x + 13y + 16z - 65 = 0$.

(*d*) La ecuación vectorial de la recta AB es:

$$\vec{OX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(*e*) (I) Sea $D(-1+5\lambda, 2-\lambda, 3-2\lambda)$. Si $\vec{OD} \perp \vec{BC}$:

$$\begin{pmatrix} -1+5\lambda \\ 2-\lambda \\ 3-2\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \implies 1 - 5\lambda - 6 + 3\lambda + 3 - 2\lambda = 0 \implies \lambda = 2$$

y tenemos que el punto es $D(9, 0, -1)$.

(II) Su coordenada x no está entre la de A y la de B. En la ecuación de la recta que hemos escrito obtenemos A para $\lambda = 0$, B para $\lambda = 1$ y D para $\lambda = 2$.

♠♠♠♠

24. (5 puntos)

Consider the system of equations

$$\begin{cases} 0{,}1x - 1{,}7y + 0{,}9z = -4{,}4 \\ -2{,}4x + 0{,}3y + 3{,}2z = 1{,}2 \\ 2{,}5x + 0{,}6y - 3{,}7z = 0{,}8 \end{cases}$$

(*a*) Express the system of equations in matrix form.

(*b*) Find the solution to the system of equations.

Solución:

(*a*)

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & -1{,}7 & 0{,}9 \\ -2{,}4 & 0{,}3 & 3{,}2 \\ 2{,}5 & 0{,}6 & -3{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}4 \\ 1{,}2 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$$

(*b*) Resolviendo con la calculadora $x =$, $y =$, $z =$.

♠♠♠♠

25. (5 puntos)

When the polynomial $3x^3 + ax + b$ is divided by $(x-2)$, the remainder is 2, and when divided by $(x+1)$, it is 5. Find the value of a and the value of b.

Solución:

Sea $p(x) = 3x^3 + ax + b$. De acuerdo con el teorema del resto, $p(2) = 2$ y $p(-1) = 5$. Entonces:

$$\begin{cases} 24 + 2a + b = 2 \\ -3 - a + b = 5 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a = -10, \quad b = -2$$

♠♠♠♠

26. (6 puntos)

The equation $5x^3+48x^2+100x+2 = a$ has roots r_1 , r_2 and r_3. Given that $r_1+r_2+r_3-r_1r_2r_3 = 0$, find the value of a.

Solución:

Escribamos la ecuación:

$$5x^3 + 48x^2 + 100x + 2 - a = 0$$

De acuerdo con las relaciones de Cardano $r_1r_2r_3 = -\frac{2-a}{5}$ y $r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{48}{5}$.Entonces:

$$-\frac{48}{5} + \frac{2-a}{5} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = -46$$

♠♠♠♠

27. (22 puntos)

(a) Show that the points $O(0,0,0)$, $A(6,0,0)$, $B(6,-\sqrt{24},\sqrt{12})$, $C(0,-\sqrt{24},\sqrt{12})$ form a square.

(b) Find the coordinates of M, the mid-point of $[OB]$.

(c) Show that an equation of the plane Π, containing the square $OABC$, is $y + \sqrt{2}z = 0$.

(d) Find a vector equation of the line L, through M, perpendicular to the plane Π.

(e) Find the coordinates of D, the point of intersection of the line L with the plane whose equation is $y = 0$.

(f) Find the coordinates of E, the reflection of the point D in the plane Π.

(g) (I) Find the angle $\widehat{ODA}$.

(II) State what this tells you about the solid $OABCDE$.

Solución:

(a) Basta ver que los vectores $\vec{OA}$, $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ y $\vec{CO}$ tienen la misma longitud. Además $\vec{OA}$ es perpendicular a $\vec{OC}$.

(b) Las coordenadas son $M\left(3,-\sqrt{6},\sqrt{3}\right)$ que se obtienen sumando las coordenadas de ambos puntos y dividiendo por 2.

(c) Teniendo en cuenta que:

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{24} \\ \sqrt{12} \end{pmatrix} = \sqrt{12} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

la ecuación del plano es

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & -\sqrt{2} \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y + \sqrt{2}z = 0$$

(d) La ecuación vectorial de la recta es:

$$\vec{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{6} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(e) El punto D es la solución del sistema

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -\sqrt{6} + \lambda \\ z = \sqrt{3} + \lambda\sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad D\left(3, 0, 3\sqrt{3}\right).$$

(f) Sea $E(x, y, z)$. Puesto que M es el punto medio de D y E:

$$3 = \frac{3+x}{2} \; ; \qquad -\sqrt{6} = \frac{0+y}{2} \; ; \qquad \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}+z}{2}$$

Obtenemos el punto $E\left(3, -2\sqrt{6}, -\sqrt{3}\right)$.

(g) (I) Calculamos los vectores

$$\vec{DO} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{DA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\cos\widehat{ODA} = \frac{18}{6\cdot 6} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{ODA} = 60^{\text{o}}$$

(II) Por el modo de obtención de los puntos y el ángulo calculado podemos decir que se trata de un octaedro.

♠♠♠♠

28. (6 puntos)

A system of equations is given below.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \\ -x + 4y + az = 4 \end{cases}$$

(a) Find the value of a so that the system does not have a unique solution.
(b) Show that the system has a solution for any value of a.

Solución:

(a) Para que el sistema no tenga solución única, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & a \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & a-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -3(a-1) - 18 = 0$$

El sistema no tiene solución única para $a = -5$.

(b) Para $a = -5$ el rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -5 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

El rango de la matriz ampliada es igual al rango de la matriz de coeficientes porque la cuarta columna es igual que la segunda. El sistema en este caso es compatible indeterminado. Por tanto, el sistema siempre tiene solución.

♠♠♠♠

29. (5 puntos)

(a) Muestre que el siguiente sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x + y + 2z = -2 \\ 3x - y + 14z = 6 \\ x + 2y = -5 \end{cases}$$

(b) El sistema de ecuaciones representa tres planos en el espacio. Halle las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los tres planos.

Solución:

(a) Calculamos los rangos de las matrices por el método de Gauss:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 14 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada tienen rango 2 y, por tanto, es compatible indeterminado.

(b) Hay dos ecuaciones independientes. Tomemos la primera y la tercera:

$$\begin{cases} x+y+2z=-2 \\ x+2y=-5 \end{cases}$$

Eligiendo $y=\lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} x=-5-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

♠♠♠♠

30. (6 puntos)

Las raíces de la ecuación cuadrática $2x^2+4x-1=0$ son α y β. Sin resolver la ecuación,

(a) Halle el valor de $\alpha^2+\beta^2$;

(b) Halle una ecuación cuadrática cuyas raíces sean α^2 y β^2.

Solución:

(a) Por las relaciones de Cardano, las dos raíces α y β cumplen que $\alpha+\beta=-2$ y $\alpha\beta=-\frac{1}{2}$. Entonces:

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4+1=5$$

(b) Puesto que $\alpha^2+\beta^2=5$ y $\alpha^2\beta^2=\frac{1}{4}$, la ecuación que tiene como raíces α^2 y β^2 es:

$$x^2-5x+\frac{1}{4}=0 \qquad \text{o bien} \qquad 4x^2-20x+1=0$$

♠♠♠♠

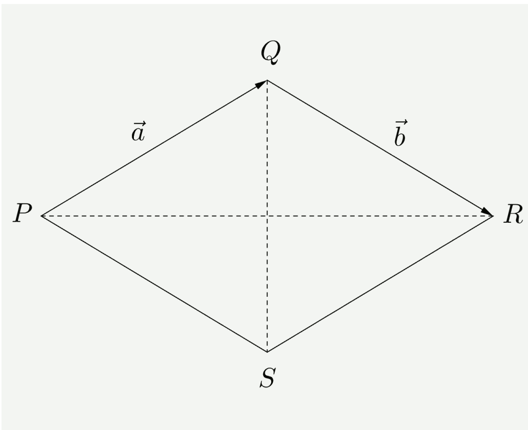
31. (6 puntos)

$PQRS$ es un rombo. Sabiendo que $\vec{PQ}=\vec{a}$ y $\vec{QR}=\vec{b}$,

(a) Exprese los vectores $\vec{PR}$ y $\vec{QS}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$;

(b) A partir de lo anterior, muestre que las diagonales de un rombo se cortan en ángulo recto.

Solución:



(a) $\vec{PR}=\vec{a}+\vec{b}$, $\quad \vec{QS}=\vec{b}-\vec{a}$.

(b) Veamos que el producto escalar $\vec{PR}\cdot\vec{QS}$ es cero:

$$\vec{PR}\cdot\vec{QS}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\mathbf{b}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=0$$

y, en consecuencia, las diagonales son perpendiculares.

♠♠♠♠

32. (18 puntos)

Dados los puntos $A(1,0,4)$, $B(2,3,-1)$ y $C(0,1,-2)$,

(a) Halle la ecuación vectorial de la recta L_1 que pasa por los puntos A y B.

(b) La recta L_2 tiene por ecuación cartesiana

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-2}$$

Muestre que L_1 y L_2 son alabeadas.

(c) Considere el plano Π_1 paralelo a L_1 y también a L_2. El punto C pertenece al plano Π_1. Halle la ecuación cartesiana del plano Π_1.

(d) La recta L_3 tiene por ecuación vectorial

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}k\\1\\-1\end{pmatrix}$$

El plano Π_2 tiene por ecuación cartesiana $x+y=12$. El ángulo entre la recta L_3 y el plano Π_2 es igual a 60°.

(I) Halle el valor de k.

(II) Halle el punto de intersección P de la recta L_3 y el plano Π_2.

Solución:

(a) Tomando $\vec{AB}$ como vector director:

$$\vec{OX}=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}$$

(b) Está claro que las dos rectas no son paralelas. Para ver si se cortan o se cruzan calculamos el producto mixto $[\vec{PQ},\vec{u},\vec{v}]$ donde P y Q son puntos pertenecientes a cada una de las rectas y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores directores:

$$[\vec{PQ},\vec{u},\vec{v}]=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&3&1\\-6&-5&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-5&1\\1&3&1\\0&13&4\end{vmatrix}=33\neq 0$$

Como el producto mixto es distinto de cero, las dos rectas se cruzan.

(c) La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix}x&1&3\\y-1&3&1\\z+2&-5&-2\end{vmatrix}=0\quad\Longrightarrow\quad -3x-13(y-1)-8(z+2)=0$$

El plano es $3x+13y+8z+3=0$.

(d) (I) El ángulo cumple que

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}=\frac{k+1}{\sqrt{k^2+2}\sqrt{2}}\quad\Longrightarrow\quad 6(k^2+2)=4(k+1)^2$$

Esta ecuación tiene como única solución $k=2$.

(II) El punto de intersección es la solución del sistema:

$$\begin{cases}x+y=12\\x=3+2\lambda\\y=\lambda\\z=1-\lambda\end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene el punto $(9,3,-2)$.

♠♠♠♠

33. La ecuación cúbica $x^3+px^2+qx+c=0$, tiene por raíces α, β y γ. Desarrollando $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ muestre que:

(a) (I) $p=-(\alpha+\beta+\gamma)$.

(II) $q=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

(III) $c = -\alpha\beta\gamma$.

Ahora se sabe que $p = -6$ y $q = 18$ para los apartados (b) y (c).

(b) (I) En el caso de que las tres raíces formen una progresión aritmética, muestre que una de las raíces es 2.

(II) A partir de lo anterior, determine el valor de c.

(c) En otro caso, las tres raíces α, β y γ forman una progresión geométrica. Determine el valor de c.

Solución:

(a) Desarrollando:

$$\begin{aligned} x^3 + px^2 + qx + c &= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\ &= x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

e igualando coeficientes resulta:

$$\begin{aligned} p &= -(\alpha+\beta+\gamma) \\ q &= \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \\ c &= -\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

(b) (I) Puesto que las raíces están en progresión aritmética, las podemos representar mediante $a-d$, a y $a+d$. Entonces:

$$a - d + a + a + d = 6 \quad \Longrightarrow \quad 3a = 6 \quad \Longrightarrow \quad a = 2$$

El segundo término de la progresión es igual a 2.

(II) Por otra parte puesto que $x = 2$ es una raíz de $x^3 - 6x^2 + 18x + c$:

$$2^3 - 6 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = -20$$

(c) Sean las raíces $\frac{a}{r}$, a y ar. Debe cumplirse que:

$$-\left(\frac{a}{r} + a + ar\right) = a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = 6$$

$$\frac{a}{r} \cdot a + \frac{a}{r} \cdot ar + a \cdot ar = a^2\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = 18$$

Dividiendo miembro a miembro se obtiene $a = 3$. Entonces:

$$c = -\frac{a}{r} \cdot a \cdot ar = -a^3 = -27$$

♠♠♠♠

34. Considere los vectores dados por $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ y $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ donde a y b son constantes.

Se sabe que $\vec{u} \times \vec{v} = 4\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ donde c es una constante.

(a) Halle el valor de cada una de las constantes a, b y c.

(b) A partir de lo anterior, halle la ecuación cartesiana del plano que contiene a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

Solución:

(a) Calculamos el producto vectorial e igualamos:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & a \\ \vec{\jmath} & 2 & b \\ \vec{k} & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ -2a \\ b-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad b = 2\ ; \quad a = -1\ ; \quad c = 4$$

(b) El vector normal al plano es $\vec{u} \times \vec{v}$. Por tanto la ecuación es:

$$4x + 2y + 4z = 0 \qquad \text{ó} \qquad 2x + y + 2z = 0$$

♠♠♠♠

35. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y + 6z = 0 \\ 4x + 3y + 14z = 4 \\ 2x - 2y + (\alpha + 2)z = \beta - 12 \end{cases}$$

(*a*) Halle las condiciones que han de cumplir α y β para que:
   (I) El sistema no tenga solución.
   (II) El sistema tenga solo una solución.
   (III) El sistema tenga un número infinito de soluciones.

(*b*) Para el caso en el que el número de soluciones es infinito, halle la solución general del sistema de ecuaciones en forma cartesiana.

Solución:

(*a*) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 14 \\ 2 & 2 & \alpha - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha - 8 \end{vmatrix} = 2(\alpha - 10)$$

y ya podemos decir que:

- Si $\alpha \neq 10$ el sistema es compatible determinado y tiene una sola solución.
- Si $\alpha = 10$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. El de la matriz ampliada es:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 14 & 4 \\ 2 & 2 & 8 & \beta - 12 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & \beta - 12 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \beta - 12 \end{pmatrix}$$

  El determinante de esta matriz es $2(\beta - 16)$ de forma que, si $\beta \neq 16$ el rango de la matriz ampliada es 3 y el sistema es incompatible. Si $\beta = 16$ el rango de la matriz ampliada es 2 y el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

(*b*) Para $\alpha = 10,\ \beta = 16$ el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} 2x + y + 6z = 0 \\ 4x + 3y + 14z = 4 \end{cases}$$

Esta es la ecuación de una recta como intersección de planos. Para pasarla a forma continua buscamos una solución particular, por ejemplo $P(-2, 4, 0)$ y un vector director:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 2 & 4 \\ \vec{\jmath} & 1 & 3 \\ \vec{k} & 6 & 14 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y la ecuación queda:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{-1}$$

♠♠♠♠

36. Las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 son:

$$L_1 : \vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad L_2 : \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(*a*) Muestre que las rectas L_1 y L_2 son alabeadas.

(*b*) Halle el ángulo agudo que forman las rectas L_1 y L_2.

(*c*) (I) Halle un vector perpendicular a ambas rectas.
   (II) A partir de lo anterior, determine una ecuación de la recta L_3 que es perpendicular a L_1 y L_2 y que corta a ambas rectas.

Solución:

(a) La posición relativa de las rectas depende del producto mixto $[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]$:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

y, por consiguiente, se cruzan (son alabeadas).

(b) Calculamos el ángulo:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-2+1+12}{\sqrt{6}\sqrt{41}} \implies \alpha \simeq 45{,}5^{\text{o}}$$

(c) (I) Un vector perpendicular a ambos es su producto vectorial:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -1 & 2 \\ \vec{\jmath} & 1 & 1 \\ \vec{k} & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(II) El plano que contiene a L_1 y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & -1 \\ y-2 & 10 & 1 \\ z-2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies 23x - 5y + 14z - 41 = 0$$

El plano que contiene a L_2 y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 2 \\ y-2 & 10 & 1 \\ z-4 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \implies 21x - 10y + 8z - 33 = 0$$

La perpendicular común es la intersección de ambos planos:

$$L_3 : \begin{cases} 23x - 5y + 14z - 41 = 0 \\ 21x - 10y + 8z - 33 = 0 \end{cases}$$

♠♠♠♠

37. (6 puntos)

Una función polinómica viene dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Las raíces de la ecuación polinómica $f(x) = 0$ son términos consecutivos de una progresión geométrica cuya razón común es igual a $\frac{1}{2}$ y cuyo primer término es 2.

Sabiendo que $a_{n-1} = -63$ y $a_n = 16$, halle

(a) El grado del polinomio.

(b) El valor de a_0.

Solución:

(a) De acuerdo con las relaciones de Cardano, la suma de las raíces de un polinomio es $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$. Entonces:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}\ ; \qquad \frac{2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{63}{16}\ ; \qquad 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{63}{64}\ ; \qquad \frac{1}{2^n} = \frac{1}{64}$$

y por tanto, $n = 6$. Hay 6 raíces del polinomio y, por consiguiente, es de sexto grado.

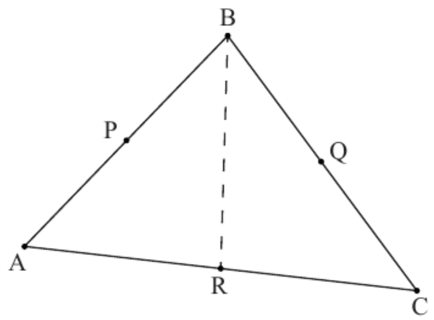
(b) Si el polinomio es de grado par

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = \frac{a_0}{a_n} \implies a_0 = 16\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{32}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (23 puntos)

Considere el triángulo ABC. Los puntos P, Q y R son los puntos medios de los segmentos de recta $[AB]$, $[BC]$ y $[AC]$ respectivamente.



Sean $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ y $\vec{OC} = \vec{c}$.

(a) Halle $\vec{BR}$ en función de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

(b) (I) Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por B y por R en función de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y de un parámetro λ.

(II) Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por A y por Q en función de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y de un parámetro μ.

(III) A partir de lo anterior, muestre que $OG = \dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$, sabiendo que G es el punto en el que se cortan $[BR]$ y $[AQ]$.

(c) Muestre que el segmento de recta $[CP]$ también incluye al punto G.

Las coordenadas de los puntos A, B y C son $(1,3,1)$, $(3,7,-5)$ y $(2,2,1)$ respectivamente. Un punto X es tal que $[GX]$ es perpendicular al plano ABC.

(d) Sabiendo que el tetraedro $ABCX$ tiene un volumen de 12 unidades, halle posibles coordenadas de X.

Solución:

(a) Puesto que $\vec{AB}+\vec{BR}=\vec{AR}$:

$$\vec{BR}=\vec{AR}-\vec{AB}=\frac{1}{2}\vec{AC}-\vec{AB}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})-(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b})$$

(b) (I) Tomamos como punto de la recta B y como vector director $2\vec{BR}$:

$$\vec{r}=\vec{b}+\lambda(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b})$$

(II) De la misma forma, la recta que pasa por A y por Q es

$$\vec{r}=\vec{a}+\mu(\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a})$$

(III) En el punto de intersección se cumple

$$\begin{aligned}
&\vec{b}+\lambda(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b})=\vec{a}+\mu(\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a})\\
&(1-\lambda-2\mu)\vec{a}-(1-\lambda-2\mu)\vec{b}+(\mu-\lambda)\vec{c}=\vec{0}\\
&(1-\lambda-2\mu)(\vec{a}-\vec{b})+(\mu-\lambda)\vec{c}=\vec{0}
\end{aligned}$$

Esta igualdad debe verificarse para cualquier triángulo. Entonces los coeficientes de los vectores deben ser cero, $\lambda=\mu=\frac{1}{3}$. En este caso

$$\vec{r}=\vec{b}+\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

(c) La ecuación de CP es:

$$\vec{r}=\vec{c}+\gamma(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})$$

Para $\gamma=\frac{1}{3}$ se obtiene el punto G.

(d) El punto G es $(2,4,-1)$. Un vector perpendicular al plano ABC es

$$\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{pmatrix}\vec{\imath} & 2 & 1\\ \vec{\jmath} & 4 & -1\\ \vec{k} & -6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-6\\-6\end{pmatrix}=-6\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

El punto X está entonces sobre la recta

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

El volumen del tetraedro es un sexto del módulo del producto mixto $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AX}]$. Sea $X(2+\lambda, 4+\lambda, -1+\lambda$. Entonces

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1+\lambda \\ 4 & -1 & 1+\lambda \\ -6 & 0 & -2+\lambda \end{vmatrix} = \pm 12$$

o, como ya conocemos el producto vectorial de las dos primeras columnas

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1+\lambda \\ -2+\lambda \end{pmatrix} = \pm 72 \ ; \qquad -6 - 6\lambda - 6 - 6\lambda + 12 - 6\lambda = \pm 72 \ ; \qquad -18\lambda = \pm 72$$

que nos da $\lambda = 4$ y $\lambda = -4$. Sustituyendo tenemos los puntos $X_1(6, 8, 3)$ y $X_2\,(-2, 0, -5)$. Obsérvese que el punto G es el punto medio entre los dos.

♠♠♠♠

38. (4 puntos)

Los tres planos cuyas ecuaciones cartesianas son $2x + 3y - z = 11$, $x + 2y + z = 3$ y $5x - y - z = 10$ se cortan en el punto P. Halle las coordenadas de P.

Solución:

Basta resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 11 \\ x + 2y + z = 3 \\ 5x - y - z = 10 \end{cases}$$

La solución es $x = \frac{17}{9}$, $y = \frac{5}{3}$ y $z = -\frac{20}{9}$.

♠♠♠♠

39. (8 puntos)

Ed camina en línea recta desde el punto $P(-1, 4)$ hasta el punto $Q(4, 16)$ con velocidad constante. Ed sale del punto P en el instante $t = 0$ y llega al punto Q en el instante $t = 3$, donde t se mide en horas. Sabiendo que en el instante t el vector de posición de Ed respecto al origen se puede expresar en la forma $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$

(a) Halle los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Roderick se encuentra en el punto $C(11, 9)$. Roderick quiere hacerle señas a Ed mientras este va caminando de P a Q. Roderick decide hacer señas cuando Ed pase por el punto más cercano a C.

(b) Halle el instante en el que Roderick hace señas a Ed.

Solución:

(a) La velocidad es:

$$\vec{v} = \frac{\vec{PQ}}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

La posición de Ed es entonces

$$\vec{r} = \vec{OP} + t\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Es decir

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \ ; \qquad \vec{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(*b*) La distancia al cuadrado entre los dos está dada por la siguiente función:

$$f(t) = \left(11 + 1 - \frac{5}{3}t\right)^2 + (9 - 4 - 4t)^2 = \left(12 - \frac{5}{3}t\right)^2 + (5 - 4t)^2$$

El mínimo lo podemos obtener derivando e igualando a cero la derivada:

$$2\left(12 - \frac{5}{3}t\right)\frac{-5}{3} + 2\,(5 - 4t)\,(-4) = 0\ ; \qquad \left(\frac{25}{9} + 16\right)t - 40 = 0$$

Aproximadamente $t = 2{,}13$ s, o, exactamente $\frac{360}{169}$ s.
El problema se podía haber resuelto también calculando la intersección de la recta PQ con la perpendicular a esta misma recta por C. Éste es el punto en que los dos personajes se encuentran más próximos. Luego se calcularía t a partir de las ecuaciones paramétricas de la recta PQ.

♠♠♠♠

40. (6 puntos)

El siguiente sistema de ecuaciones representa tres planos en el espacio:

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= -1 \\ x + 2y - 2z &= 15 \\ 2x + y - z &= 6 \end{aligned}$$

Halle las coordenadas del punto de intersección de los tres planos.

Solución:

Se resuelve el sistema y resulta el punto $(-1, 2, -6)$.

♠♠♠♠

41. (18 puntos)

Una recta L tiene por ecuación

$$\frac{x-2}{p} = \frac{y-q}{2} = z - 1\ ; \qquad p, q \in \mathbb{R}$$

Un plano Π tiene por ecuación $x + y + 3z = 9$.

(*a*) Muestre que L no es perpendicular a Π.

(*b*) Sabiendo que L está contenida en el plano Π, halle el valor de p y el valor de q.

Considere ahora un caso distinto, en el que L y Π forman un ángulo agudo θ, donde $\theta = \operatorname{arsen} \frac{1}{\sqrt{11}}$.

(*c*) (I) Muestre que $p = -2$.

(II) Si L y Π se cortan en $z = 1$, halle el valor de q.

Solución:

(*a*) Si fuesen perpendiculares, el vector normal al plano y el vector director de la recta tendrían la misma dirección y, en consecuencia, sus coordenadas srían proporcionales. Es evidente que no es así.

(*b*) Si L está contenida en Π los vectores director de la recta y normal al plano son perpendiculares:

$$1 \cdot p + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad p = -5$$

Por otra parte, el punto $A(2, q, 1)$ de la recta debe estar contenido en el plano. Por tanto

$$2 + q + 3 = 9 \quad\Longrightarrow\quad q = 4$$

(*c*) (I) El ángulo entre recta y plano está dado por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}||\vec{u}|}$$

Sustituyendo:

$$\operatorname{sen}\ \operatorname{arsen}\frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{|p+2+3|}{\sqrt{p^2+5}\sqrt{11}}\ ; \qquad \frac{|p+5|}{\sqrt{p^2+5}} = 1\ ; \qquad (p+5)^2 = p^2 + 5$$

Resolviendo esta ecuación resulta $p = -2$.

(II) La ecuación de la recta en paramétricas es

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = q + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Si $z = 1$, $\lambda = 0$ y el punto de la recta es $B(2, q, 1)$. Si este punto está en el plano:

$$2 + q + 3 = 9 \quad \Longrightarrow \quad q = 4$$

♠♠♠♠

42. (8 puntos)

$OACB$ es un paralelogramo en el que $\vec{OA} = \vec{a}$ y $\vec{OB} = \vec{b}$, donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores no nulos.

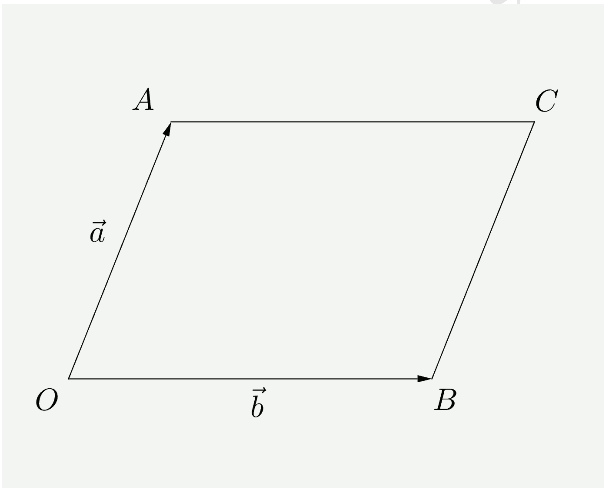
(a) Muestre que

(I) $|\vec{OC}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$.

(II) $|\vec{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$.

(b) Sabiendo que $|\vec{OC}| = |\vec{AB}|$, demuestre que $OACB$ es un rectángulo.

Solución:



(a) $|\vec{OC}|^2 = \vec{OC} \cdot \vec{OC} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(b) Teniendo en cuenta $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \quad \Longrightarrow \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$:

$$|\vec{AB}|^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

(c) $|\vec{OC}| = |\vec{AB}| \quad \Longrightarrow \quad |\vec{OC}|^2 - |\vec{AB}|^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$

Los lados son perpendiculares y el paralelogramo es rectángulo.

♠♠♠♠