

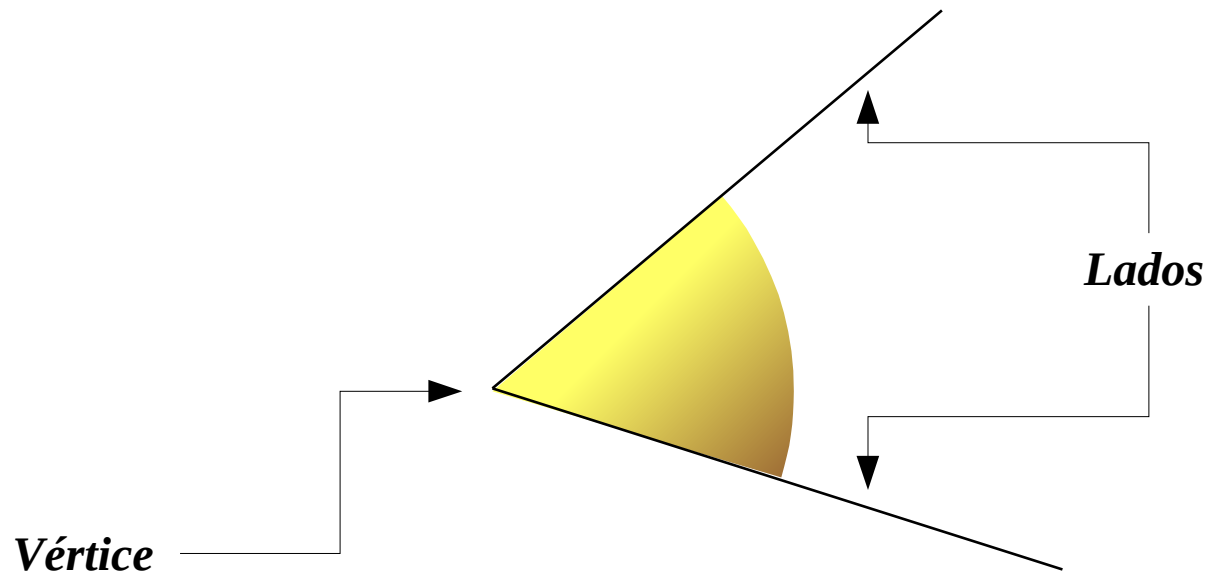
Geometría

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

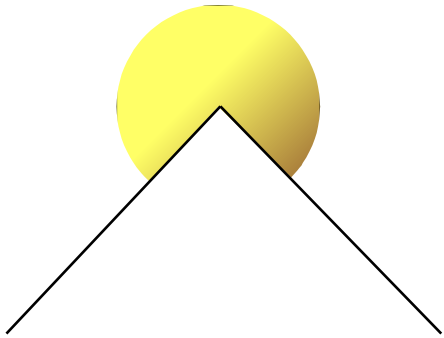
Ángulos

Un ángulo es la región del plano limitada por dos semirrectas con el origen común.

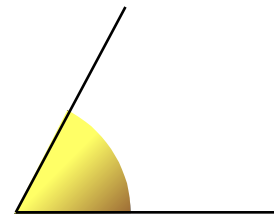


Clasificación de los ángulos

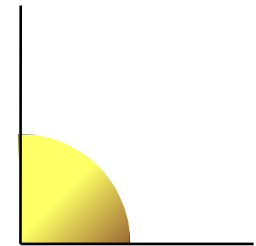
CÓNCAVO



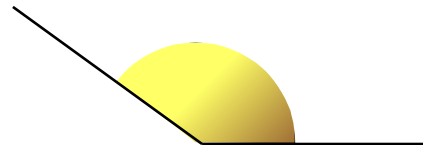
CONVEXO



Agudo



Recto



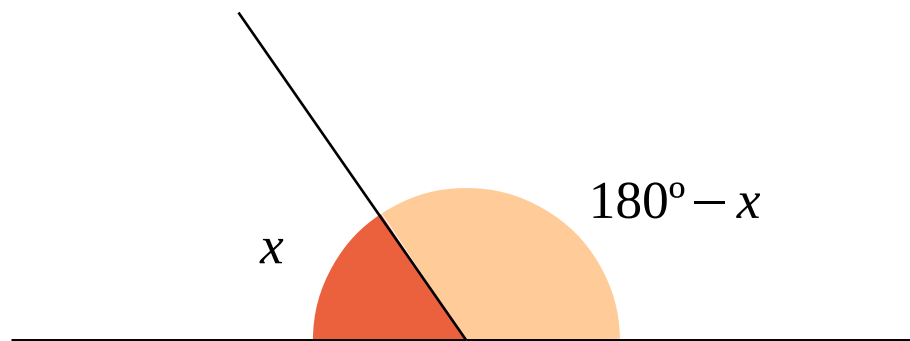
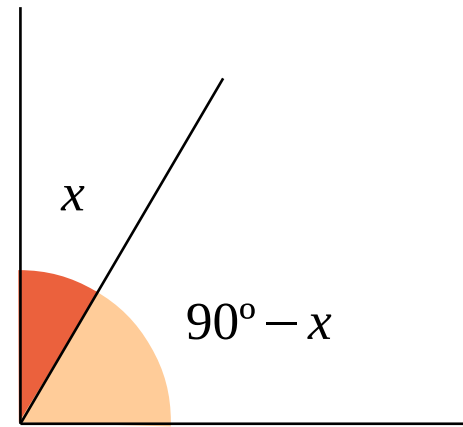
Obtuso



Llano

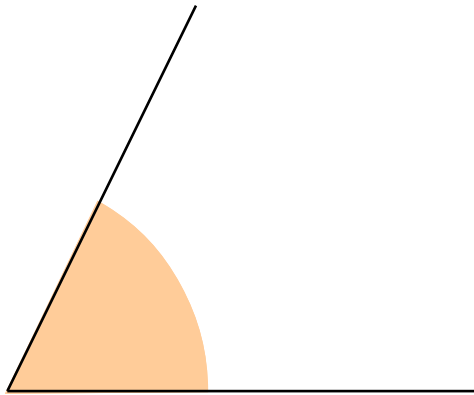
Complementarios y suplementarios

Dos ángulos son **complementarios** si su suma es un ángulo recto (90°).

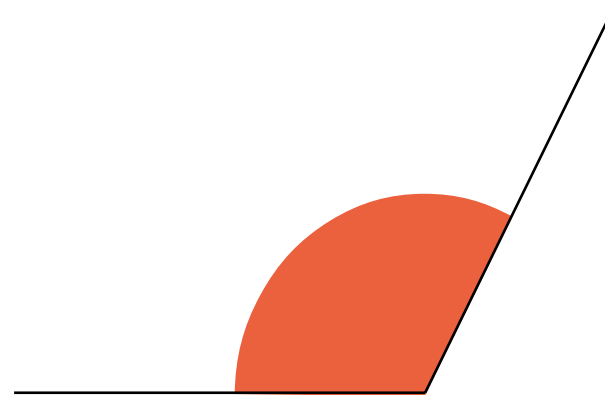
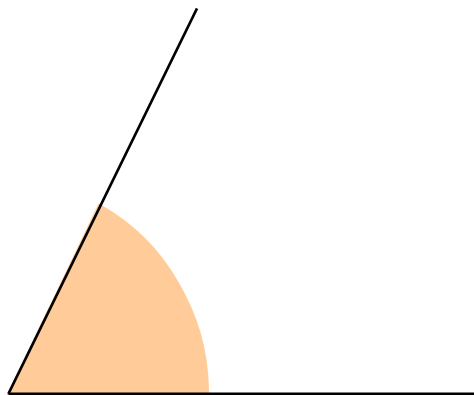


Dos ángulos son **suplementarios** si su suma es un ángulo llano (180°).

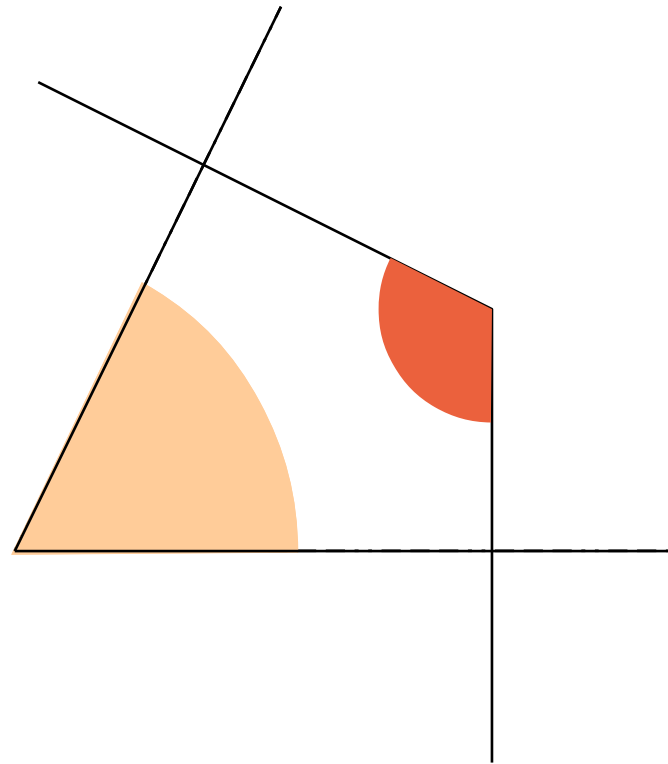
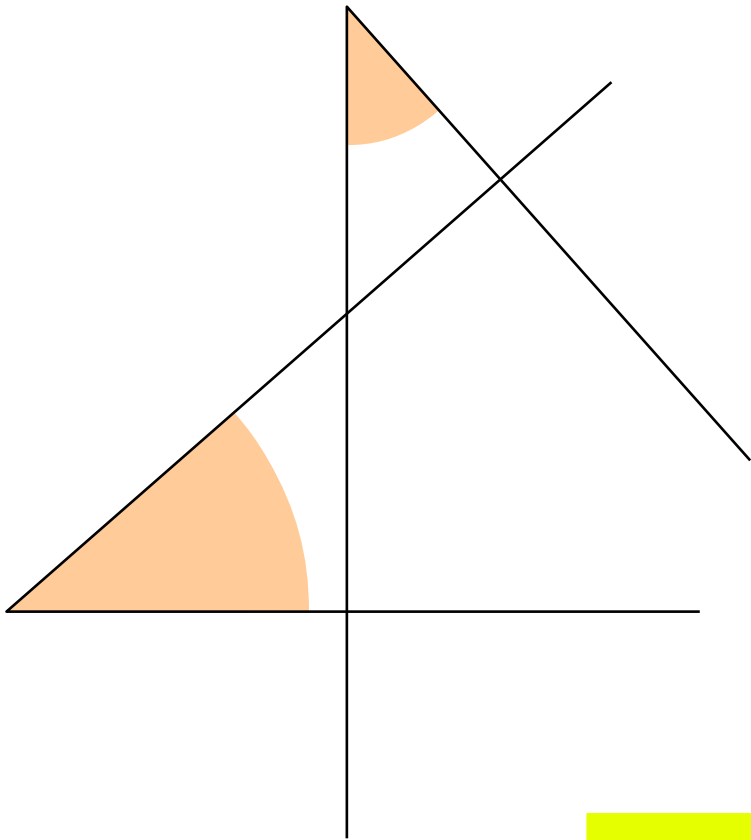
Lados paralelos



Dos ángulos (convexos) de lados paralelos son iguales o suplementarios.

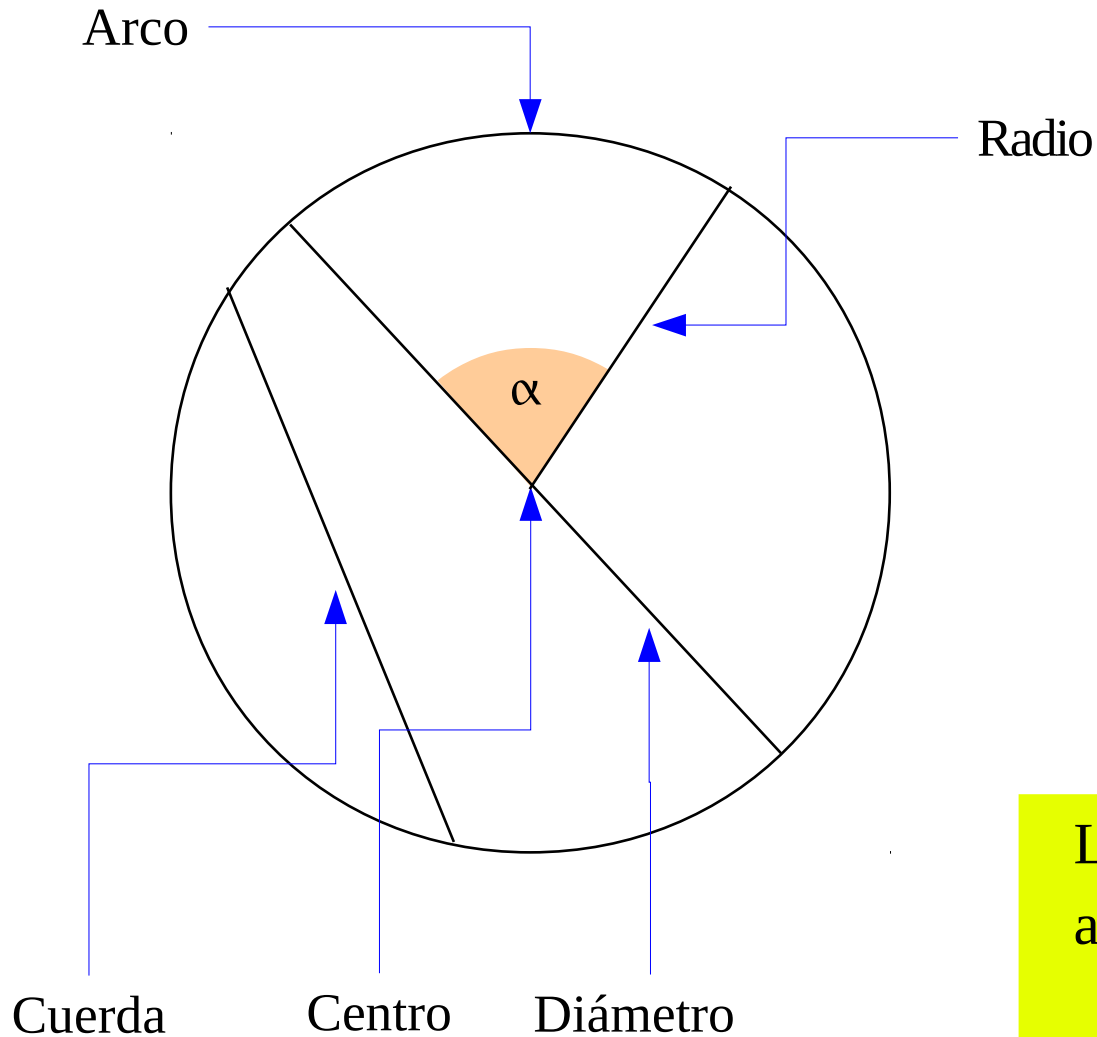


Lados perpendiculares



Dos ángulos (convexos) de lados perpendiculares son iguales o suplementarios.

Circunferencia



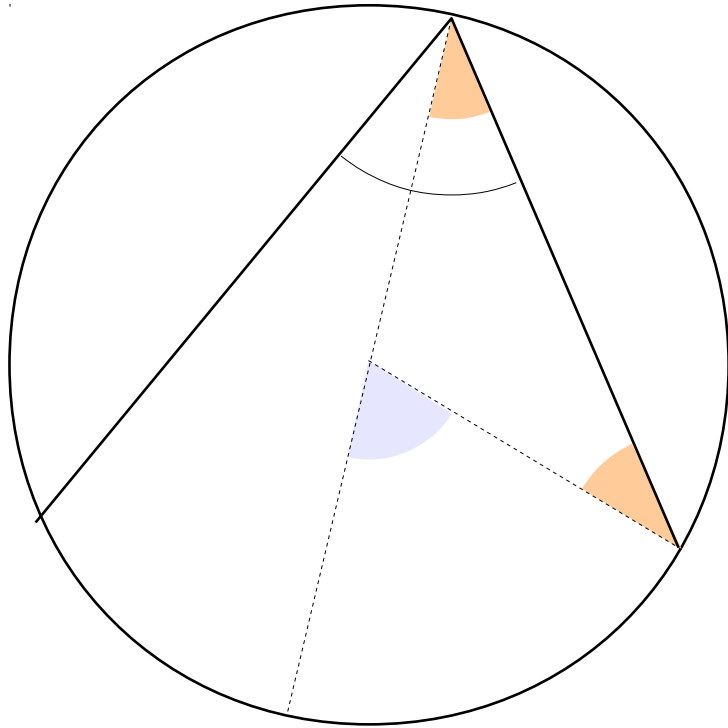
La longitud de la circunferencia es igual al diámetro multiplicado por π :

$$l = 2\pi r$$

La longitud de un arco es proporcional a su amplitud:

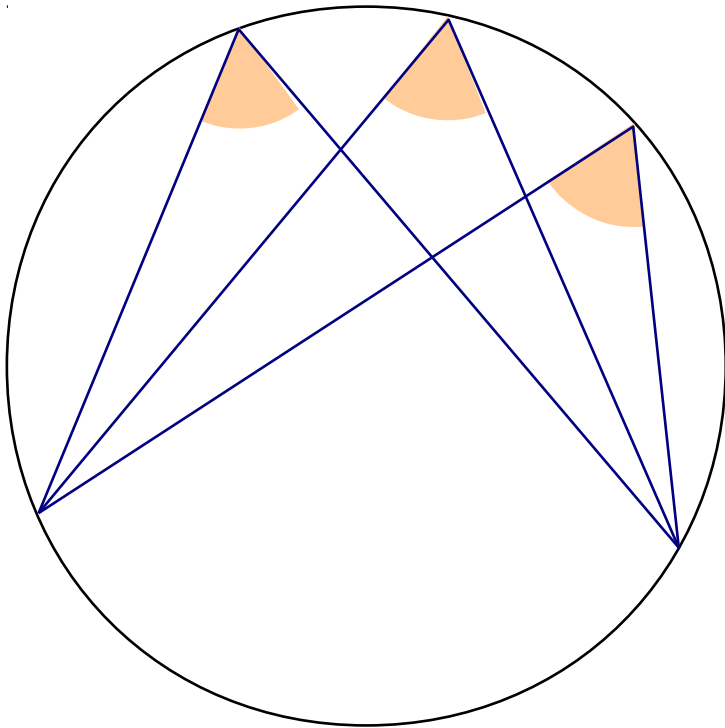
$$l_{arco} = \frac{2\pi r \alpha}{360}$$

Ángulos inscritos

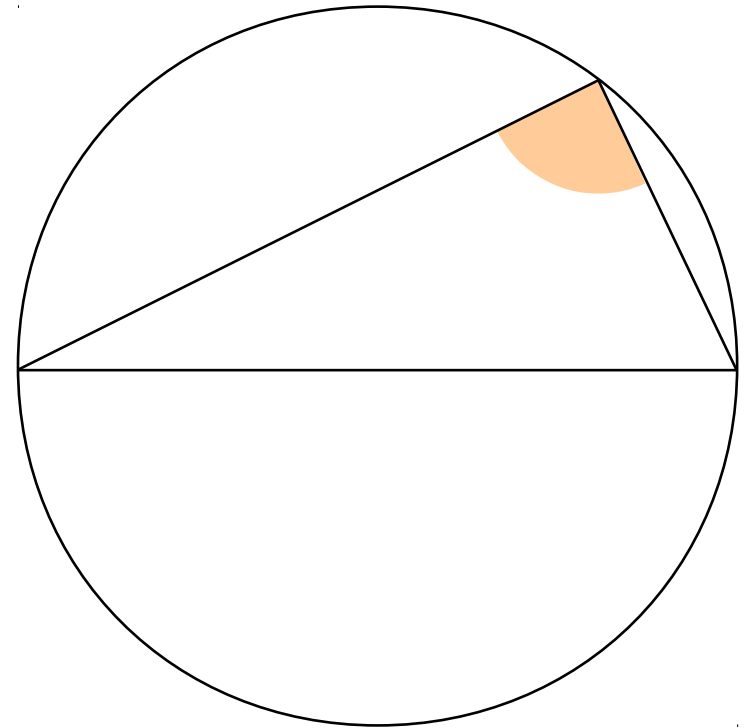


Un ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad que el ángulo central correspondiente (es la mitad del arco).

Ángulos inscritos

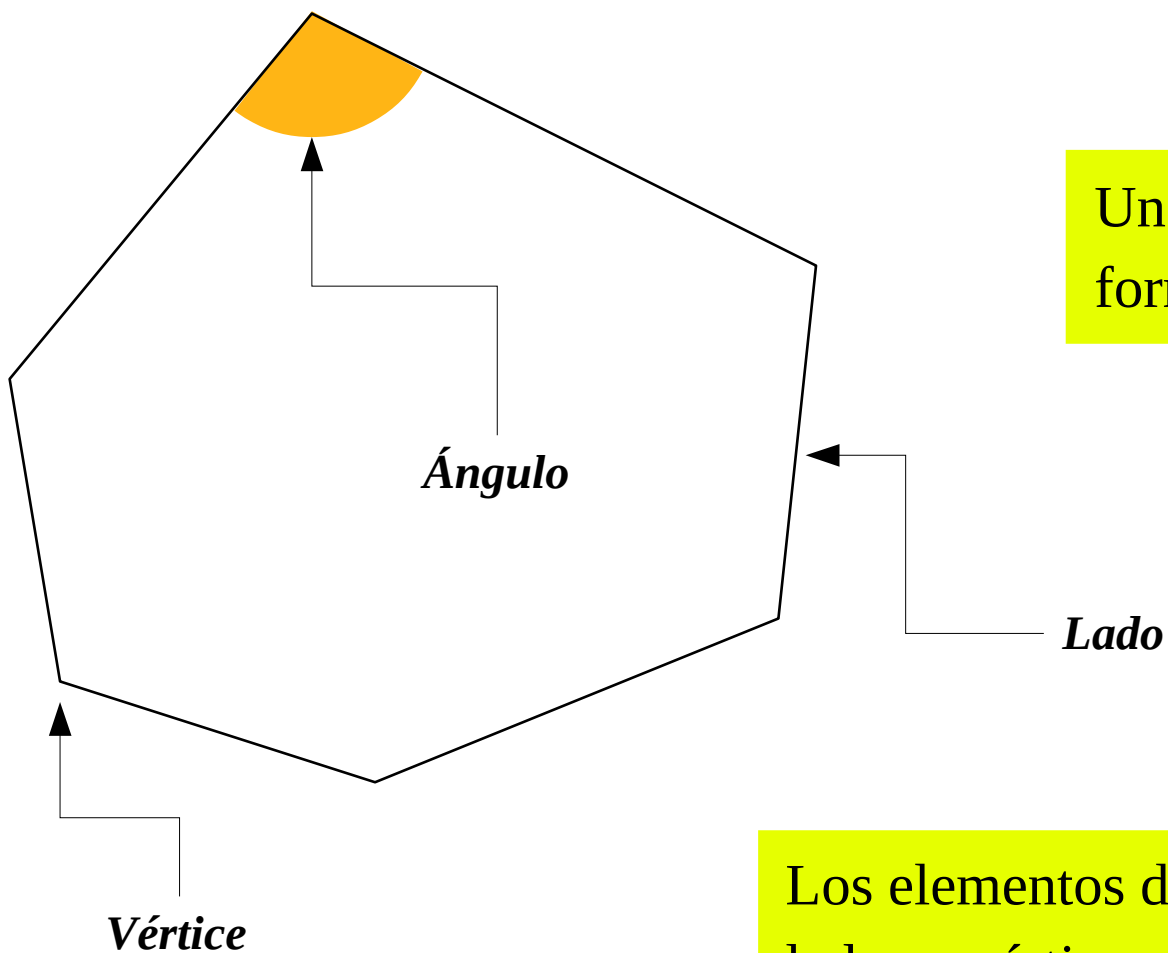


Todos los ángulos inscritos en el mismo arco son iguales.



Los ángulos inscritos en una semicircunferencia son rectos.

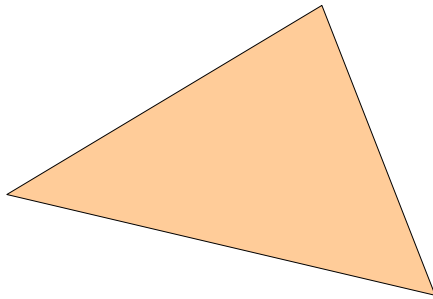
Polígonos



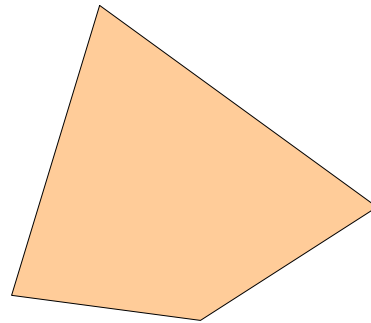
Un polígono es una línea cerrada formada por varios segmentos.

Los elementos de un polígono son ángulos, lados y vértices.

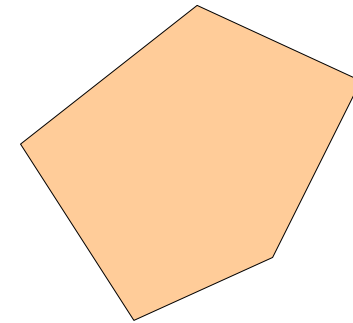
Clasificación de los polígonos



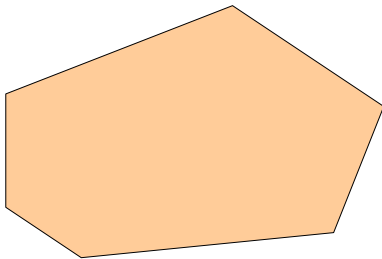
Triángulo



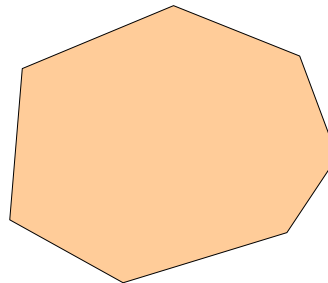
Cuadrilátero



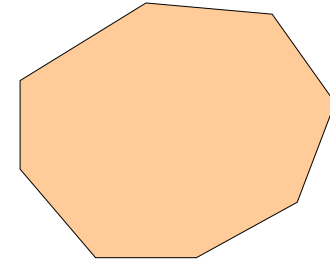
Pentágono



Hexágono



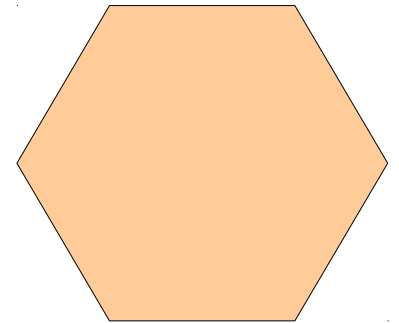
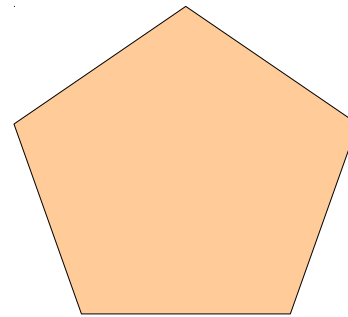
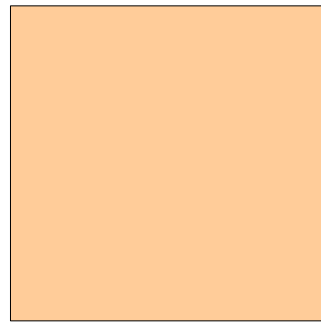
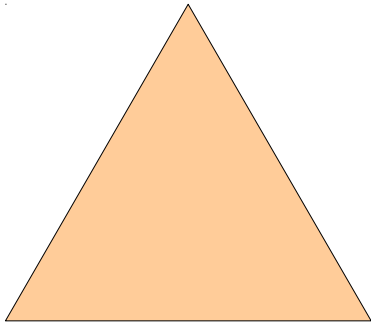
Heptágono



Octógono

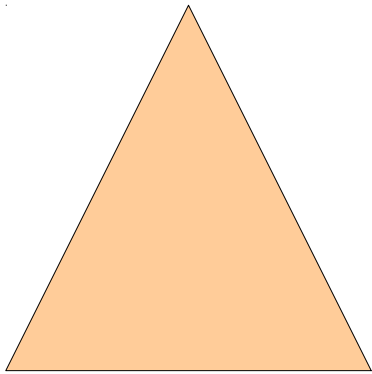
Según el número de ángulos y lados, los polígonos se clasifican en triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octógonos, etc.

Polígonos regulares

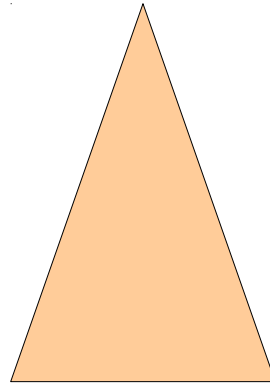


Se llaman regulares los polígonos que tienen todos sus lados y ángulos iguales.

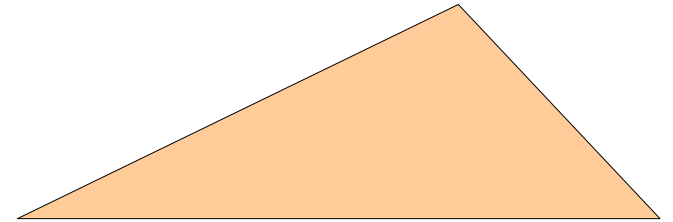
Triángulos: clasificación



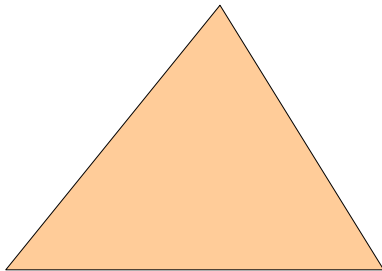
Equilátero



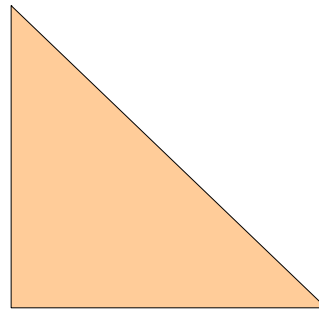
Isósceles



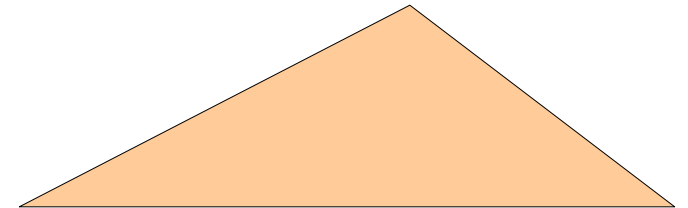
Escaleno



Acutángulo

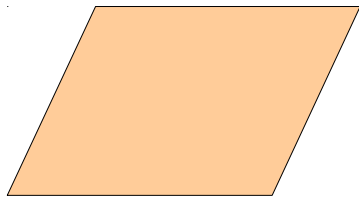


Rectángulo

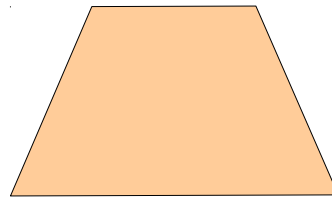


Obtusángulo

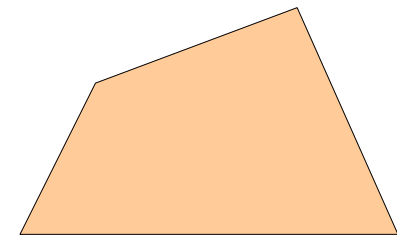
Cuadriláteros: clasificación



Paralelogramo

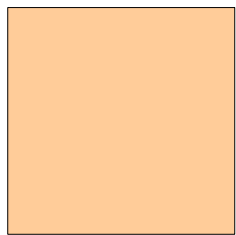


Trapezio

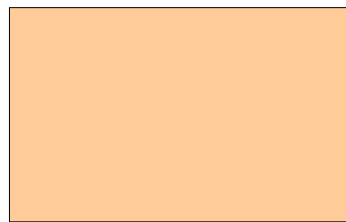


Trapezoide

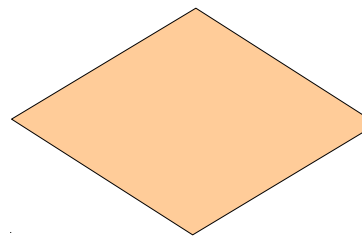
Paralelogramos



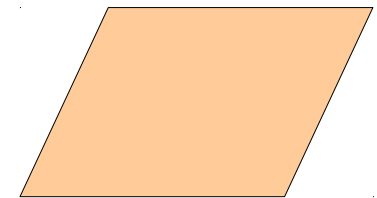
Cuadrado



Rectángulo

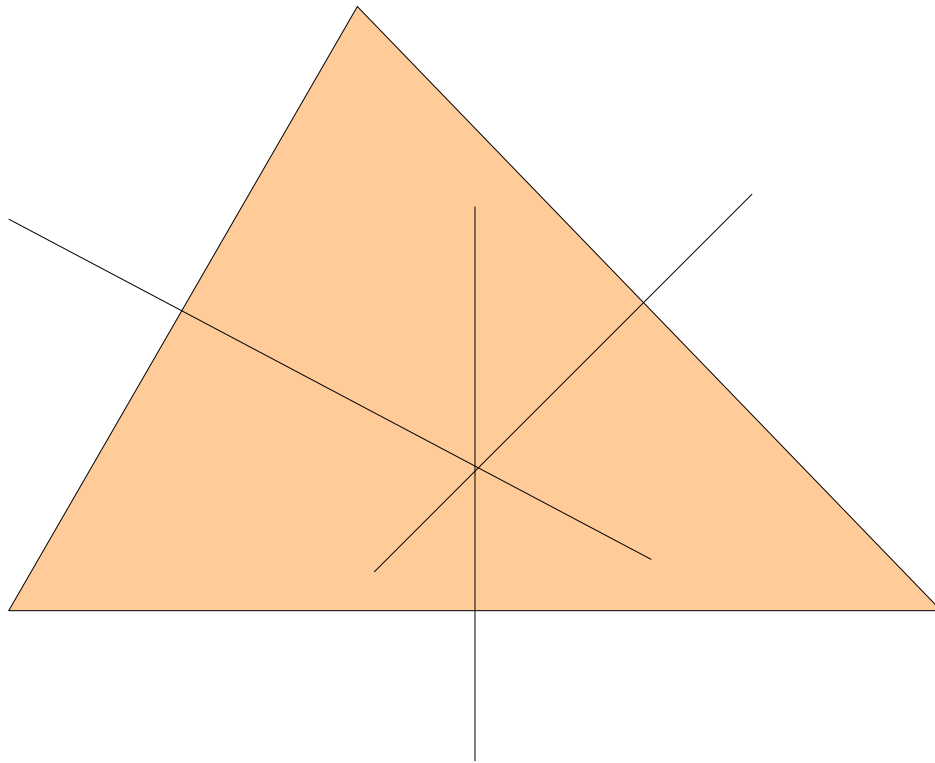


Rombo



Romboide

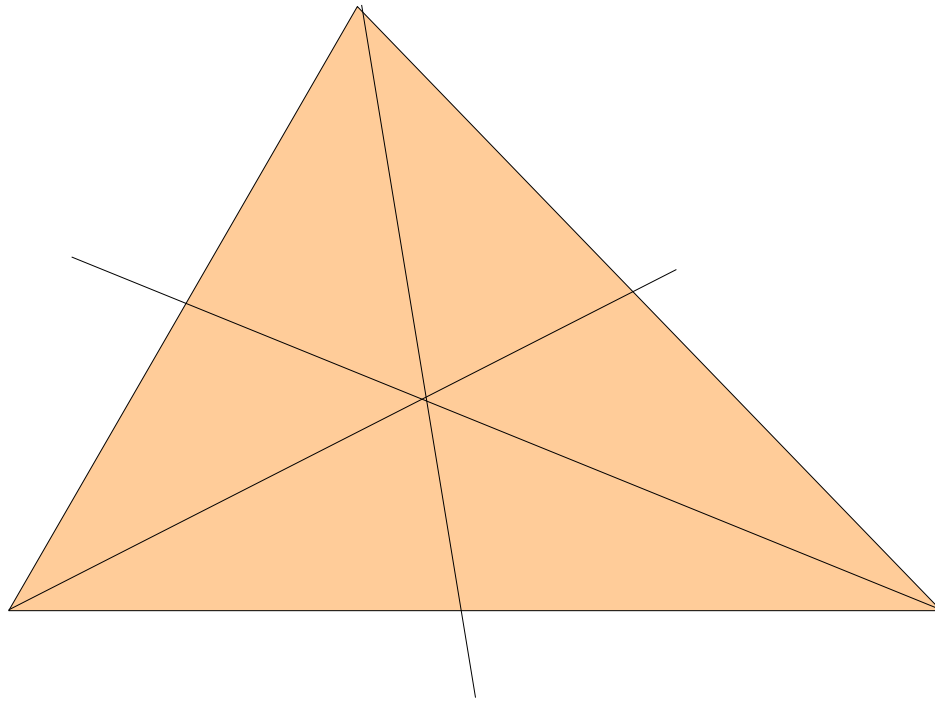
Mediatrices. Circuncentro



Las **mediatrices** son las perpendiculares a los lados por su punto medio.

Las tres mediatrices se cortan en un punto que se llama **circuncentro**. El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita.

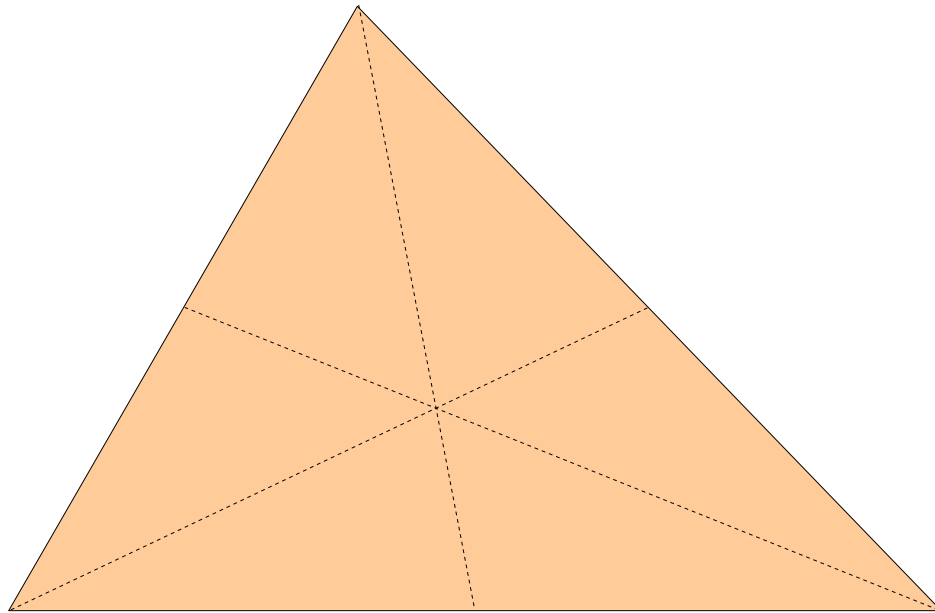
Bisectrices. Incentro



Las **bisectrices** son las rectas que dividen los ángulos en dos partes iguales.

Las tres bisectrices se cortan en un punto que se llama **incentro**. El incentro es el centro de la circunferencia inscrita.

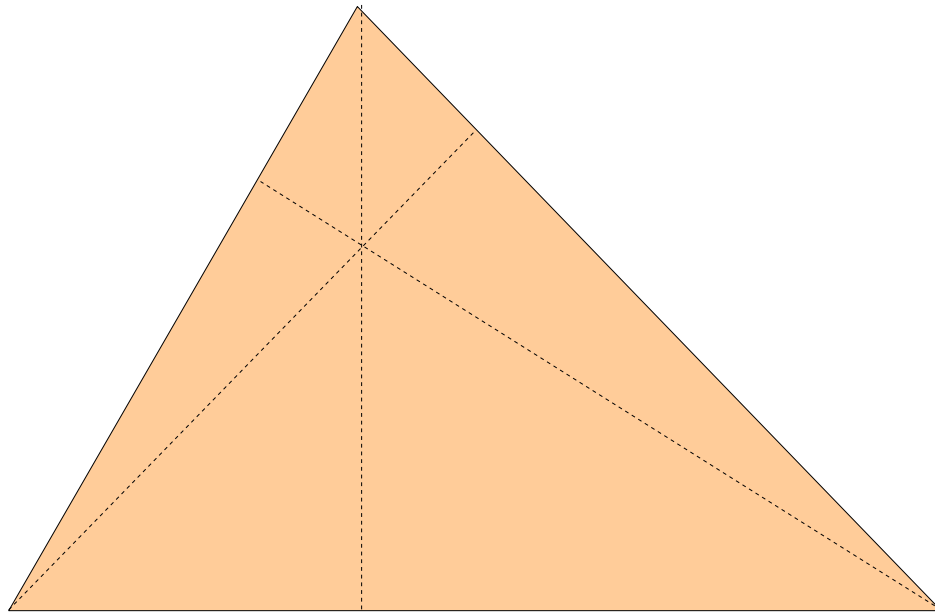
Medianas. Baricentro



Las **medianas** son los segmentos que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Las tres medianas se cortan en un punto que se llama **baricentro**. La distancia del baricentro sobre la mediana es doble al vértice que al lado.

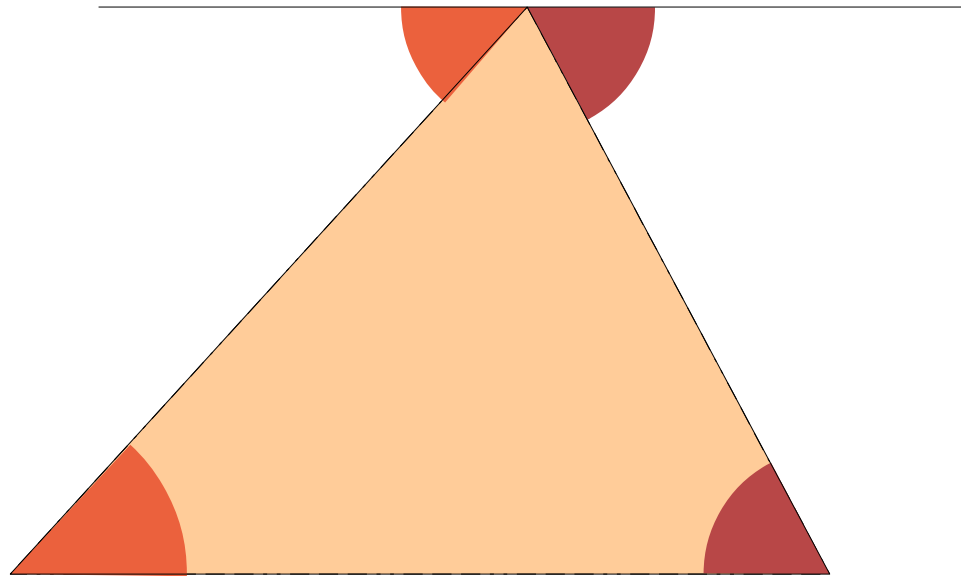
Alturas. Ortocentro



Las **alturas** son los segmentos perpendiculares desde un vértice al lado opuesto.

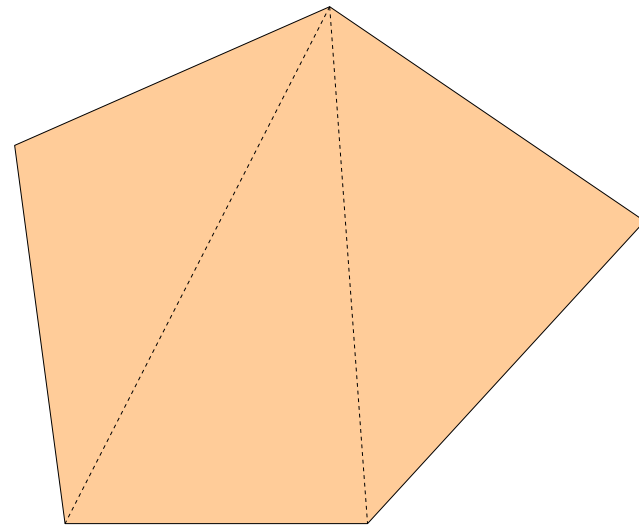
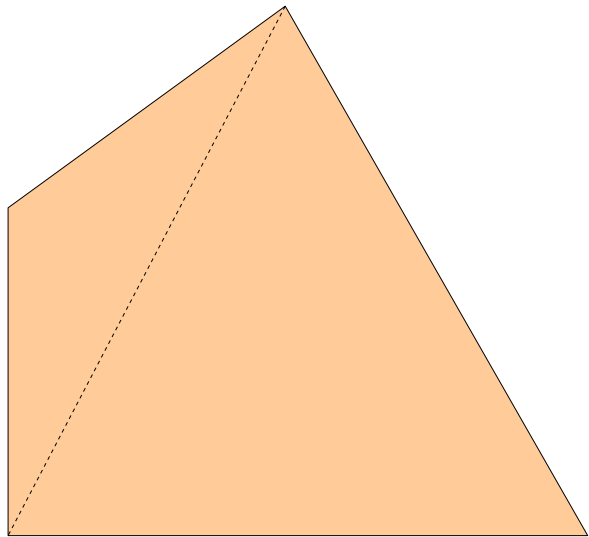
Las tres alturas se cortan en un punto que se llama **ortocentro**.

Suma de los ángulos de un triángulo



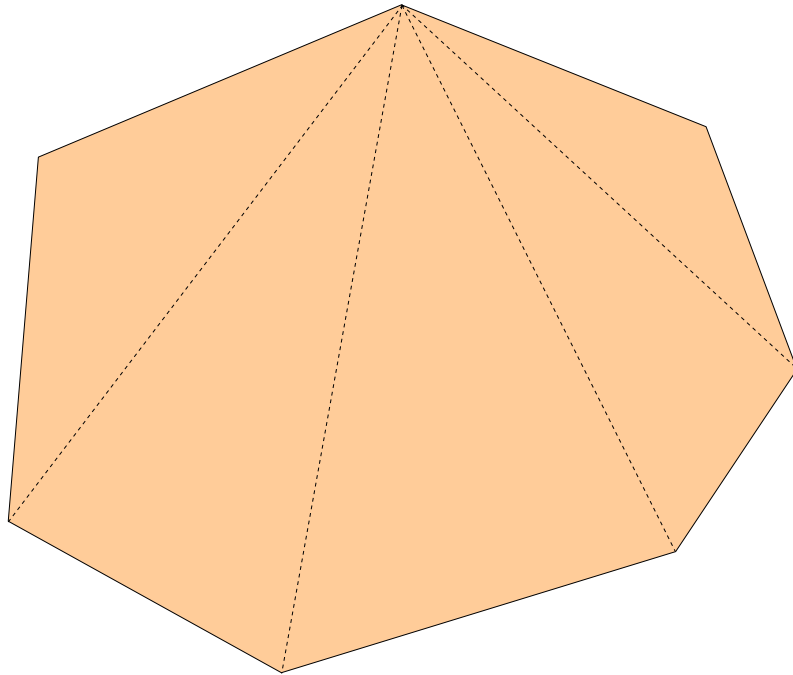
La suma de los ángulos de un triángulo es 180° .

Suma de los ángulos de un cuadrilátero y un pentágono



La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360° .
Los ángulos de un pentágono suman 540° .

Suma de los ángulos de un polígono cualquiera



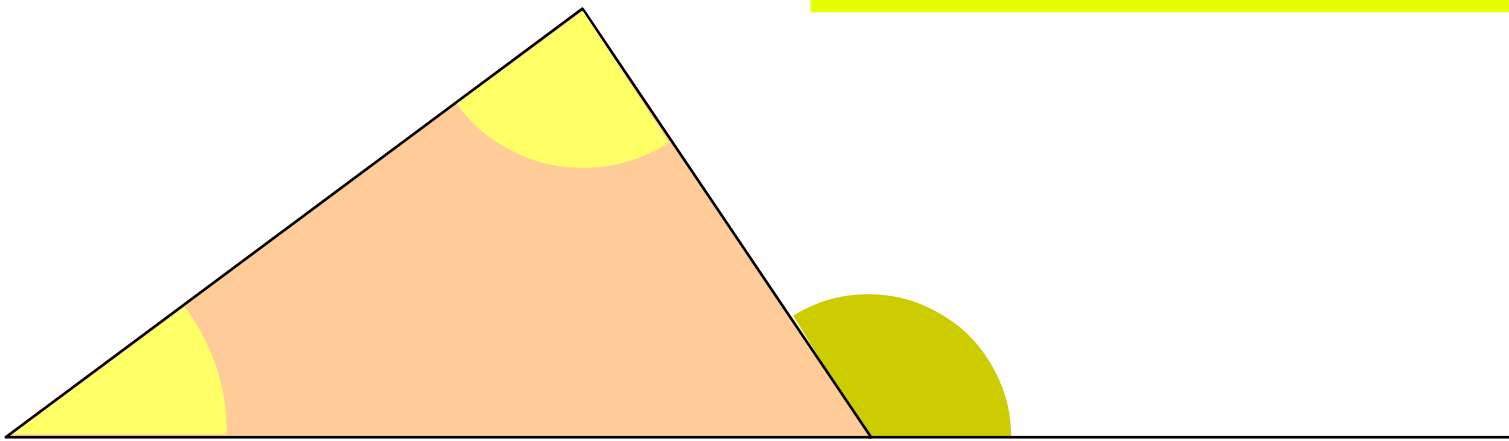
Trazando diagonales desde un vértice cualquiera en un polígono de n lados, éste se descompone en $n - 2$ triángulos.

La suma de los ángulos de un polígono de n lados es:

$$S_n = 180^\circ (n - 2)$$

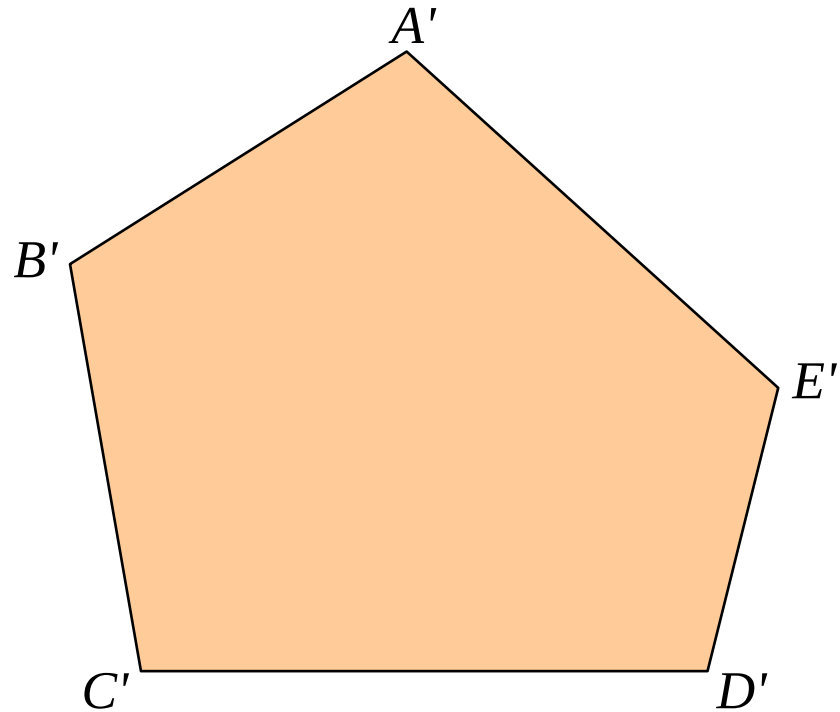
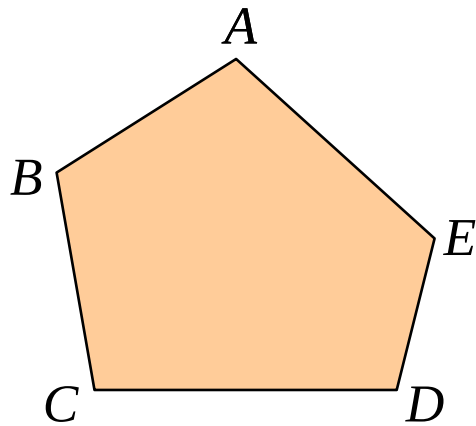
Propiedad del ángulo exterior

En un triángulo se llama ángulo exterior el formado por un lado y la prolongación de otro.



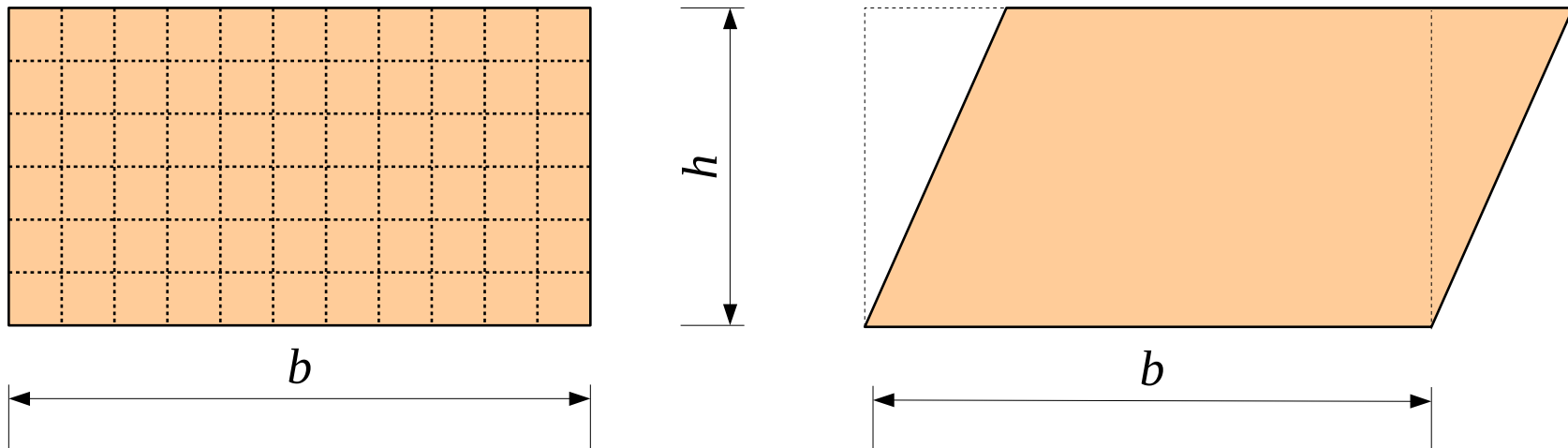
Un ángulo exterior a un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.

Polígonos semejantes



Dos polígonos son semejantes si tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales. Para que dos triángulos sean semejantes basta que tengan sus tres ángulos iguales.

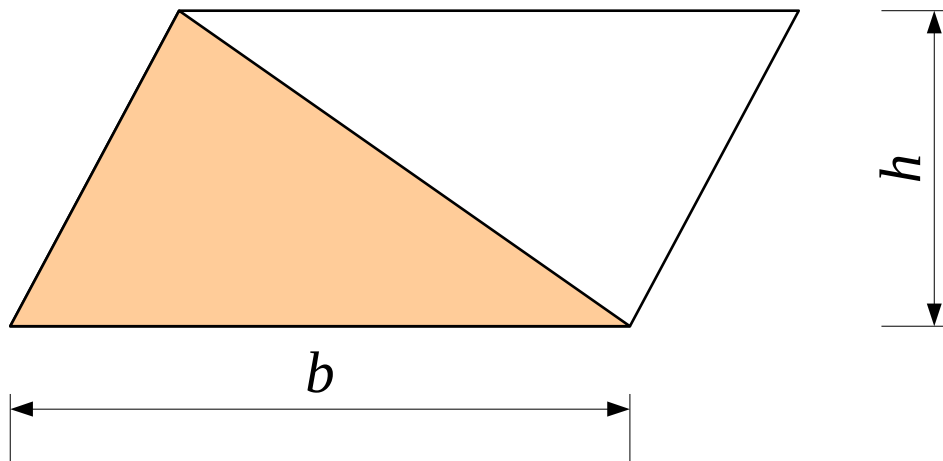
Área del paralelogramo



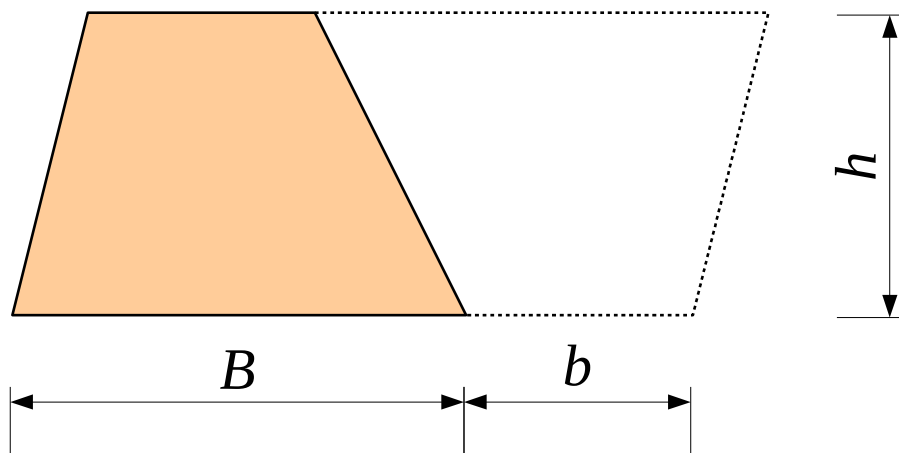
El área de un rectángulo o, en general, de cualquier paralelogramo es igual a la base por la altura:

$$S = b \cdot h$$

Área del triángulo y el trapecio

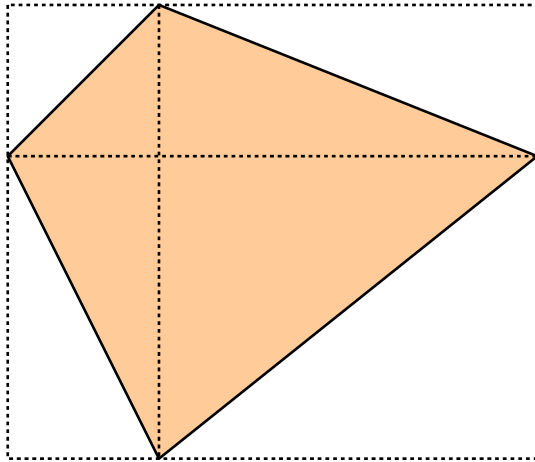


$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$



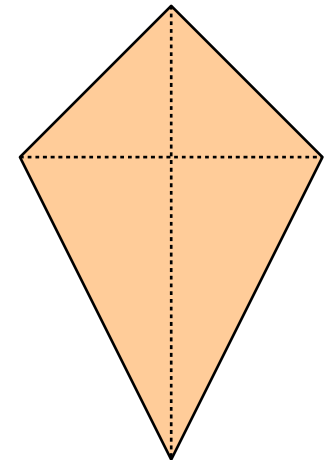
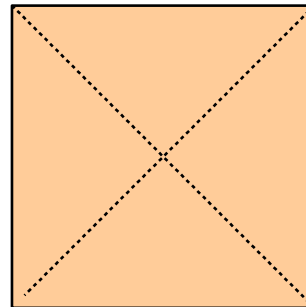
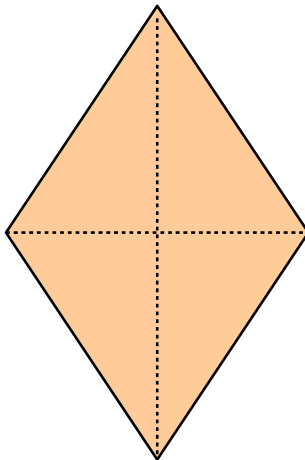
$$S = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Áreas y diagonales

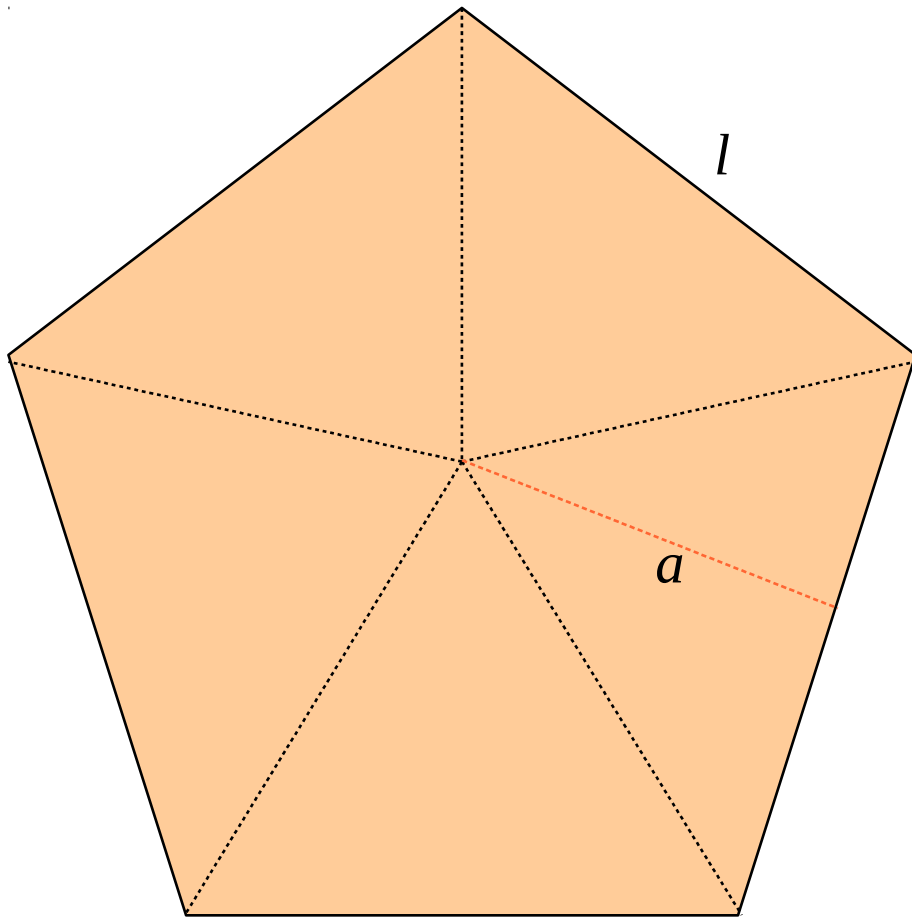


Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, su área es igual al producto de las diagonales dividido por dos:

$$S = \frac{D \cdot d}{2}$$



Área de un polígono regular



Un polígono regular de n lados, puede descomponerse en n triángulos isósceles.

La altura de estos triángulos es la **apotema** del polígono.

El área del polígono se obtiene sumando las áreas de estos triángulos:

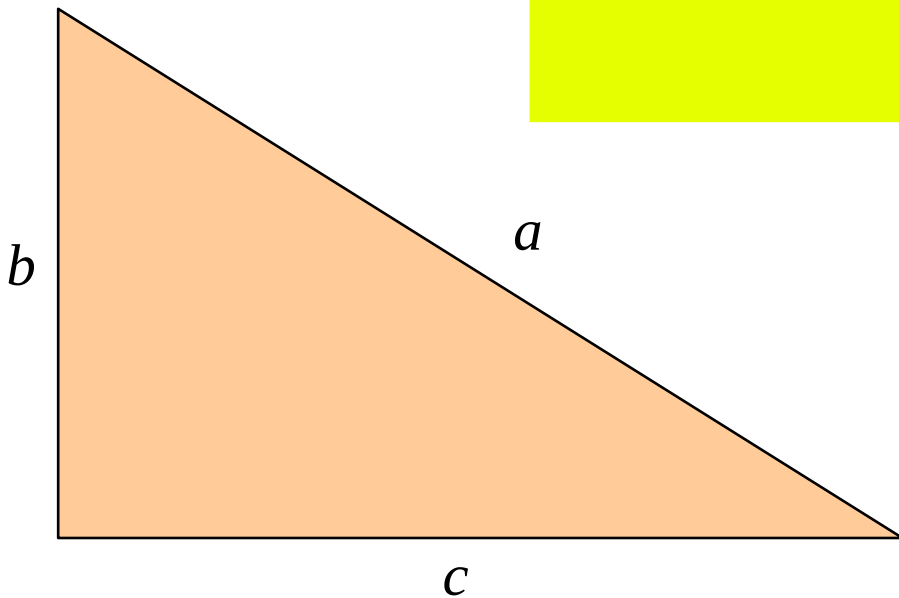
$$S = n \cdot \frac{1}{2} l a = \frac{p a}{2}$$

Donde p es el perímetro.

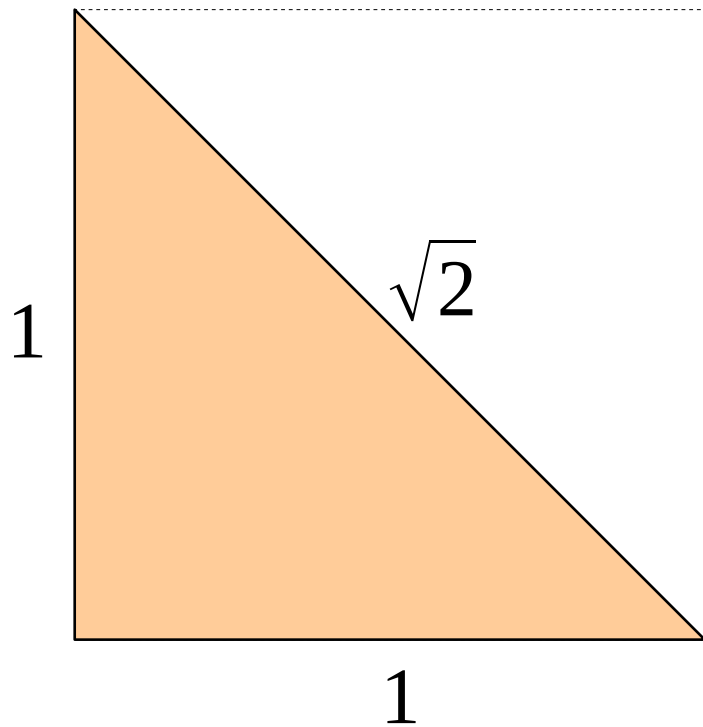
Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



La escuadra

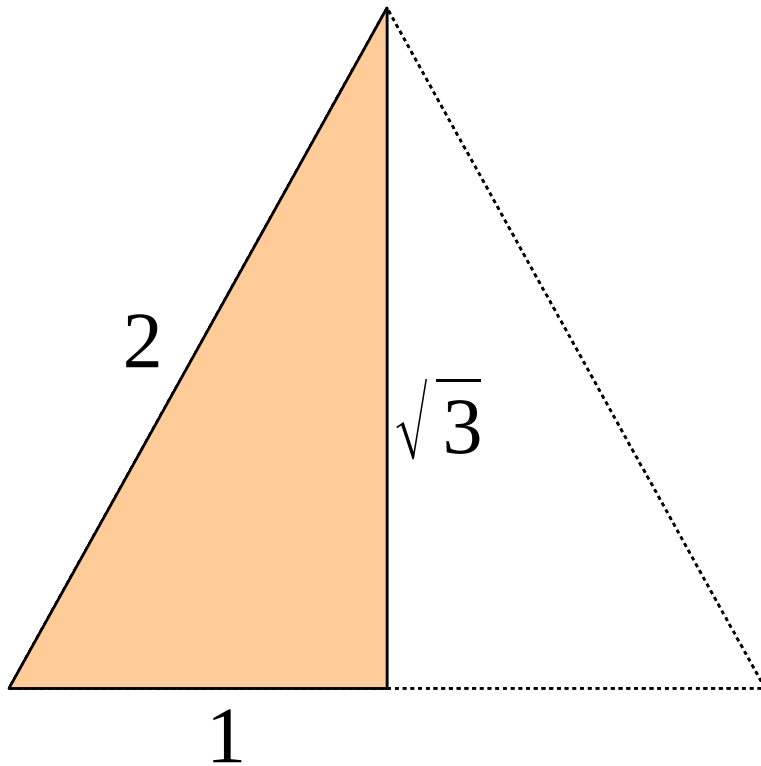


La escuadra es un triángulo rectángulo isósceles. Los ángulos agudos miden 45° . Puede considerarse como una de las dos mitades en que una diagonal divide un cuadrado.

Sus lados están en la proporción:

$$1 : 1 : \sqrt{2}$$

El cartabón

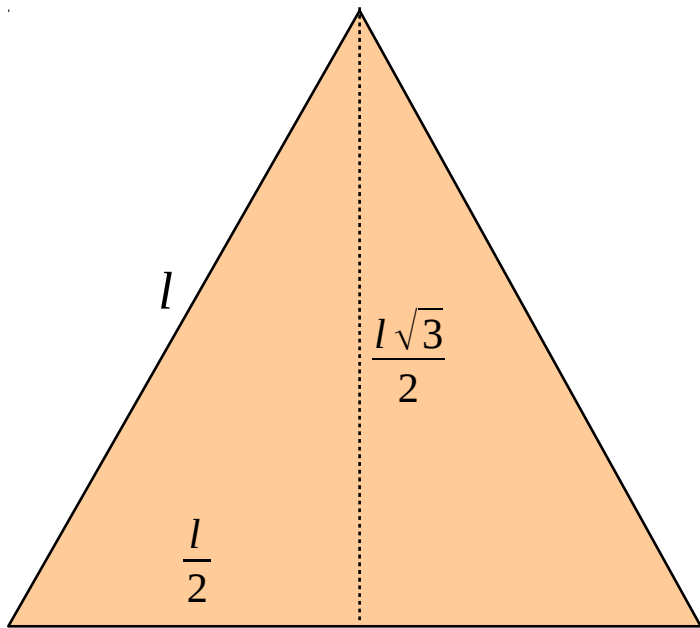


El cartabón es un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60° . Puede considerarse como una de las dos mitades en que una altura divide un triángulo equilátero.

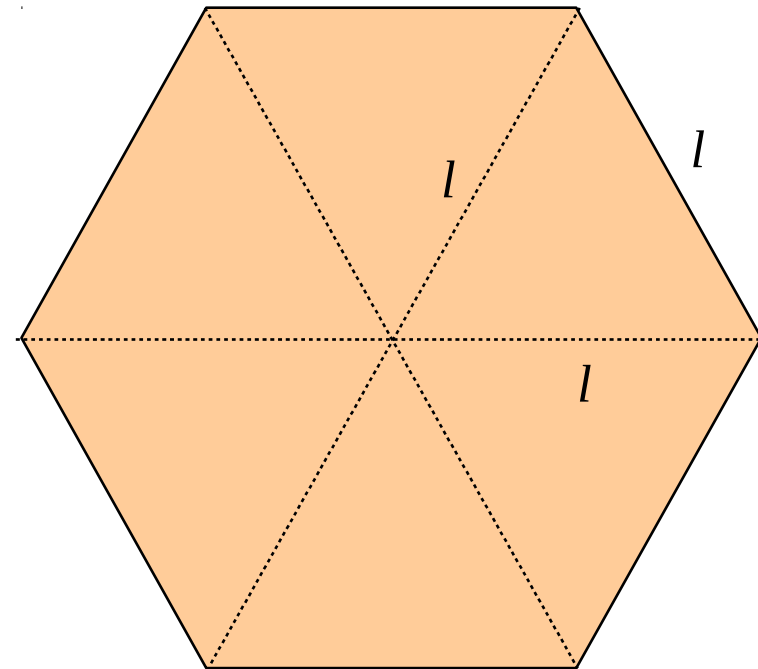
Sus lados están en la proporción:

$$1 : \sqrt{3} : 2$$

Área de un triángulo equilátero y de un hexágono regular

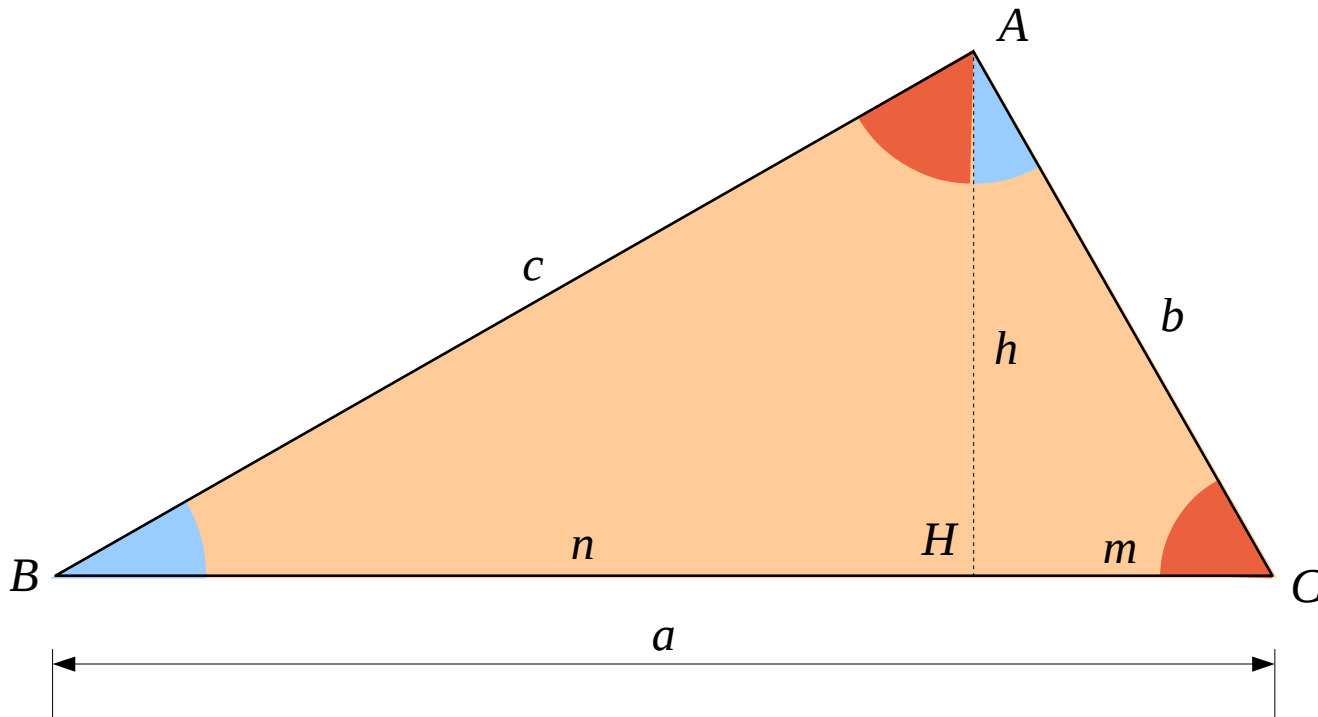


$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$



$$S = \frac{3 l^2\sqrt{3}}{2}$$

Teorema del cateto



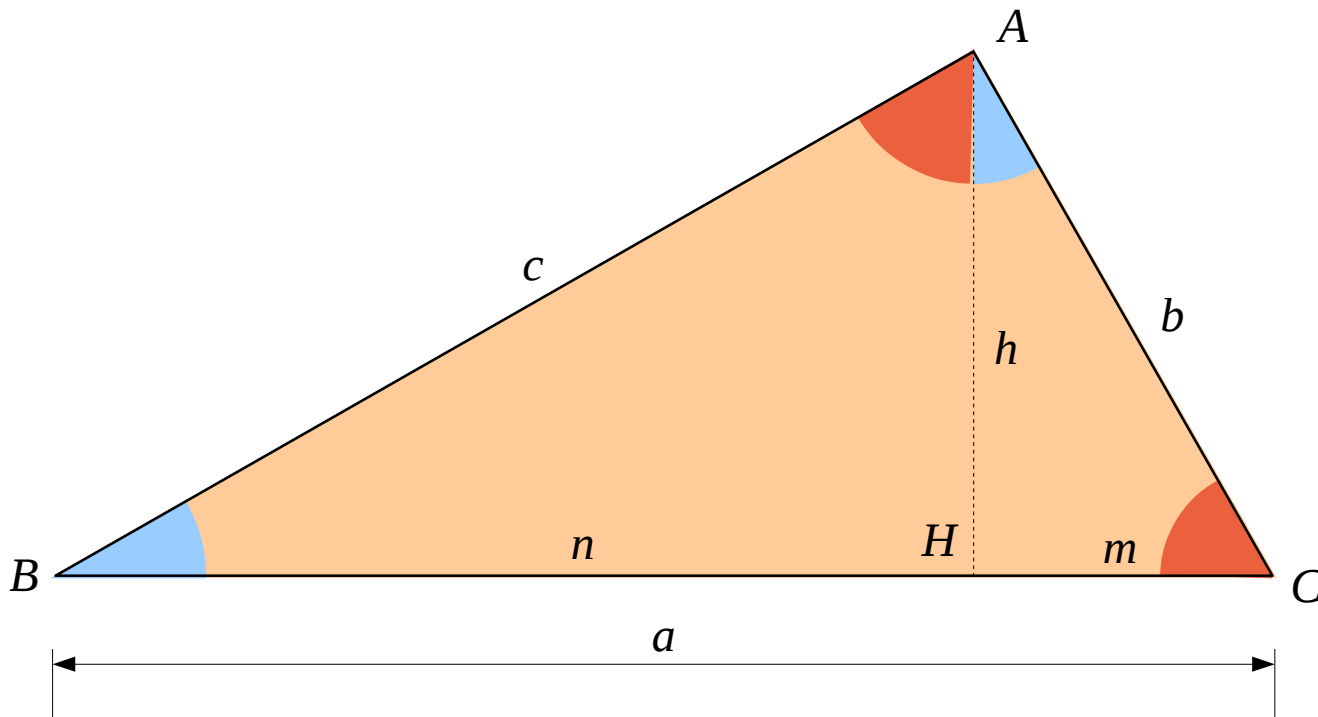
$$b^2 = a \cdot m$$

$$c^2 = a \cdot n$$

Los triángulos ABC y AHC son semejantes. Por tanto:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m$$

Teorema de la altura

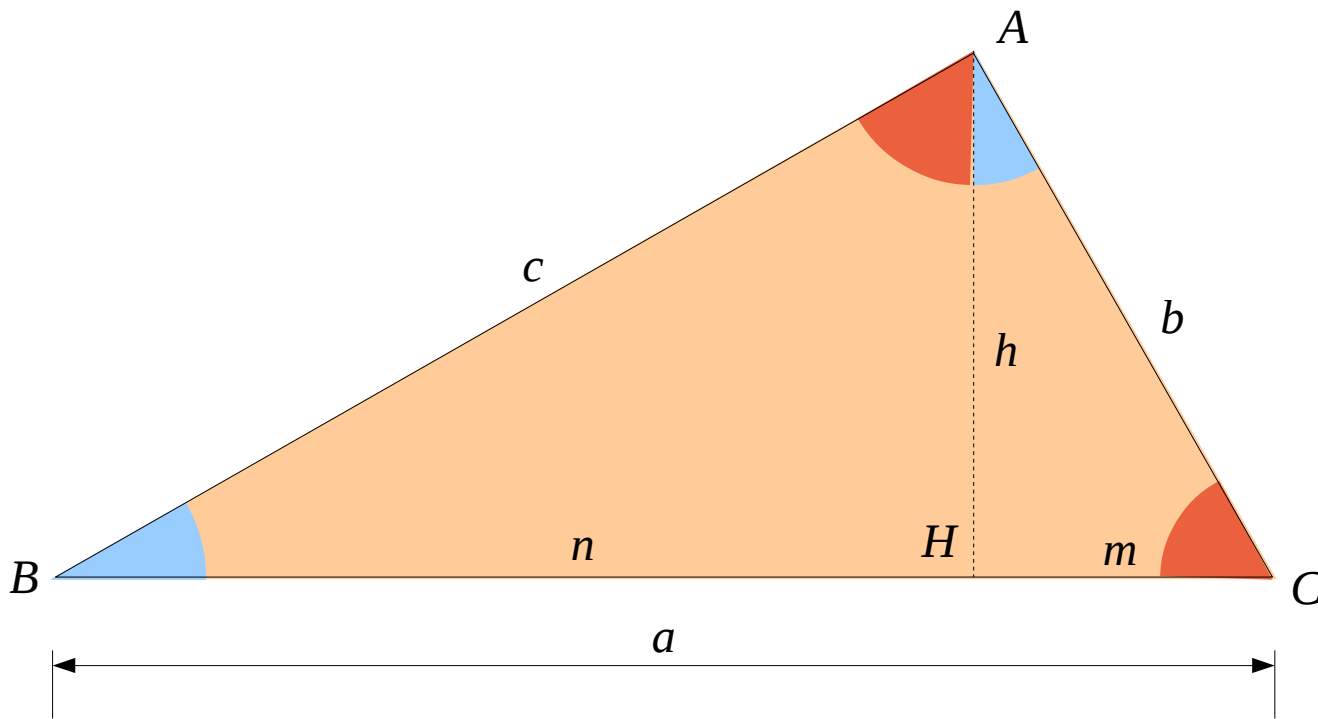


$$h^2 = m \cdot n$$

Los triángulos ABH y AHC son semejantes. Por tanto:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

Demostración del teorema de Pitágoras

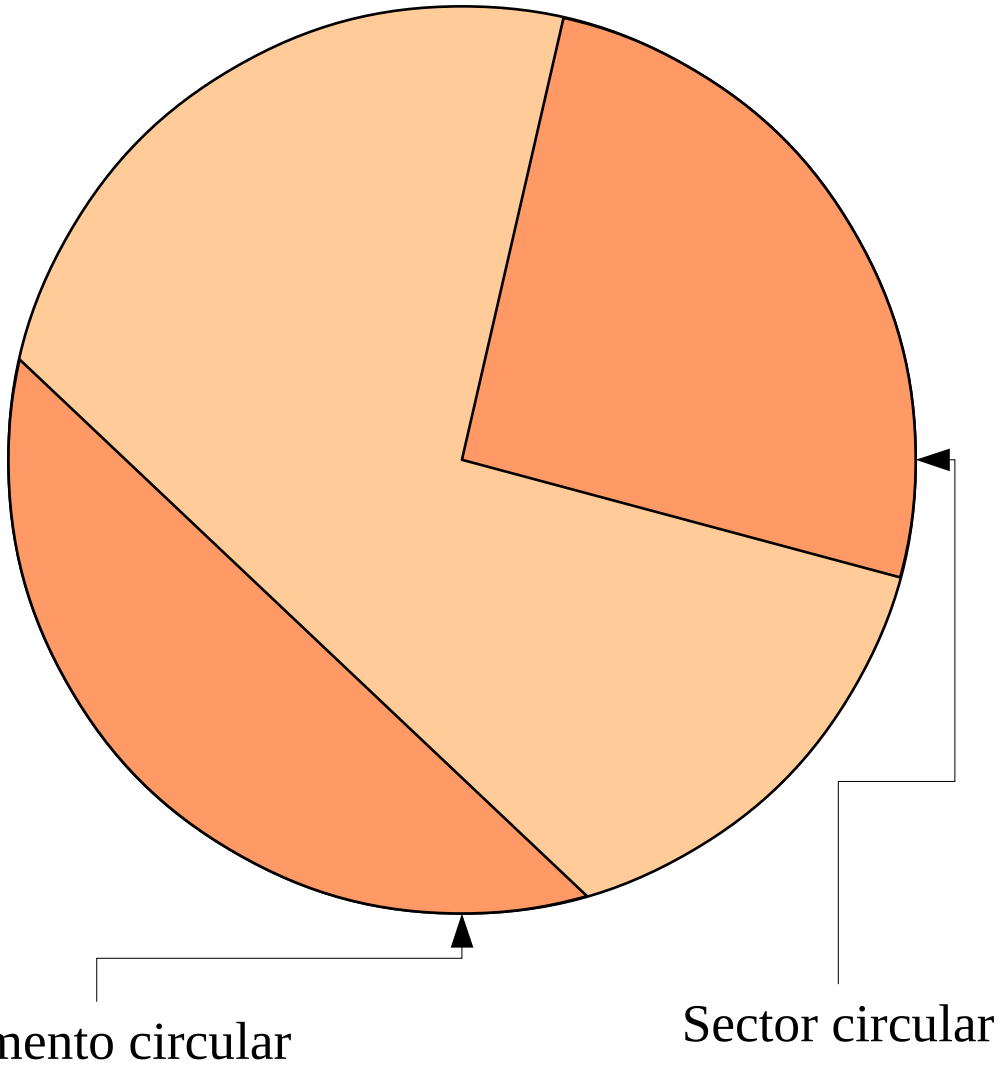


$$a^2 = b^2 + c^2$$

Del teorema del cateto se deduce que:

$$\begin{aligned} b^2 &= a \cdot m \\ c^2 &= a \cdot n \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m + n) = a^2$$

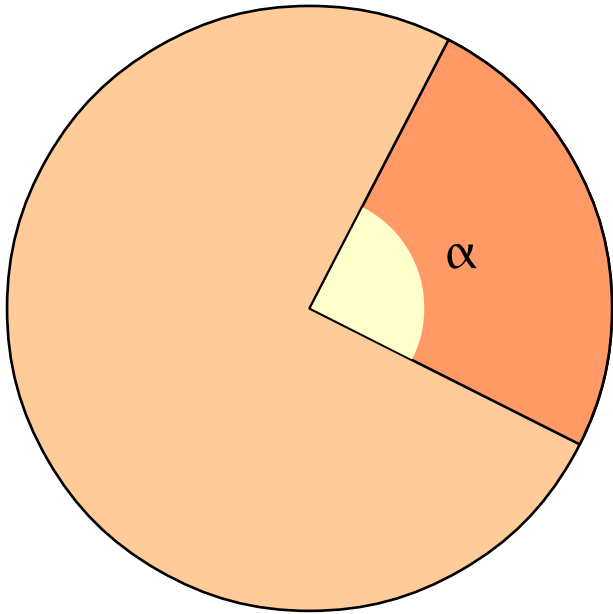
El círculo



El área del círculo se calcula mediante:

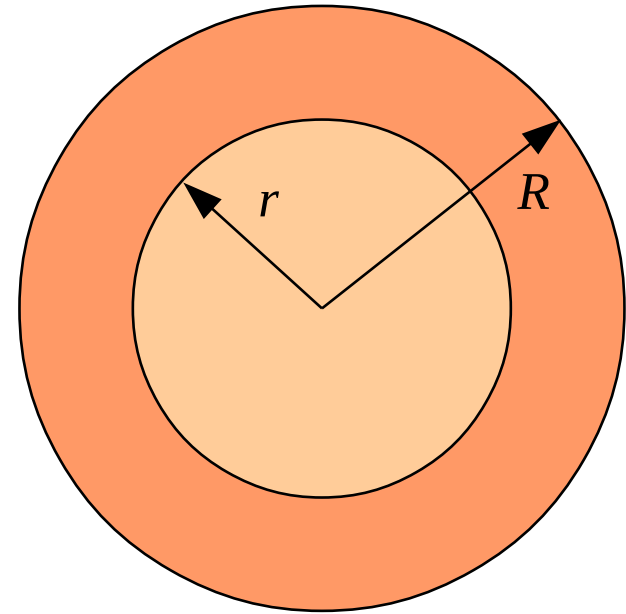
$$S = \pi r^2$$

El sector y la corona



El área del sector es proporcional al ángulo:

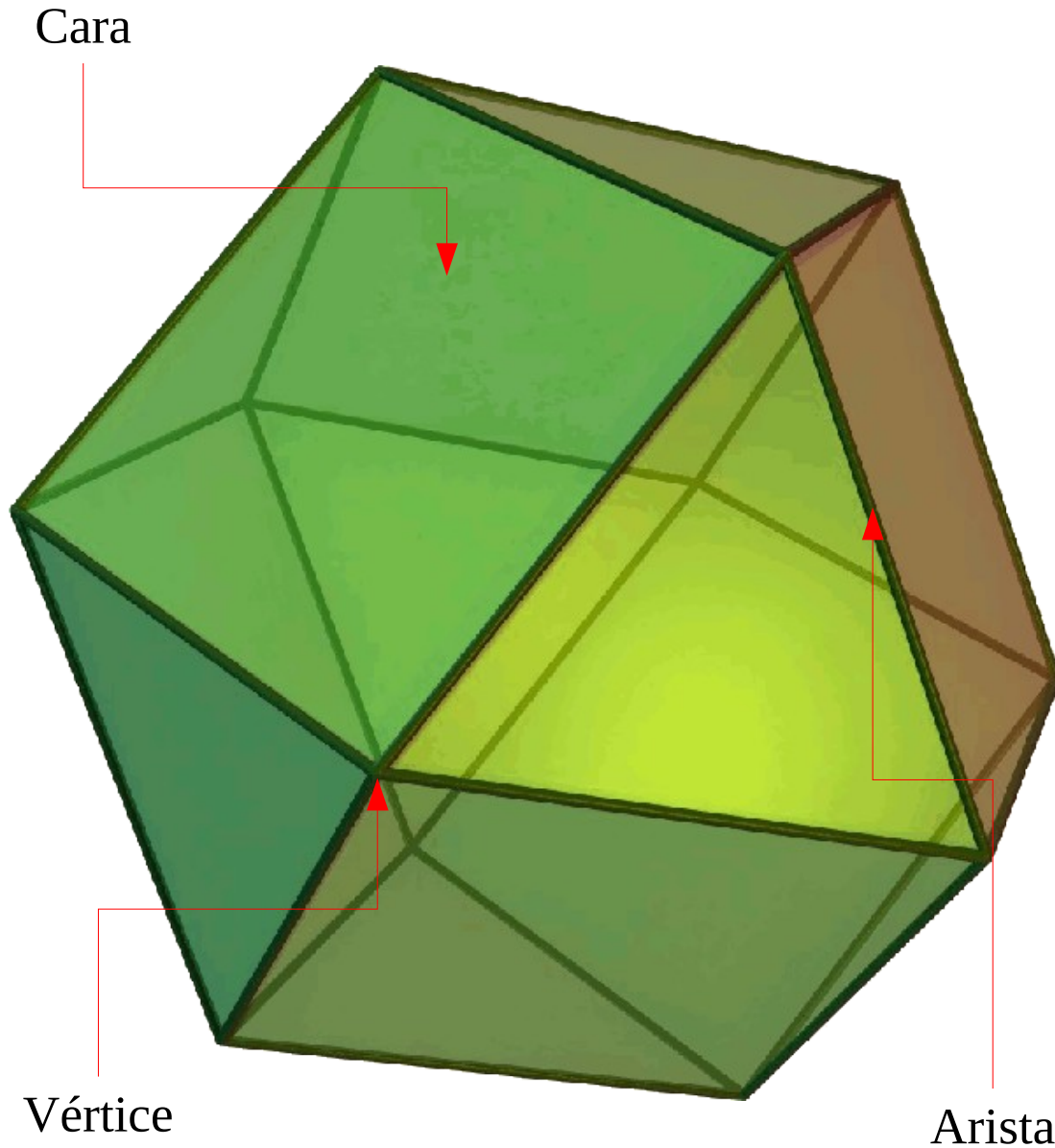
$$S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$$



El área de la corona es la diferencia de las áreas de los dos círculos:

$$S = \pi R^2 - \pi r^2$$

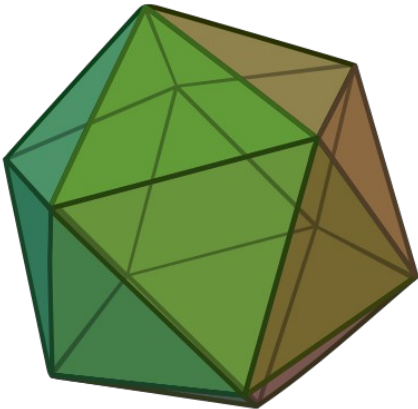
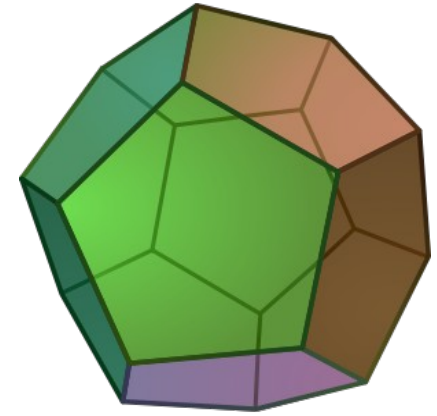
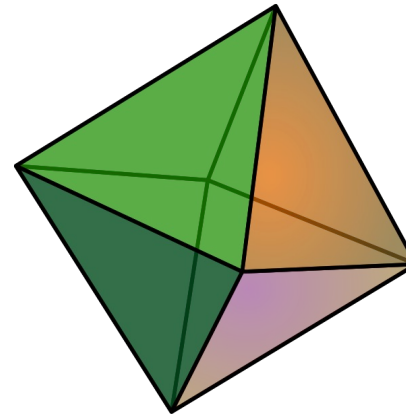
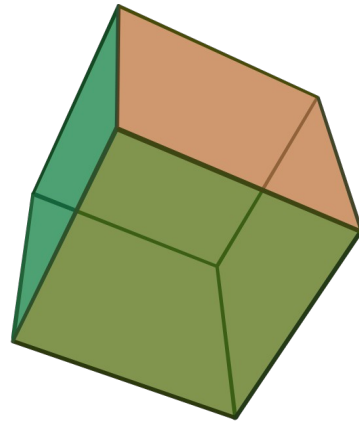
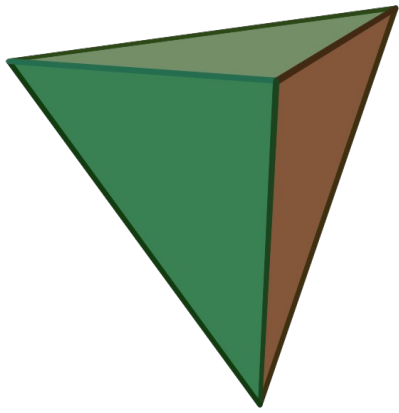
Poliedros



Un poliedro es un cuerpo de volumen finito limitado por caras planas cuyo contorno es un polígono.

Los elementos de un poliedro cumplen la relación de Euler:
 $caras + vértices = aristas + 2$

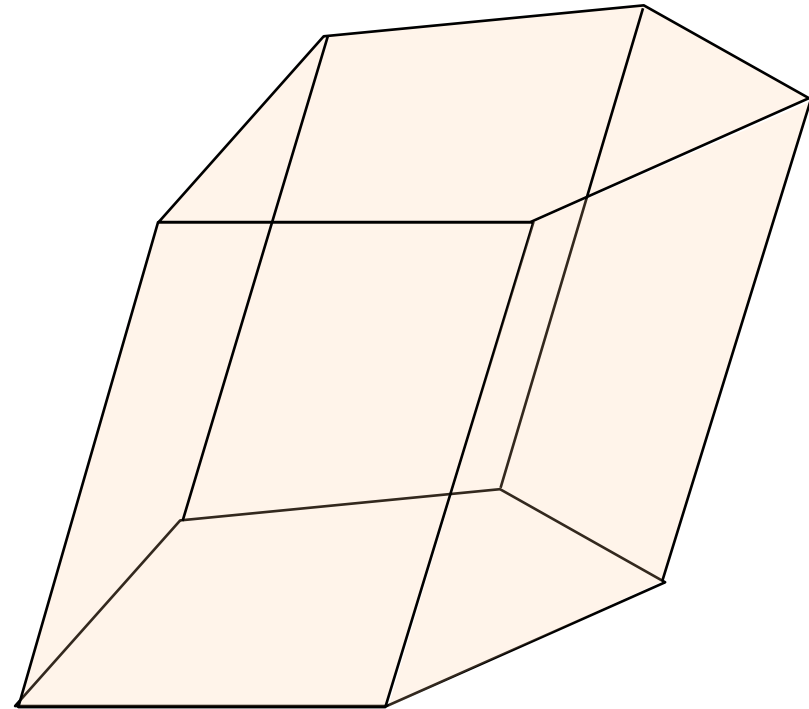
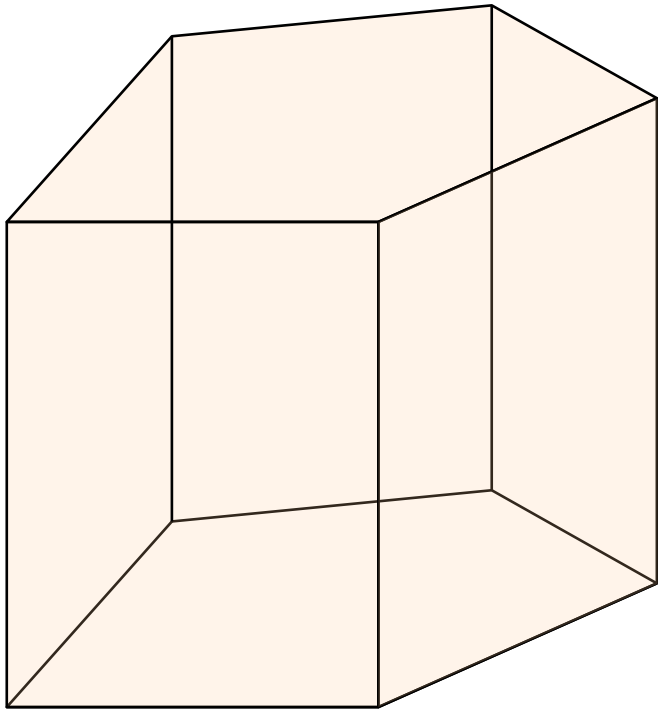
Poliedros regulares



Los poliedros regulares son aquéllos cuyas caras son polígonos regulares iguales.

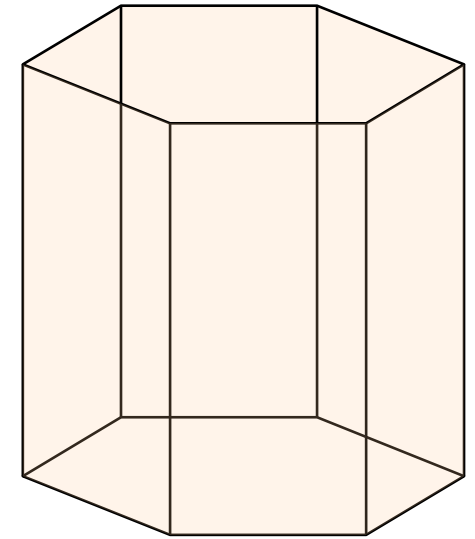
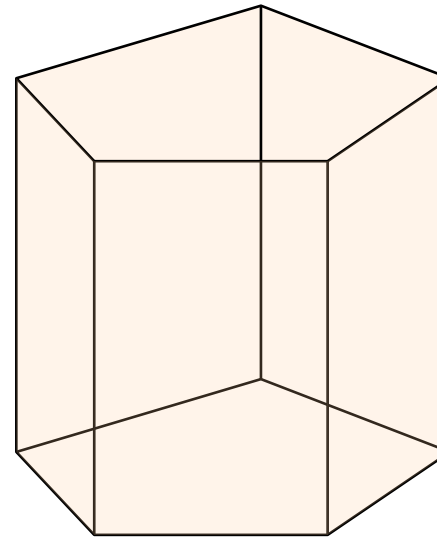
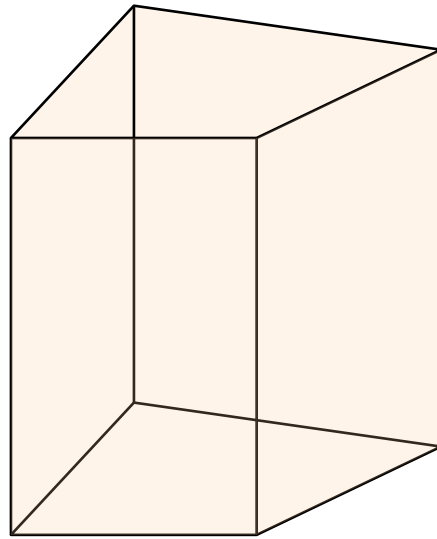
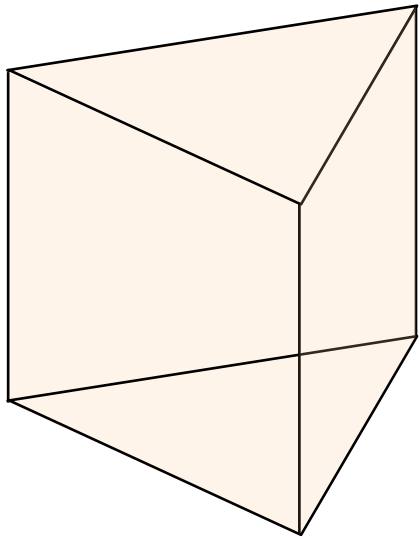
Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Prismas



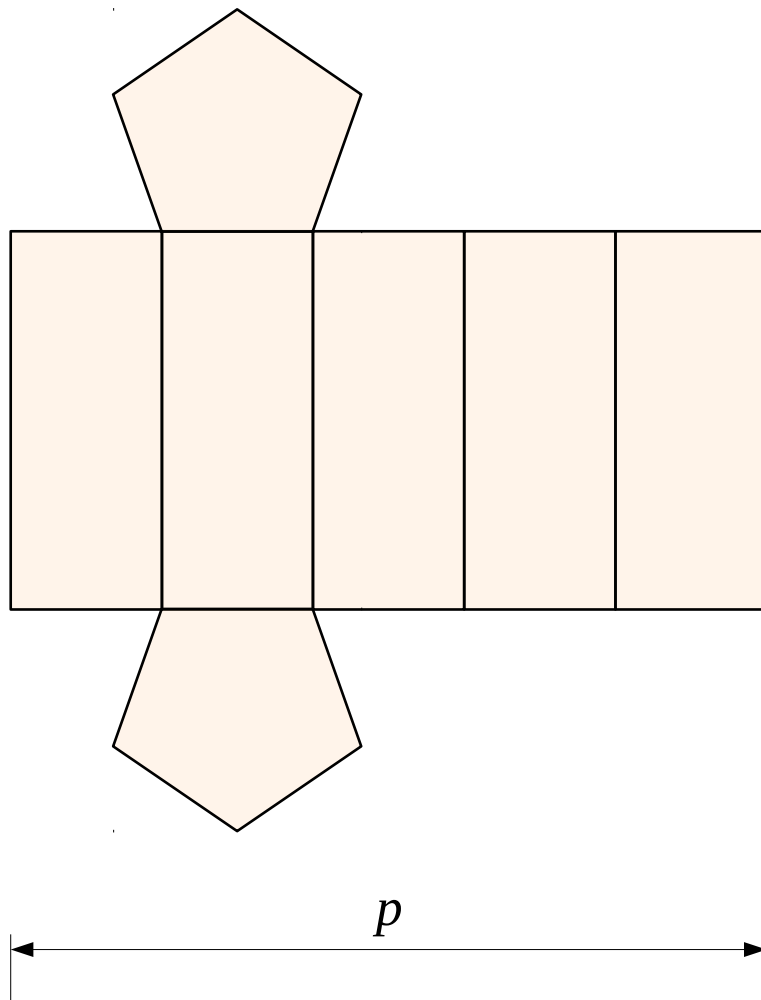
Los **prismas** son poliedros que tienen dos caras paralelas iguales que se llaman **bases** y **caras laterales** que son paralelogramos. Si las caras laterales son rectángulos el prisma es **recto**. Si son romboides el prisma es **oblicuo**.

Prismas



Según que las bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, etc, los prismas se clasifican en triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales, etc.

Prismas

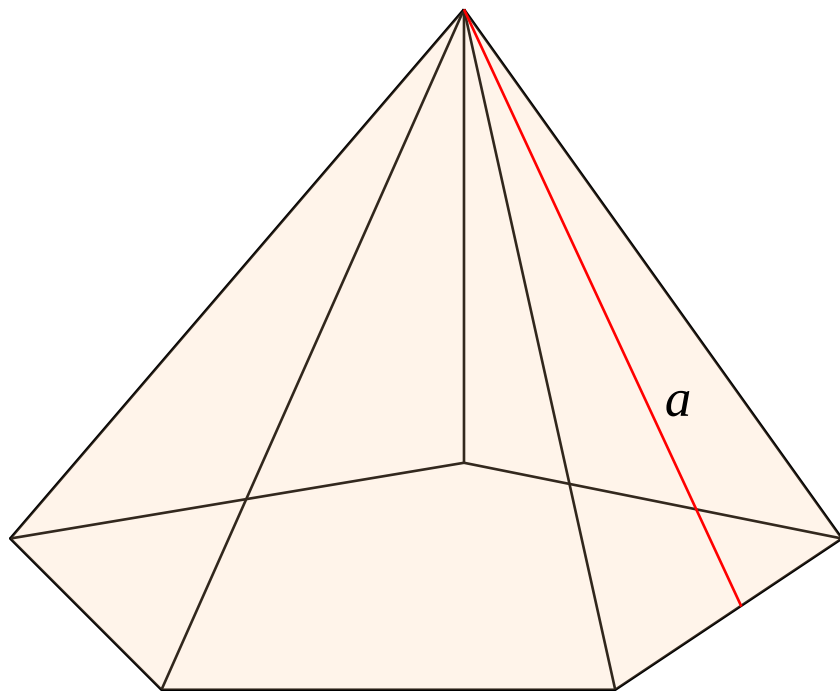


El área lateral de un prisma recto es igual al perímetro de la base por la altura del prisma.

El área total es igual al área lateral más el área de las bases.

El volumen del prisma es igual al área de la base por la altura.

Pirámides

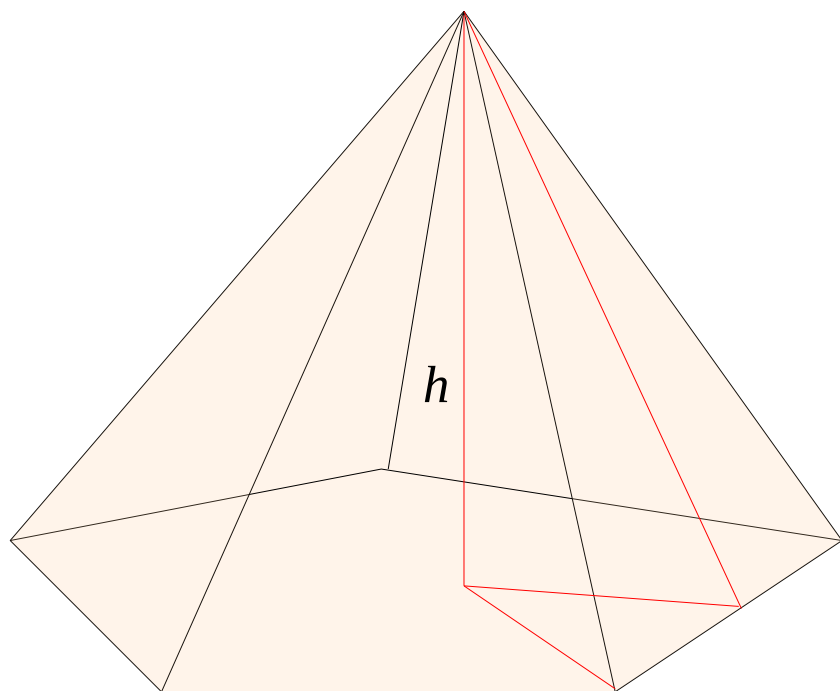


Una pirámide está formada por una base y unas caras laterales que son triángulos con un vértice común.

Una pirámide es regular si la base es un polígono regular y las caras laterales son triángulos isósceles iguales.

En una pirámide regular, la **apotema** es la perpendicular desde el vértice a los lados de la base.

Pirámides



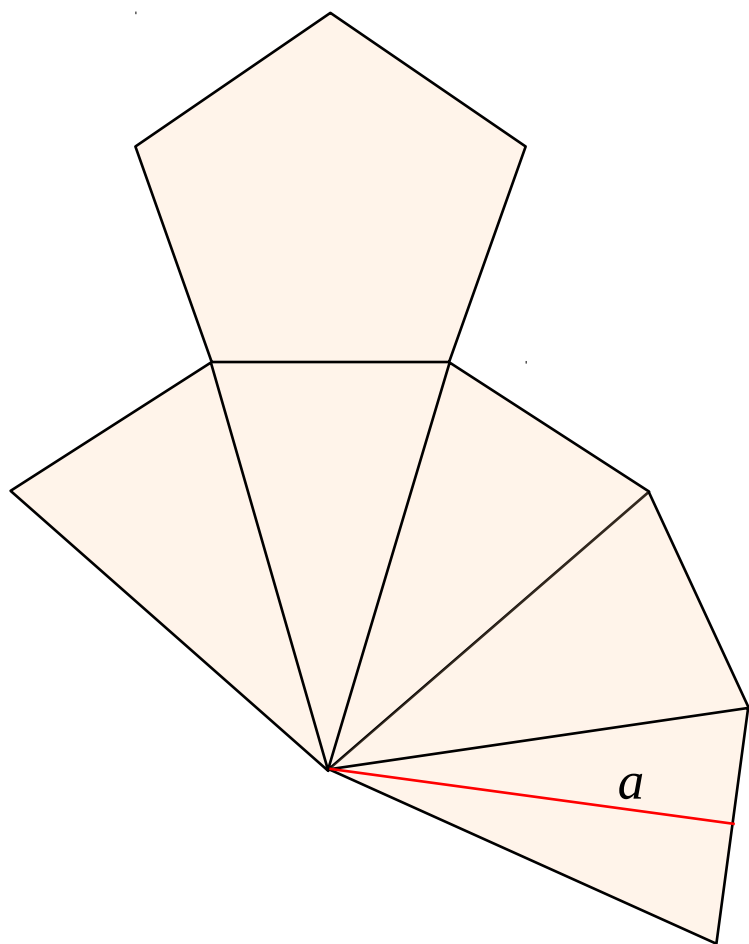
El volumen de una pirámide es igual a un tercio del área de la base por la altura:

$$V = \frac{1}{3} B h$$

En una pirámide regular la altura forma un triángulo rectángulo con la apotema de la base y la apotema de la pirámide.

La altura también forma un triángulo rectángulo con la arista lateral y el radio de la circunferencia circunscrita a la base.

Pirámides

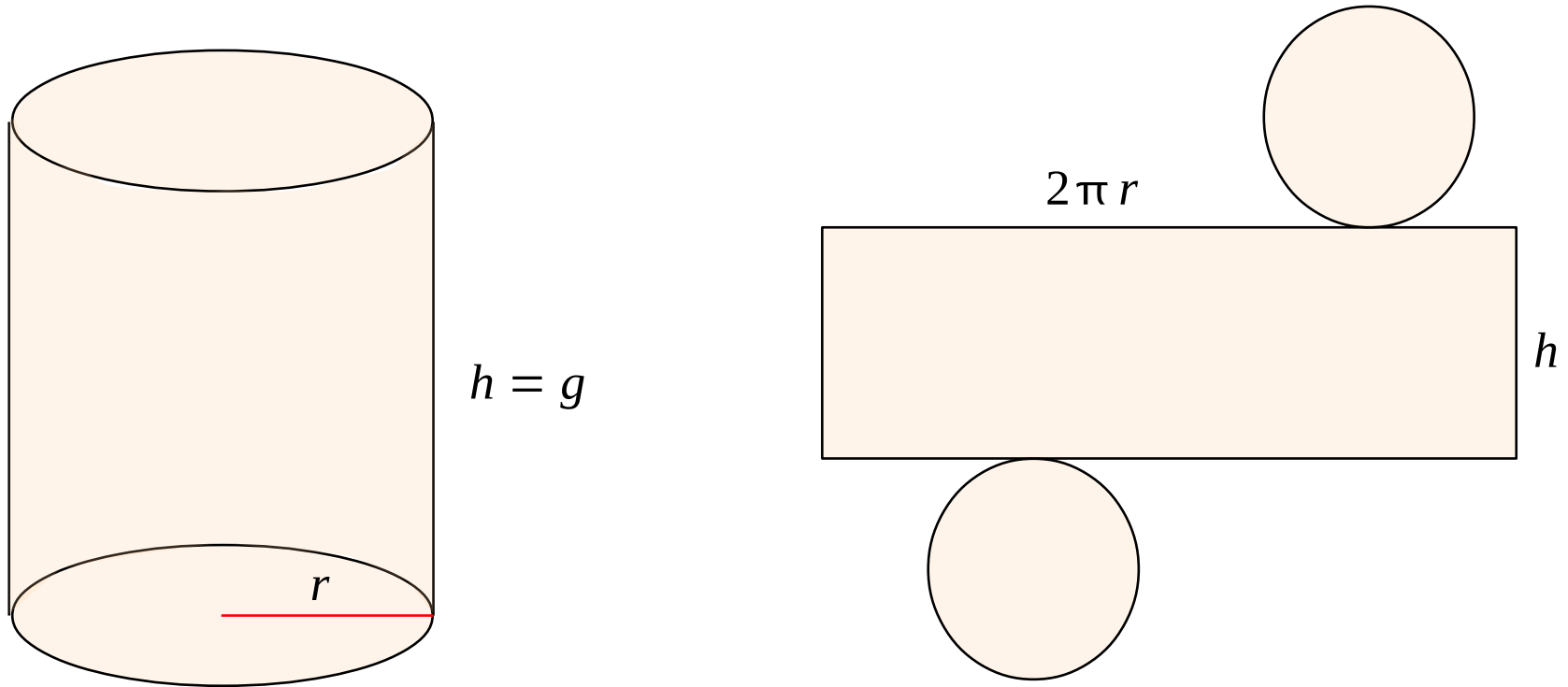


El área lateral de una pirámide regular es igual a la mitad del perímetro de la base por la apotema:

$$S_l = \frac{p a}{2}$$

El área total es igual al área lateral más el área de la base

Cilindro

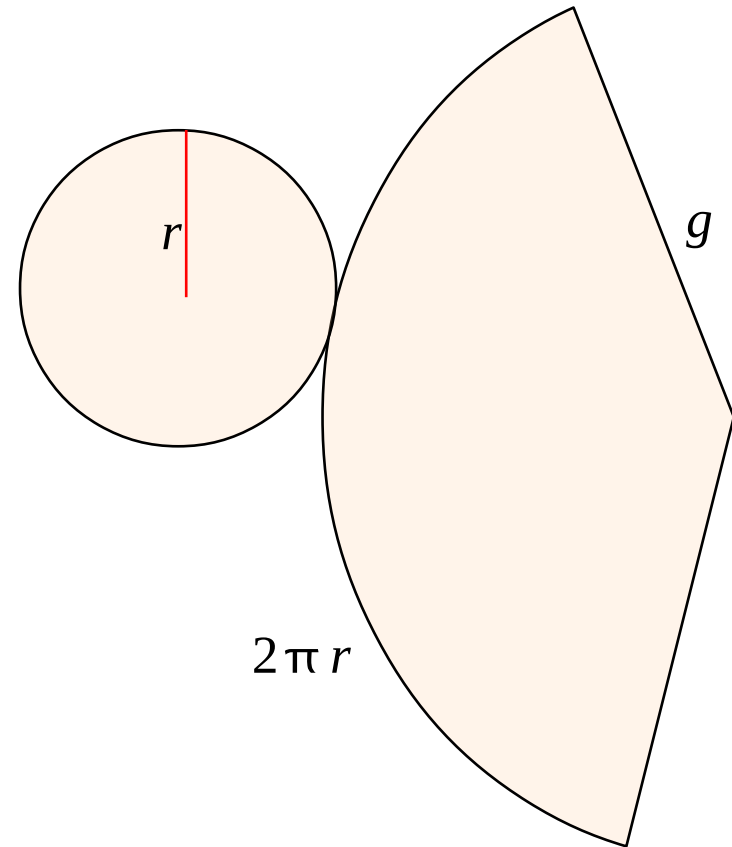
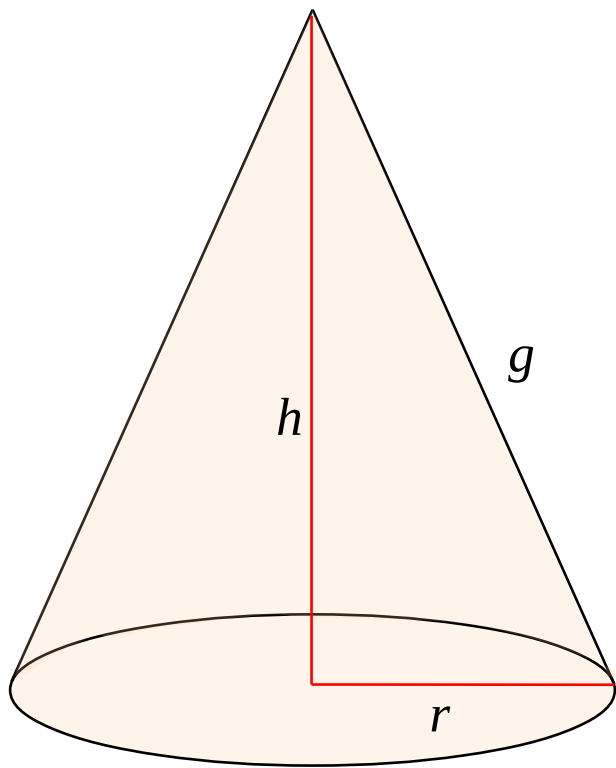


$$V = \pi r^2 h$$

$$S_l = 2\pi r g$$

$$S_t = 2\pi r g + 2\pi r^2$$

Cono

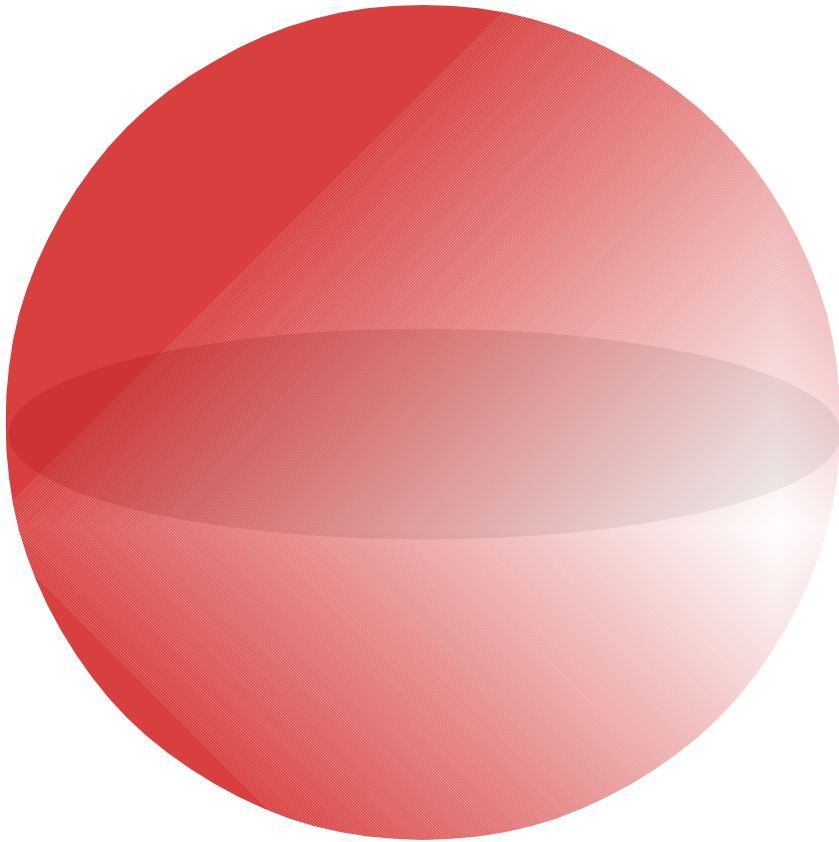


$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$S_l = \pi r g$$

$$S_t = \pi r g + \pi r^2$$

Esfera



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$S = 4\pi r^2$$